УДК 531/534

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАТЕРИИ

А.В. Беловол, доц., к.т.н., Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. *Рассмотрена возможность использования универсальных законов естествознания на примере закона сохранения материи как генераторов общих законов физики на примере законов электродинамики.*

Ключевые слова: *принцип относительности, фазовое пространство, канонические уравнения, электродинамика.*

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА І ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МАТЕРІЇ

О.В. Біловол, доц., к.т.н., Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Розглянуто можливість використання універсальних законів природознавства на прикладі закону збереження матерії як генераторів загальних законів фізики на прикладі законів електродинаміки.*

Ключові слова: *принцип відносності, фазовий простір, канонічні рівняння, електродинаміка.*

ELECTRODYNAMICS AND THE LAW OF MATTER PRESEVATION

A. Belovol, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.),
Kharkov National Automobile and Highway University

Abstract. *The possibility of using the universal law of nature science on example of the law of matter preservation as generators of common low of physics on example of law of electrodynamics is considered.*

Key words: *the principle of relativity, phase space, canonic equations, electrodynamics.*

Введение

Основными свойствами материи считается ее несотворимость и неуничтожимость, которые составляют суть закона сохранения материи. Формулировка закона сохранения материи, которая допускает формализацию в виде так называемого уравнения баланса некоторой физической величины, состоит в следующем: количество любой субстанции, содержащейся в данном объеме среды, может измениться только посредством ее перетекания через поверхность объема (извне или наружу) и в результате существования внутреннего источника (стока). В математической записи уравнение баланса для величины плотности f имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_V f dV = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_V j dV,$$

где $\mathbf{F}$ – поток величины через поверхность объема, а j – интенсивность источника этой величины.

Наиболее полно и естественно эволюция физической системы выражается в пространстве состояний (фазовом пространстве). При этом движению системы в физическом пространстве отвечает движение некоторой фазовой среды в пространстве состояний. Возникает вопрос, можно ли применять закон сохранения материи в этом пространстве, тем более, что фазовая среда по всем формальным признакам может не отличаться от материальной, да и с математической точки зрения нет никаких препятствий к тому.

Поскольку наши знания ограничены идеями, полученными из опыта, то нет оснований считать, что универсальные законы естествознания не являются также законами диалектической логики – учения о законах и формах отражения в мышлении развития объективного мира и познания. То есть они должны распространяться и на абстрактные объекты, которые отражают свойства реальных.

Анализ публикаций

В работе [1] проведен анализ роли, которую играют универсальные законы природы в современной науке, их взаимосвязь с общими и частными законами физики. Рассмотрены различные формулировки закона сохранения материи и различные виды уравнений баланса физических субстанций как способы формализации последнего. Обоснована возможность применения закона сохранения материи в абстрактных пространствах.

В работе [2] получены канонические уравнения классической механики в фазовом пространстве на основе закона сохранения материи. Показаны преимущества матричного формализма при работе в многомерных пространствах.

Цель и постановка задачи

Целью исследования является получение уравнений электродинамики из принципа относительности и закона сохранения материи. Движение частицы заряженной среды рассматривается как движение жидкости в фазовом пространстве с естественной метрикой. Естественная метрика отвечает метрике фазового пространства составляющих частицу материальных точек. Уравнения движения фазовой жидкости получаются из закона сохранения материи в виде уравнения баланса.

Уравнение движения заряженной частицы в фазовом пространстве

Рассмотрим механику, в которой скорость распространения взаимодействий имеет максимальное значение, что вполне естественно с научной точки зрения. В современной физике это требование формулируется в виде принципа относительности.

Согласно принципу относительности величина скорости распространения взаимодействия как один из законов природы одинакова во всех инерциальных системах отсчета, то есть представляет собой универсальную постоянную. Этой скоростью является скорость распространения света в пустоте c.

Принцип относительности в механике можно учесть, если перейти к четырёхмерному физическому пространству Минковского, где четвертая декартовая координата x_0 равна ct.

Интервал между двумя последовательными положениями материальной точки в пространстве Минковского (мировыми точками) естественно выбрать в виде

$$dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{I}d\mathbf{x} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

где $d\mathbf{x}$ – столбец, составленный из дифференциалов координат точки, если стоит справа в произведении, или строка, если стоит слева, $\mathbf{I}$ – матрица вида

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знак «+» перед dx_0^2 отвечает тому обстоятельству, что материальная точка может в разные моменты времени занимать одно и то же положение в трехмерном пространстве, то есть квадрат интервала между ее положениями в четырехмерном пространстве должен быть положительным. С другой стороны, материальная точка не может находиться одновременно в двух точках трехмерного пространства, поэтому соответствующий квадрат интервала отрицательный, то есть нефизичный.

Принимая во внимание, что интервал между двумя мировыми точками является мировым скаляром, можно образовать новый мировой скаляр τ по формуле

$$(d\tau)^2 = \frac{dl^2}{c^2},$$

где $d\tau$ можно рассматривать как бесконечно малый интервал времени, измеряемый по часам, которые связаны с инерциальной системой координат, движущейся в данный момент времени со скоростью точки (собственной системой координат).

Интервал между ближайшими положениями системы n различных материальных точек в пространстве конфигураций можно ввести, используя квадратичную форму

$$dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{M}d\mathbf{x},$$

где $d\mathbf{x}$ – столбец или строка из $4n$ координат точек системы, а $\mathbf{M}$ – диагональная матрица размером $4n \times 4n$, состоящая из блоков $m_k\mathbf{I}$, где m_k – масса k-той материальной точки в собственной системе координат (масса покоя).

Следует отметить, что введенный таким образом интервал между последовательными положениями изображающей точки в фазовом пространстве с геометрической точки зрения может рассматриваться как естественная метрика пространства конфигураций, которая изначально отражает свойства рассматриваемой механической системы.

В данном случае также можно образовать мировой скаляр τ по формуле

$$(d\tau)^2 = \frac{dl^2}{mc^2},$$

где m – масса покоя механической системы (сумма масс покоя всех точек системы), а $d\tau$ можно рассматривать как бесконечно малый интервал собственного времени системы материальных точек в $4n$-мерном пространстве конфигураций.

Интервал между ближайшими положениями системы n различных материальных точек в фазовом пространстве получим, если возьмем производную по времени от метрики пространства конфигураций, отбросив постоянный множитель

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{M}d\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}d\mathbf{p},$$

где $d\mathbf{p} = \mathbf{M}d\dot{\mathbf{x}}$ – столбец дифференциалов импульсов точек.

Учитывая, что в фазовом пространстве $d\mathbf{x}$ представляет собой столбец (строку), составленный из расположенных последовательно координат и импульсов точек, получаем

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{G}d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{E}$ – соответственно нулевая и единичная матрицы размером $4n$ на $4n$.

Рассмотрим движение системы материальных точек в пространстве-времени как движение сплошной среды. Разобьем среду на бесконечно малые объемы, которым будут отвечать точки с координатами, образующими вектор $\mathbf{q}$. Между положением точки среды и положением материальных точек, из которых она состоит, существует неаналитическая, то есть зависящая от закона движения точек, связь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}),$$

где $\mathbf{x}$ – строка (столбец), составленная из координат точек частицы среды.

Воспользовавшись собственным временем частицы τ, можно образовать четырёхмерный вектор скорости точки относительно наблюдателя в системе координат, связанной с частицей

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(x^i\mathbf{e}_i\right) = \frac{dx^i}{d\tau}\mathbf{e}_i + x^i\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau},$$

где $\mathbf{e}_i$ – орты системы координат, связанной с наблюдателем; $\frac{dx^i}{d\tau}\mathbf{e}_i$ – скорость движения точки относительно наблюдателя, если ее рассматривать в собственной системе координат частицы вещества; $x^i\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau}$ – переносная скорость, которая связана с поворотом системы координат наблюдателя относительно сопутствующей системы координат частицы. Тогда скорости точек, составляющих частицу среды, и самой частицы среды будут связаны следующим образом

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}(\mathbf{q}),$$

где $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ – матрица преобразования координат размером 4 на $4n$; $\mathbf{a}(\mathbf{q})$– переносная скорость.

Интервал между последовательными положениями частицы в пространстве конфигураций будет иметь вид

$$dl^2 = d\mathbf{q}\mathbf{I}d\mathbf{q},$$

где роль метрического тензора играет матрица

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Интервал в фазовом пространстве

$$ds^2 = d\mathbf{q}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{p} = d\mathbf{q}d\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{p}\right) = d\mathbf{q}d\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{v}\right) =$$
$$= d\mathbf{q}d\left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right)\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{a}\right).$$

Выражение можно упростить, если ввести метрический тензор

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{I}}{dm},$$

где dm – масса покоя частицы среды, потенциал электромагнитного поля $\mathbf{A}$ в соответствии с формулой

$$\frac{de}{c}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{a},$$

где de – электрический заряд частицы (наличие размерной константы связано с использованием гауссовой системы единиц измерения поля) и импульс в пространстве конфигураций частицы

$$\mathbf{p} = dm\mathbf{g}\dot{\mathbf{q}} + \frac{de}{c}\mathbf{A}.$$

Как следует из формулы для потенциала электромагнитного поля $\mathbf{A}$, он непосредственно связан с переносной скоростью $\mathbf{a}(\mathbf{q})$, которая возникает из-за поворота системы координат наблюдателя относительно сопутствующей системы координат частицы, и соответственно имеет кинематическую природу. Но взаимный поворот сопутствующей системы координат и системы координат наблюдателя в пространстве-времени является результатом изменения скорости движения сопутствующей системы координат в трехмерном физическом пространстве. Таким образом, потенциал электромагнитного поля можно считать также мерой взаимодействия, которое вызывает изменение скорости частицы.

Переходя в фазовое пространство, получаем

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{G}d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица размером 8 на 8 вида

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Если рассматривать частицу среды как консервативную систему, то соответствующая ей фазовая жидкость является несжимаемой и дивергенция скорости фазовой жидкости равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Выбирая в качестве субстанции произведение радиус-вектора бесконечно малой частицы фазовой жидкости на ее объем, запишем для нее уравнение баланса

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{x}dV) = \dot{\mathbf{x}}dV + \mathbf{x}d\dot{V} = \int \mathbf{H}d\mathbf{S} + \mathbf{J}.$$

Разделив обе части уравнения на объем частицы dV, получаем

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H} + \mathbf{j},$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H}$ – дивергенция тензора $\mathbf{H}$ размером 8 на 8, $\mathbf{j}$ – вектор источника.

Конкретный вид матрицы $\mathbf{H}$ и вектора $\mathbf{j}$ можно получить исходя из однородности фазового пространства и инвариантности уравнений по отношению к выбору порядка координат, а также имея в виду консервативный характер механической системы. Так, однородность фазового пространства означает отсутствие источника в уравнении движения. Из консервативности системы можно сделать вывод об антисимметричности матрицы $\mathbf{H}$, действительно

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H} = 0.$$

Для образования скаляра

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{G}d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{H}\mathbf{G}d\mathbf{x}$$

необходимо, чтобы матрица $\mathbf{HG}$ была диагональной, а матрица $\mathbf{H}$ имела соответственно клеточную структуру

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{D}$ – соответственно нулевая и диагональная матрицы размером 4 на 4.

Так как уравнения движения не должны зависеть от выбора порядка координат частицы, то все элементы матрицы $\mathbf{D}$ должны быть одинаковыми и равными H.

Подставляем матрицу $\mathbf{H}$ в уравнение движения и получаем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$

где $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ – градиент функции H в фазовом пространстве, а матрица $\mathbf{B}$ – антисимметричная матрица размером 8 на 8, которая имеет клеточную структуру

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{E}$ – соответственно нулевая и единичная матрица размером 4 на 4.

Если спроектировать уравнения движения на пространство конфигураций и на пространство импульсов частицы, то получим канонические уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Функция Гамильтона при этом должна иметь вид

$$H = \frac{1}{2dm}\left(\mathbf{p} - \frac{de}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{g}^{-1}\left(\mathbf{p} - \frac{de}{c}\mathbf{A}\right),$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{q}), \mathbf{A}(\mathbf{q})$ представляют собой тензорный и векторный потенциалы.

Последнее уравнение можно рассматривать как уравнение движения среды в эйлеровом представлении. Подставляя в него функцию Гамильтона и выражение для импульса частицы, а также разделив его на собственный объем частицы, получаем

$$\mu\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{u}\Gamma\right)\mathbf{u} = \frac{\rho}{c}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}}$ – антисимметричный тензор электромагнитного поля (здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица, которая играет роль оператора транспонирования); $\Gamma = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{E}^2 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\right)$ – символ Римана-Кристофеля; μ – собственная массовая плотность частицы; ρ – собственная плотность электрического заряда; $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$ – скорость частицы.

Переходя от псевдоэвклидовой к естественной метрике, т.е. считая координаты частицы криволинейными, введем оператор градиента в соответствии с формулой

$$\frac{d(\ )}{d\mathbf{q}} = \frac{\partial(\ )}{\partial \mathbf{q}} + (\ )\Gamma.$$

В этом случае уравнение движения принимает особенно простой вид, который не зависит от выбора системы координат и позволяет определить закон движения среды под действием электромагнитного поля

$$\mu\dot{\mathbf{u}} = \frac{\rho}{c}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{q}}\mathbf{E} - \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{q}}$.

Уравнение для тензора электромагнитного поля

Для того чтобы решить обратную задачу динамики, т.е. определить тензор электромагнитного поля по закону движения среды, воспользуемся законом сохранения электрического заряда, который можно записать в виде уравнения неразрывности в псевдоэвклидовом пространстве-времени

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Или в естественной метрике

$$\frac{d}{d\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Выбирая в качестве субстанции в пространстве конфигураций произведение радиус-вектора бесконечно малой частицы среды на ее собственный объем и плотность заряда, запишем уравнение баланса

$$\frac{d(\rho\mathbf{q}dV)}{d\tau} = \frac{d(\rho\mathbf{q})}{d\tau}dV + \rho\mathbf{q}dV\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{u} =$$
$$= \rho\mathbf{u}dV + dV\mathbf{q}\left(\mathbf{u}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{q}}\right) + \rho dV\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{u} =$$
$$= \rho\mathbf{u}dV + dV\mathbf{q}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\rho\mathbf{u}\right) = -\frac{c}{4\pi}\int\mathbf{F}d\mathbf{S} + \mathbf{b}.$$

Разделив обе части уравнения на собственный объем частицы среды в пространстве конфигураций, используя уравнение неразрывности и однородность пространства-времени, получаем

$$\rho\mathbf{u} = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ – антисимметричный тензор, который следует отождествить с тензором электромагнитного поля.

В произвольной системе координат уравнение для тензора электромагнитного поля записывается в виде

$$\rho\mathbf{u} = -\frac{c}{4\pi}\frac{d}{d\mathbf{q}}\mathbf{F}.$$

Выводы

В работе показано, что законы электродинамики можно получить, рассматривая механическую систему в фазовом пространстве, исходя из закона сохранения материи и принципа относительности. При этом потенциал электромагнитного поля можно ввести естественным путем из кинематических соотношений.

Представлен еще один аргумент в подтверждение того, что универсальные законы природы могут служить генераторами общих физических законов.

Литература

1. Беловол А.В. Современная физика и универсальные законы естествознания / А.В. Беловол // Наука, техника и технология в постиндустриальном обществе: сб. науч. ст. – 2013. – С. 197–210.
2. Беловол А.В. Законы механики и универсальные законы природы / А.В. Беловол // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2013. – Вып. 60. – С. 148–153.

Рецензент: Ю.В. Батыгин, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 30 апреля 2014 г.