УДК 517.956.4

©2013 р. В.А. Літовченко, О.Б. Васько

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для одного класу вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова із сталими коефіцієнтами встановлено коректну розв'язність задачі Коші з узагальненими початковими даними в класі нескінченно диференційовних функцій.

We establish the well solvability of the Cauchy problem with generalized initial data for a class of degenerate parabolic systems of Kolmogorov type equations with constant coefficients in the class of infinitely differentiable functions.

При моделюванні броунівського руху фізичної системи А.М. Колмогоров одержав ультрапараболічне рівняння відносно щільності ймовірності можливих значень її координат та їх похідних за часовою змінною [1]. Це рівняння відіграло важливу роль при дослідженні теплових і дифузійних процесів з інерцією в однорідному середовищі та зумовило зародження теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. Такі рівняння багаторазово узагальнювались і досліджувались різними авторами [2].

Системи рівнянь колмогорівського типу першою розпочала досліджувати Г.П. Малицька [3]. Нею для випадку непрервних коефіцієнтів, залежних лише від часової змінної, та одновимірної просторової змінної виродження, побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) та досліджено її властивості гладкості й поведінку в околі нескінченно віддалених просторових точок.

У цій статті для систем з [3] встановлюється коректна розв'язність задачі Коші у просторах початкових даних, елементами яких є узагальнені функції типу розподілів Л.Шварца.

1. Допоміжні відомості. Використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ — множини всіх натуральних, дійсних та комплексних чисел відповідно, $\mathbb{R}_+ := (0; +\infty)$, i — уявна одиниця, $|x+iy| := \sqrt{x^2+y^2}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $x := (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$, $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ для $x \in \mathbb{R}^2$, $z^l := z_1^{l_1} z_2^{l_2}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1}|z_2|^{l_2}$, якщо $z := (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$, $l = (l_1; l_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\alpha^* = 1 - \frac{1}{2b}$, $\beta^* := \frac{1}{2b}$; $|x|_+ = |x_1| + |x_2|$, $\Pi_M^2 := \{(t;\xi) | t \in M, \xi \in \mathbb{R}^2\}$, $\langle , \rangle$ — результат дії функціонала на основну функцію, при цьому, якщо $f = (f_1, \ldots, f_m)$ і $\psi(\cdot) = (\psi_{lj}(\cdot))_{l,j=1}^m$, то

$$\langle f, \psi \rangle := \mathrm{col}\Big(\sum_{r=1}^m \langle f_r, \psi_{1r} \rangle, \ldots, \sum_{r=1}^m \langle f_r, \psi_{mr} \rangle \Big).$$

Нагадаємо необхідні відомості про простори типу S, де S — простір основних функцій Л.Шварца. Для довільних $\alpha > 0, \beta > 0$ покладемо [4]

$$S_\alpha^\beta := \big\{ \varphi \in S | \, \exists \{c, A, B\} \subset \mathbb{R}_+ \, \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^2$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : |x^k \partial_x^m \varphi(x)| \leq c A^{|k|_+} B^{|m|_+} k^{k\alpha} m^{m\beta} \big\}.$$

З відповідною топологією S_α^β є об'єднанням повних досконалих зліченно-нормованих просторів із неперервними операціями додавання, віднімання, множення, диференціювання та звичайного зсуву τ_h на крок $h \in \mathbb{R}^2$, остання з яких є ще й нескінченно диференційовною.

У випадку $\alpha + \beta \geq 1$ простір S_α^β є нетривіальним і містить тільки ті нескінченно диференційовні в $\mathbb{R}^2$ функції φ, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_x^m \varphi(x)| \le cB^{|m|_+} m^{m\beta} e^{-\delta|x|_+^{\frac{1}{\alpha}}},\ m\in\mathbb{Z}_+^2,\ x\in\mathbb{R}^2,$$

з деякими додатними сталими c, B і δ, залежними лише від φ.

У випадку $0<\beta<1$ простір S_α^β складається лише з тих функцій φ, які продовжуються з $\mathbb{R}^2$ до цілих функцій $\varphi(x+iy)$, $(x+iy)\in\mathbb{C}^2$, причому

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\left\{-\delta_1|x|_+^{1/\alpha} + \delta_2|y|_+^{1/(1-\beta)}\right\},$$

з деякими $\{c,\delta_1,\delta_2\}\subset\mathbb{R}_+$. Якщо $\beta=1$, то елементи φ відповідного простору S_α^β допускають аналітичне продовження в деяку залежну від φ множину

$$\left\{(x+iy)\in\mathbb{C}^2 |\ \|y\|<\delta\right\}.$$

Якщо ж $\beta>1$, то простір S_α^β містить і фінітні функції. Простори типу S пов'язані між собою перетворенням Фур'є F, зокрема справджується співвідношення $F[S_\alpha^\beta]=S_\beta^\alpha$, де

$$F[X] := \Big\{\psi|\ \psi(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)e^{i(x,\cdot)}dx,\ \varphi\in X\Big\}.$$

Топологічно спряжений з S_α^β простір позначимо $\left(S_\alpha^\beta\right)'$. Із належності f до $\left(S_\alpha^\beta\right)'$ випливає належність до цього простору похідної $\partial_x^m f$, $m\in\mathbb{Z}_+^2$, зсуву $f(ax+h)$, $a\neq 0$, і добутку μf, де μ — мультиплікатор у S_α^β. Послідовність $\{\varphi_\nu,\ \nu\le 1\}\subset S_\alpha^\beta$ збігається в S_α^β до φ при $0<\beta<1$ тоді і тільки тоді, коли вона: 1) правильно збігається на $\mathbb{C}^2$, тобто $\varphi_\nu(z) \underset{\nu\to\infty}{\overset{z\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \varphi(z)$ (рівномірно щодо z на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^2$); 2) обмежена в S_α^β:

$$\exists\{c,\delta_1,\delta_2\}\subset\mathbb{R}_+\ \forall\nu\ge 1\ \forall(x+iy)\in\mathbb{C}^2:$$

$$|\varphi_\nu(x+iy)| \le c\exp\{-\delta_1|x|_+^{1/\alpha}+\delta_2|y|_+^{1/(1-\beta)}\}.$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f\in\left(S_\alpha^\beta\right)'$ задається співвідношенням

$$\langle F[f],F[\varphi]\rangle := (2\pi)^2\langle f,\varphi\rangle,\ \varphi\in S_\alpha^\beta;$$

воно є узагальненою функцією, визначеною на $F[S_\alpha^\beta]$. Обернене перетворення Фур'є F^{-1} узагальненої функції $g\in\left(F[S_\alpha^\beta]\right)'$ задається формулою

$$\langle F^{-1}[g],F^{-1}[\psi]\rangle := (2\pi)^{-2}\langle g,\psi\rangle,\ \psi\in F[S_\alpha^\beta].$$

Зафіксуємо довільно $T>0$, $m\in\mathbb{N}$, $2b\in\mathbb{N}$ і розглянемо систему вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова вигляду

$$\left(\partial_t - x_1\partial_{x_2}\right)u(t;x) = \mathbb{A}(i\partial_{x_1})u(t;x), \qquad (1)$$

$$(t;x)\in\Pi^2_{(0;T]},$$

де $u := \mathrm{col}(u_1;\ldots;u_m)$,

$$\mathbb{A}(i\partial_{x_1}) = \left(\sum_{k=0}^{2b} a_k^{ij}(i\partial_{x_1})^k\right)_{i,j=1}^m$$

— матричний диференціальний вираз, коефіцієнти якого є сталими на $[0;T]$ і такими, що відповідний диференціальний вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(i\partial_{x_1})$$

є $2b$-параболічним за Петровським на множині $\Pi^2_{(0;T]}$, тобто

$$\exists\delta_0>0\ \ \forall\xi_1\in\mathbb{R}:\ \max_j \mathrm{Re}\lambda_j(\xi_1) \le -\delta_0|\xi_1|^{2b}.$$

Тут λ_j — власні числа головного матричного символа $\mathcal{A}^0(\xi_1) = \xi_1^{2b}\left(a_{2b}^{ij}\right)_{i,j=1}^m$.

Якщо для системи (1) задати початкову умову

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f,\ f\in(\mathbb{S}_\alpha^\beta)' \qquad (2)$$

(тут $\mathbb{S}_\alpha^\beta$ – векторний аналог простору S_α^β), то розв'язком задачі Коші (1), (2) назвемо вектор-функцію u, яка диференційовна за t, нескінченно диференційовна за x на множині $\Pi^2_{(0;T]}$, задовольняє систему (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (2) у сенсі збіжності в просторі $(\mathbb{S}_\alpha^\beta)'$, тобто

$$\langle u(t;\cdot),\varphi(\cdot)E\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle f,\varphi(\cdot)E\rangle \quad (\forall\varphi\in\mathbb{S}_\alpha^\beta),$$

де E — одинична матриця порядку m.

ФМРЗК для системи (1)назвається функціональна матриця $G(t,x;\tau,\xi)$ розмірності $m\times m$, визначена для всіх $(t;x)\in\Pi^2_{(\tau;T]}$ й залежна від параметричної точки $(\tau;\xi) \in \Pi^2_{[0;T)}$, така, що:

1) G як функція аргументу $(t;x)$ задовольняє систему (1) на $\Pi^2_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$;

2) виконується граничне співвідношення

$$G(t,x;\tau,\xi) \underset{t\longrightarrow\tau+0}{\longrightarrow} \delta(\cdot - x)E$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Л.Шварца (тут $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака).

У [3] побудовано ФМРЗК для системи (1)

$$G(t,x;\tau,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x,\xi)}\times$$

$$\times e^{i(y,(\xi_1-(t-\tau)\xi_2;\xi_2))}\Theta^t_\tau(\xi)d\xi, \qquad (3)$$

де

$$\Theta^t_\tau(\xi) = E + \sum_{r=1}^{\infty}\int\limits_\tau^t\int\limits_\tau^{t_1}\dots\int\limits_\tau^{t_{r-1}}\Bigg(\prod_{j=1}^{r}\mathbb{A}(\xi_1-$$

$$-(t-t_j)\xi_2)\Bigg)dt_r\dots dt_2dt_1.$$

Досліджено властивості матричної функції $\Theta^t_\tau(\cdot)$, зокрема, встановлено, що вона допускає аналітичне продовження у комплексний простір $\mathbb{C}^2$ до цілої матричної функції, причому

$$|\Theta^t_\tau(\xi+i\eta)| \le c\exp\{-(t-\tau)[\delta_1(\xi_1^{2b}+((t-\tau)\xi_2)^{2b})-$$

$$-\delta_2(\eta_1^{2b}+((t-\tau)\eta_2)^{2b})]\},\ \xi+i\eta\in\mathbb{C}^2, \quad (4)$$

$$0\le\tau<t\le T,$$

де c,δ_1,δ_2 – додатні сталі, залежні лише від T.

Ця оцінка забезпечує належність до простору $S^{\beta^*}_{\alpha^*}$ при фіксованих змінних t і τ кожного елемента матриці $\Theta^t_\tau(\cdot)$, як функції просторової змінної.

Зазначимо, що за допомогою оператора $T^{\eta,\xi}_t$, дія якого визначається рівністю

$$T^{\eta,\xi}_t\varphi(x) = \varphi(x_1-\xi_1, x_2+t\eta_1-\xi_2),$$

ФМРЗК G можна зобразити так:

$$G(t,x;\tau,\xi) = \left(T^{x,\xi}_{t-\tau}F^{-1}_{\eta\to x}[\Theta^t_\tau(\eta)]\right)(t,x;\tau,\xi),$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^2$$

(тут $F_{\eta\to x}$ означає, що оператор Фур'є діє за змінною η і переводить її в x).

Звідси, врахувавши властивості оператора $T^{\eta,\xi}_t$ (див. [5]), одержуємо належність матричної функції G стосовно кожної просторової змінної x і ξ до відповідного векторного простору $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ (при фіксованих t і τ), а також її (сильну) диференційовність за змінною $t\in(\tau;T]$ та нескінченну диференційовність за змінною $x\in\mathbb{R}^2$ у просторі $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ (як абстрактної функції цих змінних).

2. Коректна розв'язність задачі Коші. Наступне твердження характеризує коректну розв'язність задачі Коші (1), (2).

Теорема. *Нехай початкова вектор функція f є елементом простору $\left(\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}\right)'$. Тоді для задачі Коші (1), (2) існує єдиний неперервно залежний від початкових даних розв'язок, який диференційовний за t, нескінченно диференційовний за змінною x і зображується формулою*

$$u(t;x) = \langle f, G(t,x;0,\cdot)\rangle,\ (t;x)\in\Pi^2_{(0;T]}.$$

Доведення. Диференційовність за змінною t і нескінченна диференційовність за змінною x на множині $\Pi^2_{(0;T]}$ вектор-функції $\langle f, G(t,x;0,\cdot)\rangle$ безпосередньо випливає із сильної диференційовності у просторі $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ матричної функції G за цими змінними.

Скориставшись лінійністю функціонала f, а також рівністю

$$\partial_t G(t,x;0,\xi) = (x_1\partial_{x_2}+\mathbb{A}(i\partial_{x_1}))\,G(t,x;0,\xi),$$

дістанемо, що

$$\partial_t u(t;x) = \langle f, \partial_t G(t,x;0,\cdot)\rangle =$$

$$= \langle f, (x_1\partial_{x_2}+\mathbb{A}(i\partial_{x_1}))\,G(t,x;0,\cdot)\rangle =$$

$$= (x_1\partial_{x_2}+\mathbb{A}(i\partial_{x_1}))\,u(t;x),\ (t;x)\in\Pi^2_{(0;T]}.$$

Отже, вектор-функція $\langle f, G(t,x;0,\cdot)\rangle$ є звичайним розв'язком системи (1) на множині $\Pi^2_{(0;T]}$.

Переконаємось тепер у виконанні початкової умови (2) для зазначеної вектор-функції $u(t;\cdot)$. Для цього зафіксувавши довільно елемент $\varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$ і врахувавши означення оберненого перетворення Фур'є узагальненої функції, а також регулярність функціонала $u(t;\cdot)$, одержимо

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle = (2\pi)^2 \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^2} \big(\langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f], F^{-1}_{\xi\to\eta}[G(t,x;0,\xi)]\rangle\big)\varphi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f], I^t_{\eta,\varphi}(x)\rangle dx, \ 0 < t \le T,$$

де $I^t_{\eta,\varphi}(x) := (2\pi)^2 \varphi(x) F^{-1}_{\xi\to\eta}[G(t,x;0,\xi)]$.

Далі, доведемо інтегровність абстрактної матриці $I^t_{\eta,\varphi}(x)$ за x при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ у просторі $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$, тобто перевіримо виконання наступних умов:

1) інтегровність матричної функції $I^t_{\eta,\varphi}(x)$ за x на кожній множині

$$K(r) := \big\{x \in \mathbb{R}^2 |\ \|x\| \le r\big\}, \ r > 0,$$

у просторі $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$;

2) $J^t_{r,\varphi}(\eta) := \int\limits_{K(r)} I^t_{\eta,\varphi}(x)dx \xrightarrow[r\to+\infty]{\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}} J^t_{\varphi}(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^2$, $0 < t \le T$, де

$$J^t_{\varphi}(\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} I^t_{\eta,\varphi}(x)dx.$$

Для виконання умови 1) досить установити неперервність абстрактної матриці $I^t_{\eta,\varphi}(x)$ на множині $K(r)$ у сенсі топології простору $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$ при $\eta \in \mathbb{R}^2$, $t \in (0;T]$. Проте ця неперервність стає очевидною, якщо зважити на сильну диференційовніть стосовно змінної x матриці $G(t,x;0,\xi)$ у цьому просторі, а також на неперервність оператора перетворення Фур'є у просторах типу S.

Встановимо виконання умови 2). Враховуючи критерій збіжності у просторі $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$, необхідно переконатися у виконанні наступних умов:

I) $|J^t_{r,\varphi}(\zeta) - J^t_{\varphi}(\zeta)| \overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\underset{r\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$, $0 < t \le T$, для довільного компакта $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^2$;

II) обмеженість послідовності $J^t_{r,\varphi}(\cdot)$, $r \in \mathbb{N}$, у $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$ при кожних фіксованих $t \in (0;T]$.

Безпосередньо із структури (3) ФМРЗК G одержуємо, що

$$G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-2} F_{z\to\xi}[e^{-i(x,(z_1+(t-\tau)z_2;z_2))} \times$$

$$\times \Theta^t_\tau(z_1 + (t-\tau)z_2; z_2)], \ \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^2, 0 \le \tau < t \le T,$$

і, відтак приходимо до такого зображення матричної функції $I^t_{z,\varphi}(x)$:

$$I^t_{z,\varphi}(x) = e^{-i(x,(z_1+tz_2;z_2))}\varphi(x) \times$$

$$\times \Theta^t_0(z_1 + tz_2; z_2), \ \{x,z\} \in \mathbb{R}^2, 0 < t \le T.$$

Надалі користуватимемося цим зображенням, яке, між іншим, є зручним для аналітичного продовження за змінною z матричної функції $I^t_{z,\varphi}(x)$ у комплексний простір $\mathbb{C}^2$.

Оскільки $\varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$, то

$$\exists\{c,\delta\} \subset \mathbb{R}_+ \ \forall x \in \mathbb{R}^2 : \ |\varphi(x)| \le c\exp\big\{-\delta|x|_+^{1/\beta^*}\big\}.$$

Для кожної кулі $\bar{K}(\rho) := \{\zeta \in \mathbb{C}^2 |\ \|\zeta\| \le \rho\}$, $\rho > 0$, маємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^2} I^t_{\zeta,\varphi}(x)dx\Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)||e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|dx \times$$

$$\times |\Theta^t_0(\zeta_1 + t\zeta_2; \zeta_2)| \le$$

$$\le c \sup_{\zeta\in\bar{K}(\rho),\ x\in\mathbb{R}^2} \Big\{e^{-\frac{\delta}{2}|x|_+^{1/\beta^*}} |e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|\Big\} \times$$

$$\times \sup_{\zeta\in\bar{K}(\rho)} \Big\{|\Theta^t_0(\zeta_1 + t\zeta_2; \zeta_2)|\Big\} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\delta}{2}|x|_+^{1/\beta^*}} dx =$$

$$= c_1(t,\rho) < +\infty, \ 0 < t \le T, \ \zeta \in \bar{K}(\rho).$$

Отже, інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^2} I^t_{\zeta,\varphi}(x)dx$ збігається рівномірно щодо ζ на довільній кулі $\bar{K}(\rho)$ при кожному фіксованому $t \in (0;T]$. Звідси та з рівності

$$|J^t_{r,\varphi}(\zeta) - J^t_{\varphi}(\zeta)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus K(r)} I^t_{\zeta,\varphi}(x)dx\Big|,$$

дістаємо виконання умови I).

Умова II) теж виконується. Справді, для всіх $r>0,\ \zeta\in\mathbb{C}^2$ і $t\in(0;T]$ маємо

$$|J^t_{r,\varphi}(\zeta)|\leq\int\limits_{\mathbb{R}^2}|I^t_{\zeta,\varphi}(x)|dx\leq$$

$$\leq c\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-\delta|x|_+^{2b}}|e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|dx|\Theta^t_0(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2)|.$$

Безпосередньо з оцінки (4), для кожного фіксованого $t\in(0;T]$ одержуємо існування таких додатних сталих c_0, δ_+ і δ_-, з якими для всіх $\zeta\in\mathbb{C}^2$ виконується нерівність

$$|\Theta^t_0(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2)|\leq c_0e^{-\delta_-|\mathrm{Re}\zeta|_+^{2b}+\delta_+|\mathrm{Im}\zeta|_+^{2b}}.$$

Заваживши тепер на те, що

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^2,\ x\in\mathbb{R}^2}\left\{e^{-\delta(\|x\|+\|\zeta\|)^{2b}}|e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|\right\}<\infty$$

при кожному $\delta>0$ і $t\in(0;T]$, дістанемо оцінку

$$|J^t_{r,\varphi}(\zeta)|\leq ce^{-\delta_0|\mathrm{Re}\zeta|_+^{2b}+\delta_1|\mathrm{Im}\zeta|_+^{2b}},$$

$$r>0,\ \zeta\in\mathbb{C}^2,t\in(0;T],$$

в якій оціночні сталі залежать лише від t. Це й означає обмеженість послідовності $J^t_{r,\varphi}(\cdot),\ r\in\mathbb{N}$, у просторі $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ при кожному фіксованому $t\in(0;T]$.

Таким чином, встановлено рівність

$$\langle u(t;x),\varphi(x)E\rangle=\langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f],J^t_\varphi(\eta)\rangle,\qquad(5)$$

$$\varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*},\ (t;x)\in\Pi^2_{(0;T]},$$

з якої згідно з аналогом відповідного твердження леми 6 з [5] одержуємо

$$\langle u(t;x),\varphi(x)E\rangle\underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow}(2\pi)^2\langle F^{-1}[f](\eta),F^{-1}[\varphi](\eta)E\rangle=\langle f,\varphi E\rangle,$$

для довільних $\varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$.

Отже, виконання початкової умови (2) для зазначеної вектор функції $u(t;x)$ встановлено.

Доведемо далі єдиність розв'язку задачі Коші (1), (2). Скористаємося відомим способом Хольмгрена, належно пристосувавши його до даного випадку. Нагадаємо, що цей спосіб характеризується тим, що з існування розв'язку заданої системи рівнянь при довільних початкових даних з певного основного простору випливає єдиність розв'язку задачі Коші для відповідної спряженої системи рівнянь.

Розглянемо спряжену задачу Коші:

$$\big(-\partial_t+P^*(\partial_{x_1})\big)v_\tau(t;x)=0,\qquad(6)$$

$$(t;x)\in\Pi^2_{[0;\tau)},$$

$$v_\tau(t;\cdot)\xrightarrow[t\to\tau-0]{\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha_*}}\varphi(\cdot),\ \varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*},\qquad(7)$$

де $\tau\in(0;T]$, а $P^*(\partial_{x_1})$ — спряжений за Лагранжем з $P(\partial_{x_1}):=x_1\partial_{x_2}-\mathbb{A}(i\partial_{x_1})$ диференціальний вираз.

Оскільки $\varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$, то згідно з [3] класичний розв'язок системи (6) зображується рівністю

$$v_\tau(t;\cdot)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}G^*(t,\cdot;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ 0\leq t<\tau\leq T,$$

в якій G^* — відповідна ФМРЗК для системи (6).

Міркуючи як і у випадку задачі Коші (1), (2), дотримуючись при цьому схеми, запропонованої в [5], переконуємося у тому, що вектор функція $v_\tau(t;\cdot)$ є елементом простору $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ при всіх t і τ, $0\leq t<\tau\leq T$, яка задовольняє відповідну початкову умову (7).

Далі, означимо оператор $\Omega^t_\tau:\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}\to\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ рівністю

$$\Omega^t_\tau\varphi(\cdot):=v_\tau(t;\cdot),\ 0\leq t<\tau\leq T.$$

Він є лінійним, неперервним і таким, що для всіх $\varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$

$$\partial_t\Omega^t_\tau\varphi=P^*(\partial_{x_1})\Omega^t_\tau\varphi,\ \Omega^t_\tau\varphi\xrightarrow[t\to\tau-0]{\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}}\varphi.\qquad(8)$$

Розглянемо тепер розв'язок $u(t;\cdot)=\langle f,G(t,\cdot;0,\eta)\rangle$, $f\in(\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*})'$, задачі Коші (1), (2), який, очевидно, є елементом простору

$(\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*})'$. Для єдиності розв'язку цієї задачі Коші досить довести, що єдиним розв'язком системи (1) при нульовій початковій умові (2) може бути лише $u = 0$.

Застосуємо функціонал u до функції $\Omega_\tau^t \varphi$, де φ — довільний елемент з $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$, і розглянемо $\sum_\tau^t \varphi := \langle u, \Omega_\tau^t \varphi \rangle$. Диференціюючи $\sum_\tau^t \varphi$ за змінною t та використовуючи (1) і (8), одержимо [4, с.96]

$$\partial_t \sum_\tau^t \varphi = \langle \partial_t u, \Omega_\tau^t \varphi \rangle + \langle u, \partial_t \Omega_\tau^t \varphi \rangle =$$

$$= -\langle Pu, \Omega_\tau^t \varphi \rangle + \langle u, P^* \Omega_\tau^t \varphi \rangle =$$

$$= -\langle Pu, \Omega_\tau^t \varphi \rangle + \langle Pu, \Omega_\tau^t \varphi \rangle = 0, \ \varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*},$$

$$0 \le t < \tau \le T.$$

З останнього співвідношення випливає, що $\sum_\tau^t \varphi$ — стала величина. Якщо тепер врахувати початкову умову $u(t;\cdot) \mid_{t=0} = 0$, то матимемо, що для всіх $t \in [0;\tau)$ $\sum_\tau^t \varphi = 0$, $\varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$. Зокрема, при $t \to \tau - 0$, згідно (8) і тим, що елементи вектор-функції u — неперервні функціонали з $(S_{\alpha^*}^{\beta^*})'$, маємо $\sum_\tau^t \varphi = \langle u, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$. Таким чином, $u(t;\cdot) = 0$ для $t \in [0;\tau]$. Довільність вибору τ з $(0;T]$ забезпечує виконання останньої рівності для всіх $t \in [0;T]$.

Наостанок, переконаємось у неперервній залежності розв'язку задачі Коші (1), (2) від початкових даних. Для цього досить установити, що

$$\forall \{f;\ f_\nu,\ \nu \ge 1\} \subset (\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*})' : \quad f_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{(\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*})'} f,$$

відповідна послідовність розв'язків

$$u_\nu := \langle f_\nu, G \rangle \xrightarrow[\nu \to +\infty]{(\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*})'} \langle f, G \rangle =: u.$$

Проте цей факт стає очевидним, якщо зважити на рівність (5) та властивість неперервності оператора перетворення Фур'є у просторі $(\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*})'$.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kolmogoroff A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownishen Bewegungen)// Ann. Math. – 1934. – **35** – P.116-117.

2. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. 2004. – **152** – 390 p.

3. *Малицька Г.П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, N12. – C.1650-1663.

4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.:Физматгиз, 1958. – 307 с.

5. *Івасишен С.Д., Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, N8. – C.1066-1087.