

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО ТИПУ З СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Досліджуються лінійні та квазілінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірним еліптичним оператором (типу Лапласа-Леві). Для квазілінійного рівняння доведена теорема існування та єдиності розв'язку. Також проводиться паралель зі звичайними диференціальними рівняннями та алгебраїчними рівняннями.

We investigate linear and quasi-linear differential equations with essentially infinite-dimensional elliptic operator (of the Laplace-Lévy type). For a quasi-linear equation, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a solution. Also we obtain a parallel with ordinary differential equations and algebraic equations.

1. Суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори. В нескінченновимірному просторі існують оператори, які не мають скінченновимірних аналогів. Таким оператором, зокрема, є оператор Лапласа-Леві, введений П. Леві [1] в 1922 р., як узагальнення класичного оператора Лапласа. Для двічі диференційовних функцій на дійсному гільбертовому просторі l_2 оператор Лапласа-Леві задається формулою

$$(Lu)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

а для функцій на абстрактному дійсному нескінченновимірному сепарабельному гільбертовому просторі H

$$(Lu)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr} P_n u''(x),$$

де $\{e_i\}$ – ортонормований базис в H , P_n – ортопроектор на лінійну оболонку e_1, \dots, e_n , tr – слід оператора. Такий оператор є диференціальним оператором другого порядку, але він задовольняє лейбніцевську властивість $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ та приймає нульове значення на циліндричних функціях; останній факт дав підставу Г.Є. Шилову, редактору перекладу [1], назвати його суттєво нескінченновимірним. Сучасний стан теорії оператора Лапласа-Леві викладено в монографії М.Н. Феллера [2].

В 1977 р. Ю.В. Богданським [3] (див. також [4–5]) запропонований суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор, який узагальнює оператор Лапласа-Леві та успадковує його специфічні властивості. Такий оператор (точніше, диференціальний вираз) задається формулою

$$(Lu)(x) = j(u''(x)), \quad (1)$$

де j є невід'ємним ненульовим функціоналом на $B_C(H)$, ядру якого належать всі оператори скінченного рангу. Відповідний функціонал згідно з роботою [3] також називаємо суттєво нескінченновимірним (за іншою термінологією – сингулярним).

Множину $D \subset B_C(H)$ називаємо майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$ та $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d} \in \varepsilon$ -сіткою для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ – множина операторів, ранг яких не перевищує n , а норма не перевищує d).

Нехай $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leq R\}$ – фіксована куля радіуса R . Через Z позначимо множину дійсних функцій класу $C^2(H)$, носії яких належать кулі B_R , $u''(\cdot)$ є рівномірно неперервною на H , а множина $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ є майже компактною. Нехай X – замикання Z в просторі $C^b(H)$ (тут $C^b(H)$ – банахів простір неперервних обмежених функцій на H з нормою $\sup_{x \in H} |u(x)|$). X є дійсною комутативною банаховою алгеброю

відносно поточкових операцій з \sup -нормою. З $u \in Z$ випливає $Lu \in X$; суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор L коректно визначений на Z формулою (1). Він допускає замикання \bar{L} , яке породжує (C_0) -півгрупу стиску $T(t)$ в X [4–5]. Ця півгрупа є мультиплікативною ($\forall u, v \in X, \forall t \geq 0: T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$) та нільпотентною ($\exists t_0 > 0: T(t_0) = 0$). Для функції $g \in C^1(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0$, має місце властивість

$$\bar{L}(g \circ u) = (g' \circ u) \cdot \bar{L}u. \quad (2)$$

Ймовірнісні властивості оператора Лапласа-Леві досліджувались М.Й. Ядренком, М.Н. Феллером і школою Т. Хіди. С.В. Кошкіним вивчалися ймовірнісні аспекти характеристик Леві з точки зору випадкових процесів та зв'язок з теорією білого шуму та статистичною механікою (1998–1999 рр.). Зацікавленість оператором Лапласа-Леві на даний час в значній мірі обумовлена роботами Л. Аккарді, П. Гібліско, І.В. Воловича (1992, 1994 рр.), а також Р. Леандра, І.В. Воловича (2001 р.), у яких виявлено зв'язок між гармонічними за Леві функціями та розв'язками рівнянь Янга-Міллса. Детальна бібліографія наведена в [2]. Також зауважимо, що існує паралель між диференціальними рівняннями з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами та класичною теорією звичайних диференціальних рівнянь (див. [6–8]); для рівнянь з оператором типу Лапласа-Леві така паралель відслідковувалась Є.М. Поліщуком, Г.Є. Шиловим та В.Я. Сикирявим.

2. Диференціальні рівняння лінійного типу. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вищого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$(\bar{L}^n u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^{n-1}u)(x) + \dots + a_n(x)u(x) = f(x). \quad (3)$$

Має місце наступна теорема, доведена в [6].

Теорема 1. *Нехай $a_1, \dots, a_n, f \in X$. Тоді рівняння (3) має і до того ж єдиний розв'язок.*

В інших функціональних просторах рівняння виду (3) з оператором Лапласа-

Леві та його модифікаціями досліджувалось Є.М. Поліщуком, Г.Є. Шиловим та В.Я. Сикирявим, а полігармонічне рівняння – М.Н. Феллером.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння

$$(\bar{L}^n u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^{n-1}u)(x) + \dots + a_n(x)u(x) = f(x, u(x)), \quad (4)$$

де $a_1, \dots, a_n \in X$ – змінні коефіцієнти.

Теорема 2. *Нехай функція $f: H \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має наступні властивості:*

а) для будь-якого $p \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, p) \in X$,

б) f задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом рівномірно відносно першого: існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $x \in H, p, q \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|f(x, p) - f(x, q)| \leq C|p - q|$.

Тоді рівняння (4) має і до того ж єдиний розв'язок.

Доведення. Виберемо в \mathbb{R}^n норму $\|\vec{y}\| = |y^1| + \dots + |y^n|$ ($\vec{y} \in \mathbb{R}^n$). Має місце наступний варіант теореми Пікара для системи диференціальних рівнянь з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами [8, теорема 2].

Теорема 3. *Нехай $i = 1, \dots, n; j_1, \dots, j_n$ – суттєво нескінченновимірні функціонали; $(L_i u)(x) = j_i(u''(x))$ – відповідні їм суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори; функція $\vec{g} = (g^1, \dots, g^n): H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має наступні властивості:*

а) для будь-якого $\vec{p} \in \mathbb{R}^n, g^i(\cdot, \vec{p}) \in X$,

б) \vec{g} задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом рівномірно відносно першого: існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $x \in H, \vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність $\|\vec{g}(x, \vec{p}) - \vec{g}(x, \vec{q})\| \leq C\|\vec{p} - \vec{q}\|$.

Тоді система рівнянь

$$(\bar{L}_i u_i)(x) = g^i(x, u_1(x), \dots, u_n(x)), \quad (5)$$

де $i = 1, \dots, n$, має і до того ж єдиний розв'язок.

Якщо в теоремі 3 умову а) замінити на умову а') для будь-яких $u_i \in X$ функції $g^i(\cdot, u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$ належать X , то теорема 3 також має місце (детальніше див. [8]).

Продовжимо доведення теореми 2. Заміною змінних $v_1 = u \in X, v_2 = \bar{L}u \in$

$X, \dots, v_n = \bar{L}^{n-1}u \in X$ рівняння (4) зводиться до системи виду (5):

$$\begin{aligned} (\bar{L}v_1)(x) &= v_2(x), \\ &\dots \\ (\bar{L}v_{n-1})(x) &= v_n(x), \\ (\bar{L}v_n)(x) &= f(x, v_1(x)) - a_n(x)v_1(x) - \dots - \\ &\quad - a_1(x)v_n(x). \end{aligned}$$

Виберемо функцію $\vec{g}: H \times \mathbb{R}^n \ni (x, \vec{p}) \mapsto (p^2, \dots, p^n, f(x, p^1) - a_n(x)p^1 - \dots - a_1(x)p^n) \in \mathbb{R}^n$. Перевіримо умови а') та б) теореми 3. Умова а') теореми 3 випливає з того, що за умов а)-б) теореми 2 з $u \in X$ випливає $f(\cdot, u(\cdot)) \in X$ (див. [7]), а X є алгеброю. Умова б) теореми 3 випливає з нерівності

$$\begin{aligned} \|\vec{g}(x, \vec{p}) - \vec{g}(x, \vec{q})\| &= \\ &= \sum_{k=1}^n |g^k(x, \vec{p}) - g^k(x, \vec{q})| = \sum_{k=2}^n |p^k - q^k| + \\ &\quad + |(f(x, p^1) - a_n(x)p^1 - \dots - a_1(x)p^n) - \\ &\quad - (f(x, q^1) - a_n(x)q^1 - \dots - a_1(x)q^n)| \leq \\ &\leq \max(1 + \|a_1\|, \dots, 1 + \|a_{n-1}\|, C + \|a_n\|) \times \\ &\quad \times \|\vec{p} - \vec{q}\| \quad (\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Посилання на теорему 3 з умовами а') та б) завершує доведення теореми.

3. Приклади. Спочатку нагадаємо два відомі факти. В алгебраїчному рівнянні $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = f$, де $a_1, \dots, a_n, f \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, заміна $x = y - \frac{a_1}{n}$ приводить до того, що в отриманому рівнянні коефіцієнт при y^{n-1} виявиться нульовим. Якщо у звичайному лінійному диференціальному рівнянні

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + \\ + a_{n-1}(x)u'(x) + a_n(x)u(x) = f(x), \end{aligned}$$

де a_1, \dots, a_n, f – неперервні на деякому відрізку функції, зробити заміну $u(x) = v(x) \exp\left(-\frac{1}{n} \int a_1(x) dx\right)$, то в отриманому рівнянні коефіцієнт при $u^{(n-1)}(\cdot)$ також стане нульовим. Наведемо аналоги вказаних фактів для суттєво нескінченновимірних рівнянь другого та третього порядку.

Приклад 1. Доведемо, що для рівняння

$$\begin{aligned} (\bar{L}^2u)(x) + a_1(x)(\bar{L}u)(x) + \\ + a_2(x)u(x) = f(x), \end{aligned} \quad (6)$$

де a_1 задовольняє додаткову умову $a_1 \in D(\bar{L})$, а $a_2, f \in X$, заміна

$$u(x) = v(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt\right) \quad (7)$$

перетворює рівняння (6) на таке, що не містить $\bar{L}v$.

Другий множник у правій частині формули (7) не належить X , оскільки за межами кулі B_R дорівнює одиниці, а тому має необмежений носій. Запишемо (7) у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) &= v(x) + \\ &+ v(x) \left(\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Врахуємо лейбніцевську властивість оператора \bar{L} , властивість (2) та нільпотентність півгрупи $T(t)$:

$$\begin{aligned} (\bar{L}u)(x) &= (\bar{L}v)(x) + \\ &+ (\bar{L}v)(x) \left(\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt\right) - 1 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} v(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt\right) \times \\ &\quad \times \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} (T(t)a_1)(x) dt = \\ &= \left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2} a_1(x)v(x) \right) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Формулу (8) застосуємо рекурсивно до себе:

$$\begin{aligned} (\bar{L}^2u)(x) &= \left(\bar{L} \left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2} a_1(x)v(x) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} a_1(x) \left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2} a_1(x)v(x) \right) \right) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt\right) = \left((\bar{L}^2v)(x) - \right. \\ &\quad \left. - a_1(x)(\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2} (\bar{L}a_1)(x)v(x) + \frac{1}{4} a_1^2(x) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times v(x) \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt \right). \quad (9)$$

$$\times (\bar{L}a_1)(x) - \frac{1}{3}(\bar{L}^2a_1)(x) - \frac{1}{27}a_1^3(x) \Big) v(x) \Big) \times$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt \right).$$

Підстановка формул (7)-(9) у рівняння (6) та наступне спрощення приводять до рівняння:

$$(\bar{L}^2v)(x) + \left(a_2(x) - \frac{1}{2}(\bar{L}a_1)(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) \right) \times$$

$$\times v(x) = f(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt \right).$$

Підкреслимо, що наведені перетворення можливі лише за умови $a_1 \in D(\bar{L})$.

Приклад 2. Доведемо, що для рівняння

$$(\bar{L}^3u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^2u)(x) + a_2(x)(\bar{L}u)(x) +$$

$$+ a_3(x)u(x) = f(x), \quad (10)$$

де a_1 задовольняє додаткову умову $a_1 \in D(\bar{L}^2)$, а $a_2, a_3, f \in X$, заміна

$$u(x) = v(x) \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt \right)$$

перетворює рівняння (10) на таке, що не містить \bar{L}^2v .

Аналогічними міркуваннями отримуємо:

$$(\bar{L}u)(x) = \left((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{3}a_1(x)v(x) \right) \times$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt \right);$$

$$(\bar{L}^2u)(x) = \left((\bar{L}^2v)(x) - \frac{2}{3}a_1(x)(\bar{L}v)(x) -$$

$$- \frac{1}{3}(\bar{L}a_1)(x)v(x) + \frac{1}{9}a_1^2(x)v(x) \right) \times$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^{t_0} (T(t)a_1)(x) dt \right);$$

$$(\bar{L}^3u)(x) = \left((\bar{L}^3v)(x) - a_1(x)(\bar{L}^2v)(x) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3}a_1^2(x) - (\bar{L}a_1)(x) \right) (\bar{L}v)(x) + \left(\frac{1}{3}a_1(x) \times$$

Підстановка наведених формул у рівняння (10) та наступне спрощення приводять до рівняння, що не містить \bar{L}^2v .

Викладені в роботі результати були представлені на Всеукраїнській науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Леву П.* Конкретные проблемы функционального анализа. — М.: Наука, 1967. — 512 с.
2. *Feller M.N.* The Lévy Laplacian. — Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. — 153 p.
3. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. — 1977. — **29**, №6. — С. 781—784.
4. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №5. — С. 584—590.
5. *Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L.* Cauchy problem for the simplest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator // Suppl. to chapters IV, V in book: *Dalecky Yu.L., Fomin S.V.* Measures and differential equations in infinite-dimensional space. — Amsterdam—New York: Kluwer Acad. Publ., 1991. — P. 309—322.
6. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2008. — №2. — С. 144—147.
7. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Нелінійні рівняння з суттєво нескінченновимірними диференціальними операторами // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №11. — С. 1571—1576.
8. *Статкевич В.М.* Системи суттєво нескінченновимірних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, №9. — С. 1257—1262.
9. *Статкевич В.М.* Суттєво нескінченновимірні диференціальні рівняння лінійного типу // Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", Чернівці, 11—13 червня 2012 р. — С. 99.