УДК 517.929.7

©2013 р. Я.Й. Бігун, І.В. Краснокутська

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ НА ОСІ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджується існування розв'язку та дається обґрунтування методу усереднення за швидкими змінними на осі для багаточастотних систем диференціальних рівнянь із сталим запізненням. Встановлено розв'язність однієї крайової задачі на скінченному проміжку та одержано для неї оцінку похибки методу усереднення.

We study the existence of a solution and justify the averaging method on fast variables on the axis for multifrequency systems of differential equations with constant delay. We also establish the solvability of a boundary value problem for finite interval and obtain an error estimate of the averaging method for this problem.

Вступ. Метод усереднення за швидкими змінними для двочастотної системи рівнянь обґрунтований на скінченному, але асимптотично великому проміжку часу в роботі В.І. Арнольда [1]. Різні підходи з дослідження багаточастотних систем асимптотичними методами запропоновано в працях Є.О. Гребенікова [2], М.М. Хапаєва [3], В.І. Нейштадта [4] та ін.

Новий напрямок із дослідження багаточастотних систем методом усереднення закладений А.М. Самойленком у праці [5] і ґрунтується на оцінці осциляційних інтегралів. Результати дослідження багаточастотних систем із початковими та крайовими умовами наведені у монографії А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [6]. Зокрема, обґрунтовано метод усереднення на півосі R_+ за умови рівномірної асимптотичної стійкості повільних змінних усередненої системи [7]. Багаточастотні системи на R_+ досліджувались також М.М. Хапаєвим [3].

Одно- і багаточастотні системи із запізненням методом усереднення розглядались в працях Я.Й. Бігуна [8], І.М. Данилюка [9], І.В. Березовської [10] та ін.

Важливою також є задача дослідження як стійкості [11], так і обґрунтування методу усереднення на всій осі. Результат для багаточастотних систем звичайних диференціальних рівнянь з повільно змінними частотами одержано в праці А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [12]. У даній роботі метод усереднення застосовується для дослідження на осі m-частотної системи рівнянь із сталим запізненням.

1. Технічна лема. Доведемо інтегральну нерівність для функції із сталим запізненням, скориставшись методикою [13].

Лема 1. *Нехай невід'ємна кусково-неперервна функція $v(t)$ при $t \geq t_0$ задовольняє інтегральну нерівність*

$$v(t) \leq c + \sum_{i=0}^{r} a_i \int_{t_0}^{t} v(s-\Delta_i)ds, \qquad (1)$$

де c, a_i – деякі невід'ємні сталі, $i = 0, \ldots, r$, $0 \leq \Delta_0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_r$. Далі, нехай

$$v(t) \leq c, \qquad t_0 - \Delta_r \leq t \leq t_0. \qquad (2)$$

Тоді, при $t_0 \leq t < \infty$

$$v(t) \leq ce^{\delta(t-t_0)}, \qquad (3)$$

де δ – додатний корінь рівняння

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} a_i e^{-\delta\Delta_i}. \qquad (4)$$

Доведення. Нехай $w(t) = ce^{\delta(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. Врахувавши (4) нескладно перевірити, що функція $w(t)$ задовольняє рівняння

$$w(t) = c + \sum_{i=0}^{r} a_i \int_{t_0}^{t} w(s-\Delta_i)ds. \qquad (5)$$

Розглянемо функцію $u(t)=w(t)-v(t)$. З нерівностей (1) і (5) випливає, що при $t\geq t_0$

$$u(t)\geq\sum_{i=0}^{r}a_i\int\limits_{t_0}^{t}u(s-\Delta_i)ds.$$

Покажемо, що $u(t)\geq 0$ при $t_0\leq t<\infty$. Справді, при $t_0-\Delta_r\leq t\leq t_0$ виконується нерівність (2), тому на цьому проміжку $u(t)\geq 0$.

Нехай $p(t)=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i\int\limits_{t_0}^{t}u(s-\Delta_i)ds$. З попередньої нерівності отримуємо, що $p(t)\geq 0$ при $t_0\leq t\leq t_0+\Delta_1$. Застосовуючи узагальнення нерівності Гроноулла-Беллмана [14] маємо:

$$u(t)\geq p(t)+a_0\int\limits_{t_0}^{t}p(s)e^{a_0(t-s)}ds.$$

Така ж нерівність виконується для наступних відрізків, які визначаються в методі кроків та залежать від співвідношення Δ_1, $\ldots,\Delta_r$ і в об'єднанні складають $[0,\Delta_r]$. Тому $u(t)\geq 0$ при $t_0\leq t\leq t_0+\Delta_r$. Користуючись методом математичної індукції, отримаємо, що $u(t)\geq 0$ при $t_0\geq t<\infty$. Звідси випливає, що $v(t)\leq w(t)$, тобто умова (3) виконується. Лему доведено.

Наслідок 1. При відсутності запізнень $(r=0)$ із леми одержимо нерівність Гроноулла-Беллмана [14], а при $a_0=0$ і $r=1$ – лему, доведену в роботі [13].

2. Оцінка похідних за початковими умовами в багаточастотній системі. Розглянемо систему з m $(m\geq 1)$ повільно змінними частотами вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=A(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon),\\ \frac{d\varphi}{d\tau}&=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+B(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varepsilon),\end{aligned}\qquad(6)$$

де $\tau\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $\varphi\in\mathbb{R}^m$; $x_\Delta(\tau,\varepsilon)=x(\tau-\varepsilon\Delta,\varepsilon)$, $\varphi_\Delta(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau-\varepsilon\Delta,\varepsilon)$, Δ – додатна стала, яка характеризує запізнення. Вектор-функції A і B 2π-періодичні по кожній з компонент φ_ν, $\varphi_{\Delta\nu}$, $\nu=1,\ldots,m$. Особливістю системи (6) є те, що вектор-функція B не залежить від запізнення в швидких змінних.

Відповідна усереднена система набуває вигляду

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{x}}{d\tau}&=\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon),\\ \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau}&=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+B_0(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon),\end{aligned}\qquad(7)$$

де усереднення здійснено за швидкими змінними φ і φ_Δ з урахуванням гармонік, для яких виконується умова резонансу частот

$$\gamma_{kl}(\tau):=(k,\omega(\tau))+(l,\omega(\tau-\varepsilon\Delta))\approx 0,\ \ k,l\in\mathbb{Z}^m,$$

$k+l=0$ i $\tau\in[0,L]$,

$$\overline{A}(\tau,x,x_\Delta,\varepsilon)=\sum_{k+l=0}A_{kl}(\tau,x,x_\Delta,\varepsilon)e^{-i(k,\omega(\tau))\Delta},$$

$$B_0(\tau,x,x_\Delta,\varepsilon)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}B(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varepsilon)d\varphi.$$

Нехай виконуються умови:

1) при $(\tau,\varepsilon)\in[-\varepsilon\Delta,0]\times(0,\varepsilon_0]$ для початкових функцій $x^0(\tau,\varepsilon)$ і $\overline{x}^0(\tau,\varepsilon)$ та $\varphi^0(\tau,\varepsilon)$ і $\overline{\varphi}^0(\tau,\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\|x^0(\tau,\varepsilon)-\overline{x}^0(\tau,\varepsilon)\|+\|\varphi^0(\tau,\varepsilon)-\overline{\varphi}^0(\tau,\varepsilon)\|\leq c_0\varepsilon^{\alpha_1},$$

$c_0>0,\quad \alpha_1\geq\alpha=m^{-1}$;

2) в області $G=[0,L]\times D\times D\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times$ $\times[0,\varepsilon_0]$ $F\in C^{d_1}_{\tau,x,x_\Delta,\varepsilon}$ і $F\in C^{d_2}_{\varphi,\varphi_\Delta}$, де $F:=$ $:=[A,B]$, $d_1\geq 1$, $d_2\geq 2m+2$, вектор-функція F та її частинні похідні обмежені в G сталою σ_1;

3) $\omega_\nu\in C^m[0,L]$ і визначник Вронського $V(\tau)$, побудований за системою функцій $\{\omega_1(\tau),\ldots,\omega_m(\tau)\}$, відмінний від нуля при $\tau\in[0,L]$.

При виконанні цих умов, як показано в роботі [8],

$$\begin{aligned}&\|x(\tau,x^0,\varphi^0\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{x}^0,\varepsilon)\|+\\ &+\|\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{x}^0,\overline{\varphi}^0,\varepsilon)\|\leq c_1\varepsilon^\alpha,\end{aligned}\qquad(8)$$

де стала $c_1>0$ і не залежить від ε.

Введемо позначення $y(\varepsilon)=x(0,x^0,\varphi^0,\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)=\varphi(0,x^0,\varphi^0,\varepsilon)$ й аналогічні позначення для початкових умов розв'язків усередненої системи.

Покажемо, що для похідної за початковими умовами ψ відхилення розв'язків систем рівнянь (6) і (7) виконується оцінка, аналогічна (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1)–3) і при* $q = 1$

$$\sum_{\|k\|\neq 0}\left(\|k\|^q\left[\sup_{G_1}\|B_k\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial B_k}{\partial \tau}\right\| + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial B_k}{\partial x}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial B_k}{\partial x_\Delta}\right\|\right)\right]\right) \leq \sigma_2, \qquad (9)$$

$$\sum_{1\leq\|k\|+\|l\|\leq N}\left[(\|k\| + \|l\|)\sup_{G_1}\|A_{kl}\| + \right.$$

$$+ \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau}\right\| + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\| +$$

$$\left. + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_\Delta}\right\|\right] \leq \sigma_2,$$

де $G_1 = [0, L] \times D \times D \times [0, \varepsilon_0]$.

Тоді існує $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ *таке, що для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_1]$ *правильною є оцінка*

$$\left\|\frac{\partial(x - \overline{x})}{\partial \psi}\right\| + \left\|\frac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial \psi}\right\| \leq c_2\varepsilon^\alpha. \qquad (10)$$

Доведення. Із систем рівнянь (6) і (7) одержимо

$$\frac{\partial(x - \overline{x})}{\partial \psi} = \int_0^\tau \Big[\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial(x - \overline{x})}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{\partial A}{\partial x_\Delta}\frac{\partial(x_\Delta - \overline{x}_\Delta)}{\partial \psi} + \frac{\partial A}{\partial \varphi}\frac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{\partial A}{\partial \varphi_\Delta}\frac{\partial(\varphi_\Delta - \overline{\varphi}_\Delta)}{\partial \psi} + \frac{\partial(\tilde{A}_N + R_N)}{\partial \varphi}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{\partial(\tilde{A}_N + R_N)}{\partial \varphi_\Delta}\frac{\partial \overline{\varphi}_\Delta}{\partial \psi}\Big]ds,$$

$$\frac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial \psi} = \int_0^\tau \Big[\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial(x - \overline{x})}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{\partial B}{\partial x_\Delta}\frac{\partial(x_\Delta - \overline{x}_\Delta)}{\partial \psi} + \frac{\partial B}{\partial \varphi}\frac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial \psi} +$$

$$+ \frac{\partial B}{\partial \varphi}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \psi}\Big]ds,$$

де $\tilde{A}_N = \sum\limits_{1\leq\|k\|+\|l\|\leq N} A_{kl}(\tau, x, x_\Delta, \varepsilon) \times$
$\times \exp\big\{i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\Delta)\big\}$,
$R_N = \sum\limits_{\|k\|+\|l\|>N} A_{kl}(\tau, x, x_\Delta, \varepsilon) \times$
$\times \exp\big\{i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\Delta)\big\}$,
ціле N буде визначено нижче.

Із другого з рівнянь (7) випливає, що

$$\left\|\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \psi}\right\| = \left\|\frac{\partial \overline{\varphi}_\Delta}{\partial \psi}\right\| = 1.$$

Нехай $\eta(\tau, y, \psi, \varepsilon) :=$
$:= \left\|\dfrac{\partial(x - \overline{x})}{\partial \psi}\right\| + \left\|\dfrac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial \psi}\right\|$. Тоді

$$\eta(\tau, y, \psi, \varepsilon) \leq 2\sigma_1\int_0^\tau \big(\eta(s, y, \psi, \varepsilon) +$$

$$+ \eta(s - \varepsilon\Delta, y, \psi, \varepsilon)\big)ds +$$

$$+ \sum_{1\leq\|k\|+\|l\|\leq N}\left\|\int_0^\tau A_{kl}(s, x, x_\Delta, \varepsilon)(k + l) \times\right.$$

$$\left. \times \exp\big\{i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\Delta)\big\}ds\right\| + \qquad (11)$$

$$+ \sum_{\|k\|+\|l\|>N}\int_0^\tau \|A_{kl}(s, x, x_\Delta, \varepsilon)\|(\|k\| + \|l\|)ds +$$

$$+ \sum_{\|k\|\neq 0}\int_0^\tau \|B_k(s, x, x_\Delta, \varepsilon)k\exp\big\{i(k, \varphi)\big\}\|ds.$$

Через S_ν, $\nu = 1, 2, 3$ позначимо відповідно три останні доданки у правій частині нерівності (11).

Для оцінки S_1 застосуємо оцінку осциляційного інтеграла [15]

$$\left\|\int_0^\tau b_{kl}(s, \varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(z)dz\right\}ds\right\| \leq \sigma_3\varepsilon^\alpha \times$$

$$\times\left(\sup_{G_2}\|b_{kl}(\tau, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|k + l\|}\sup_{G_2}\left\|\frac{db_{kl}(\tau, \varepsilon)}{d\tau}\right\|\right),$$

де $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, $G_2 = [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$, $\sigma_3 > 0$ і не залежить від k, l, τ і ε,
$b_{kl}(\tau, \varepsilon) = A_{kl}(\tau, x, x_\Delta, \varepsilon)(k + l) \times$

$$\times \exp\left\{i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\Delta) - \frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \gamma_{kl}(z)dz\right\}.$$

Отримаємо: $S_1 \leq (1 + \sigma_1)\sigma_2\sigma_3\varepsilon^\alpha$.

Умови 2) гладкості функції A забезпечують виконання нерівностей в області G_1

$$\sum_{\|p\|>N}\|A_p(s, x, x_\Delta, \varepsilon)\|(\|k\| + \|l\|) \leq$$

$$\leq \sum_{\|p\|>N} \sigma_1 (2m)^{d_2} \|p\|^{1-d_2} \leq \sigma_1 2^{2m+d_2} m^{d_2} \times$$

$$\times \sum_{r=N+1}^{\infty} r^{2m-d_2} \leq \sigma_1 2^{2m+d_2} m^{d_2} \int\limits_N^{\infty} z^{2m-d_2} dz =$$

$$= \frac{\sigma_1 2^{2m+d_2} m^{d_2}}{d_2 - 2m + 1} N^{2m-d_2+1},$$

де p =col$[k,l]$. При доведенні ми скористались тим, що кількість $2m$-вимірних векторів із цілочисельними координатами, норма яких дорівнює r, не перевищує $2^{2m} r^{2m-1}$.

Якщо $N \geq \varepsilon^{\alpha/(2m-d_2+1)}$, то $S_2 \leq c_3 L \varepsilon^{\alpha}$, $c_3 = \dfrac{2^{2m+d_2} m^{d_2} \sigma_1}{d_2 - 2m + 1}$.

Нерівність $S_3 \leq (1+\sigma_1)\sigma_2\sigma_3\varepsilon^{\alpha}$ отримаємо з оцінки осциляційного інтеграла [6]:

$$\left\| \int\limits_0^{\tau} f_k(s,\varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{s} (k, \omega(z)) dz \right\} ds \right\| \leq \sigma_3 \varepsilon^{\alpha} \times$$

$$\times \left(\sup_{G_2} \|f_k(\tau,\varepsilon)\| + \frac{1}{\|k\|} \sup_{G_2} \left\| \frac{df_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau} \right\| \right),$$

де $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$, $f_k(\tau,\varepsilon) = B_k(\tau, x, x_{\Delta}, \varepsilon) k \times$ $\times \exp\left\{ i(k,\varphi) - \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^{\tau} (k, \omega(z)) dz \right\}$.

Отже,

$$\eta(\tau, y, \psi, \varepsilon) \leq (c_3 L + 2(1+\sigma_1)\sigma_2\sigma_3)\varepsilon^{\alpha} +$$

$$+ 2\sigma_1 \int\limits_0^{\tau} (\eta(s, y, \psi, \varepsilon) + \eta(s - \varepsilon\Delta, y, \psi, \varepsilon)) ds,$$

при $0 \leq \tau \leq L$, $y \in D$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Користуючись лемою 1, одержимо оцінку (10), де $c_2 = e^{\delta L} \max(c_0, c_3 L + 2(1+\sigma_1)\sigma_2\sigma_3)$, δ – додатний корінь рівняння $\delta = 2\sigma_1(1+$ $+e^{-\delta\varepsilon\Delta})$.

Аналогічна оцінка правильна і для похідної по y, надалі вважатимемо, що з тим же коефіцієнтом c_2.

3. Крайова задача. Задамо для системи рівнянь (6) крайові умови:

$$\begin{aligned} &x(\tau,\varepsilon) = x^0(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon) = \varphi^0(\tau,\varepsilon), \\ &\tau \in [-\varepsilon\Delta, 0]; \end{aligned} \tag{12}$$

$$P\varphi|_{\tau=0} + Q\varphi|_{\tau=L} = f(x|_{\tau=0}, x|_{\tau=L}, \varepsilon), \tag{13}$$

де P і Q – задані матриці порядку m, вектор-функція f визначена в області $D \times D \times (0, \varepsilon_1]$.

Обґрунтуємо метод усереднення для крайової задачі (6), (12), (13), якщо крайові умови для усередненої системи (7) мають вигляд (12), (13).

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконуються умови 1)–3) пункту 2 і при $q = 0$ виконується нерівність (9)*;*

2) для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ існує єдиний розв'язок $\left\{ \overline{x}(\tau, \overline{x}^0, \varepsilon), \overline{\varphi}(\tau, \overline{x}^0, \overline{\psi}, \varepsilon) \right\}$ усередненої задачі (7)*, компонента якого $\overline{x}$ лежить в D разом з ρ-околом;*

3) в області $D \times D \times (0, \varepsilon_1]$ функції $f_{\nu} =$ $= f_{\nu}(u, v, \varepsilon)$, $\nu = 1, \ldots, m$, двічі неперервно диференційовні за u, v і один раз за ε та обмежені разом з першими і другими похідними сталою σ_4;

4) $det(P + Q) \neq 0$.

Тоді існує $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_1]$ і стала $c_4 > 0$ такі, що $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ існує єдиний розв'язок задачі (6), (12), (13) *і $\forall (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_3]$ правильна оцінка*

$$\begin{aligned} &\|x(\tau, x^0, \varphi_0, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{x}^0, \varepsilon)\| + \\ &+ \|\varphi(\tau, x^0, \overline{\varphi}_0, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{x}^0, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_4 \varepsilon^{\alpha}. \end{aligned} \tag{14}$$

Доведення. Знайдемо $\xi = \xi(x^0, \varepsilon)$ таке, щоб для $\psi = \overline{\psi} + \xi$ розв'язок $\left\{ x(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon), \varphi(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) \right\}$ задовольняв умову (13).

Із другого з рівнянь (7) випливає, що

$$\|\overline{\varphi}(\tau, x^0, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{x}^0, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq \|\xi\| +$$

$$+ \int\limits_0^{\tau} \left(\sup_{G_2} \left\| \frac{\partial B_0}{\partial \overline{x}} \right\| \|\overline{x}(s, x^0, \varepsilon) - \overline{x}(s, \overline{x}^0, \varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial B_0}{\partial \overline{x}_{\Delta}} \right\| \|\overline{x}_{\Delta}(s, x^0, \varepsilon) - \overline{x}_{\Delta}(s, \overline{x}^0, \varepsilon)\| \right) ds \leq$$

$$\leq \|\xi\| + 2c_0\sigma_1\varepsilon^{\alpha} \int\limits_0^{L} e^{2\sigma_1\tau} d\tau \leq$$

$$\leq \|\xi\| + c_0(e^{2\sigma_1 L} - 1)\varepsilon^{\alpha} = \|\xi\| + c_5\varepsilon^{\alpha},$$

де $c_5 = c_0(e^{2\sigma_1 L} - 1)$, $G_2 = [0, L] \times D \times D \times$ $\times (0, \varepsilon_0]$.

Нехай $\|\xi\| \leq c_6 \varepsilon^{\alpha}$, де c_6 буде визначено нижче.

Підставивши $\{x(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon),\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\}$ в умову (13) одержимо для ξ рівняння

$$\xi=-(P+Q)^{-1}\Big\{Q\int\limits_0^L\Big[B(s,x,x_\Delta,\varphi,\varepsilon)-$$
$$-B_0(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)\Big]ds+\frac{\partial f(\overline{u},\overline{v},\varepsilon)}{\partial u}(u-\overline{u})+$$
$$+\frac{\partial f(\overline{u},\overline{v},\varepsilon)}{\partial v}(v-\overline{v})+R_2(u,v,\varepsilon)\Big\}=:\Phi(\xi,\varepsilon),$$

де $u=x(0,y,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$, $v=x(L,y,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$ й аналогічні позначення для $\overline{u}$ та $\overline{v}$.

Вектор-функцію Φ запишемо у вигляді $\Phi(\xi,\varepsilon)=-(P+Q)^{-1}\times$

$$\times\Big\{Q\int\limits_0^L\Big[\frac{\partial B(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial x}(x-\overline{x})+$$
$$+\frac{\partial B(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial x}(x_\Delta-\overline{x}_\Delta)+$$
$$+\frac{\partial B(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial \varphi}(\varphi-\overline{\varphi})+\tilde{B}(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)+$$
$$+R_1(x-\overline{x},x_\Delta-\overline{x}_\Delta,\varphi-\overline{\varphi},\varepsilon)\Big]ds+$$
$$+\frac{\partial f(\overline{u},\overline{v},\varepsilon)}{\partial u}(u-\overline{u})+\frac{\partial f(\overline{u},\overline{v},\varepsilon)}{\partial v}(v-\overline{v})+$$
$$+R_2(u-\overline{u},v-\overline{v},\varepsilon)\Big\}.$$

Враховуючи оцінку (8), одержимо, що $\|R_1\|$ і $\|R_2\|$ обмежені величиною $c_7\varepsilon^{2\alpha}$, $c_7>0$. Тоді $\|\Phi\|\le\|(P+Q)^{-1}\|\Big\{\|Q\|\Big[3L\sigma_1c_1+(1+\sigma_1)\sigma_2\sigma_3\Big]+2\sigma_4c_1+c_7(1+L\|Q\|)\varepsilon^\alpha)\Big\}\varepsilon^\alpha$ при $\varepsilon\le c_1L/(c_0\Delta)$.

Нехай $\varepsilon_2=\min\Big\{\varepsilon_1,\dfrac{c_1L}{c_0\Delta},\Big(\dfrac{\sigma_4c_1}{c_7(1+L\|Q\|)}\Big)^m\Big\}$.

Тоді $\|\Phi\|\le\|(P+Q)^{-1}\|\Big\{\|Q\|\Big[3L\sigma_1c_1+(1+\sigma_1)\sigma_2\sigma_3\Big]+3\sigma_4c_1\Big\}\varepsilon^\alpha=c_6\varepsilon^\alpha$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ і $\xi\in S$, де $S=\{\xi:\|\xi\|\le c_6\varepsilon^\alpha\}$. Отже, $\Phi:S(\xi)\to S(\xi)$ для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$. Далі маємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=-(P+Q)^{-1}\times$$
$$\times\Big\{Q\int\limits_0^L\Big[\frac{\partial B(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial x}\frac{\partial(x-\overline{x})}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{\partial B(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial x_\Delta}\frac{\partial(x_\Delta-\overline{x}_\Delta)}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{\partial B(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial \varphi}\frac{\partial(\varphi-\overline{\varphi})}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{\partial R_1(x-\overline{x},x_\Delta-\overline{x}_\Delta,\varphi-\overline{\varphi},\varepsilon)}{\partial\xi}\Big]ds+$$
$$+\frac{\partial f(\overline{u},\overline{v},\varepsilon)}{\partial u}\frac{\partial(u-\overline{u})}{\partial\xi}+\frac{\partial f(\overline{u},\overline{v},\varepsilon)}{\partial v}\frac{\partial(v-\overline{v})}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{\partial R_2(u-\overline{u},v-\overline{v},\varepsilon)}{\partial\xi}\Big\}.$$

На підставі оцінок (8), (10) і, враховуючи, що $\Big\|\dfrac{\partial R_1}{\partial\xi}\Big\|$ і $\Big\|\dfrac{\partial R_2}{\partial\xi}\Big\|$ обмежені величиною $c_8\varepsilon^\alpha$, $c_8>0$, одержимо

$$\Big\|\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\Big\|\le\|(P+Q)^{-1}\|\Big[2\|Q\|L(\sigma_1c_2+\sigma_4c_2+$$
$$+c_8)\Big]\varepsilon^\alpha=c_9\varepsilon^\alpha\le\frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon_3=\min\{\varepsilon_2,(2c_9)^{-m}\}$.

Із теореми про стискаючі відображення випливає, що існує єдина точка $\xi\in S$, тобто існує єдиний розв'язок крайової задачі (6), (12), (13). Крім того,

$$\|x(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{x}^0,\varepsilon)\|+$$
$$+\|\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{x}^0,\overline{\varphi}^0,\varepsilon)\|\le$$
$$\le\|x(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,x^0,\varepsilon)\|+$$
$$+\|\overline{x}(\tau,x^0,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{x}^0,\varepsilon)\|+$$
$$+\|\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)\|+$$
$$+\|\overline{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{x}^0,\overline{\varphi}^0,\varepsilon)\|\le$$
$$\le c_1\varepsilon^\alpha+(c_5+c_6)\varepsilon^\alpha+c_0e^{2\sigma_1L}\varepsilon^\alpha=c_4\varepsilon^\alpha,$$

де $c_4=c_1+c_5+c_6+c_0e^{2\sigma_1L}$. Одержана оцінка виконується для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_3]$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 2, причому в крайовій умові (13) функція f не залежить від першого аргументу, тобто $f=f(v,\varepsilon)$ і матриці $P=0$, $Q=E$. Тоді існує $\varepsilon_4\in(0,\varepsilon_2]$ таке, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_4]$ має місце оцінка*

$$\Big\|\frac{\partial\psi(y,\varepsilon)}{\partial y}\Big\|\le2m\Big[\sigma_4\Big\|\frac{\partial\overline{x}(L,y,\varepsilon)}{\partial y}\Big\|+$$
$$+c_2(1+\sigma_4)\varepsilon^\alpha+2L\sigma_1\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial\overline{x}(\tau,y,\varepsilon)}{\partial y}\Big\|\Big]. \qquad (15)$$

Доведення. Для знаходження ψ задовольнимо крайові умови (13), звідки одержимо рівняння

$\varphi(L,y,\psi,\varepsilon)=f(x(L,y,\psi,\varepsilon),\varepsilon)$ або

$$\psi=f(x(L,y,\psi,\varepsilon),\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^L[\varepsilon B_0(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)+$$
$$+\omega(s)]ds-\varphi(L,y,\psi,\varepsilon)+\overline{\varphi}(L,y,\psi,\varepsilon).$$

Продиференціювавши по y, одержимо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\left[E-\frac{\partial\tilde{f}(x(L,y,\psi,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\frac{\partial x(L,y,\psi,\varepsilon)}{\partial\psi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(\varphi(L,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(L,y,\psi,\varepsilon))}{\partial\psi}\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[-\frac{\partial(\varphi(L,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(L,y,\psi,\varepsilon))}{\partial y}+\right.$$
$$+\frac{\partial\tilde{f}(x(L,y,\psi,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\frac{\partial x(L,y,\psi,\varepsilon)}{\partial y}-$$
$$-\int\limits_0^L\left(\frac{\partial B_0(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}(s,y,\varepsilon)}{\partial y}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial B_0(s,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)}{\partial\overline{x}_\Delta}\frac{\partial\overline{x}_\Delta(s,y,\varepsilon)}{\partial y}\right)ds\right],$$

з якої випливає оцінка (15) при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_4]$, $\varepsilon_4=\min\left\{\varepsilon_2,[2c_2(1+\sigma_4)]^{-m}\right\}$.

4. Обґрунтування методу усереднення на осі. Запишемо для системи рівнянь (6) відповідну усереднену систему рівнянь першого наближення для повільних змінних

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau}=\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0). \qquad (16)$$

Надалі позначатимемо $x(\tau;t,y,\psi,\varepsilon)$, $\varphi(\tau;t,y,\psi,\varepsilon)$ і $\overline{x}(\tau;t,y,\varepsilon)$, $\overline{\varphi}(\tau;t,y,\psi,\varepsilon)$ – розв'язки системи (6) і усередненої системи (7) відповідно, які при $\tau=t$ набувають значень y і ψ.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0. При $\tau\in\mathbb{R}$ справджуються умови теореми 1 і $\forall(\tau,x,x_\Delta,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times D\times D\times[0,\varepsilon_4]$ виконується нерівність для $\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)$ (17).

$$\left\|\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)-\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0)\right\|+$$
$$+\left\|\frac{\partial\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)}{\partial\overline{x}}-\frac{\partial\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0)}{\partial\overline{x}}\right\|+ \qquad (17)$$
$$+\left\|\frac{\partial\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)}{\partial\overline{x}_\Delta}-\frac{\partial\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0)}{\partial\overline{x}_\Delta}\right\|\le\sigma_5\varepsilon^\alpha,$$

2^0. При $\tau\in\mathbb{R}$ функції $\omega_\nu^{(j-1)}(\tau)$, $\nu=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$ – рівномірно-неперервні, визначник Вронського $V[\omega_1(\tau),\ldots,\omega_m(\tau)]\ne0$.

3^0. Існує розв'язок $\overline{x}=\xi(\tau,\varepsilon)$ усереднених рівнянь першого наближення (14), який визначений при $\tau\in\mathbb{R}$ і лежить в D разом з своїм ρ-околом.

4^0. Нормальна фундаментальна матриця $Q(\tau,t,\varepsilon)$ розв'язків рівняння у варіаціях

$$\frac{dZ}{d\tau}=\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\overline{A}(\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\xi_\Delta(\tau,\varepsilon),0)Z+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\overline{x}_\Delta}\overline{A}(\tau,\xi(\tau,\varepsilon),\xi_\Delta(\tau,\varepsilon),0)Z_\Delta$$

при всіх $\tau\ge t\in\mathbb{R}$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ задовольняє оцінку

$$\|Q(\tau,t,\varepsilon)\|\le Ke^{-\gamma(\tau-t)}, \qquad (18)$$
$$K=\mathrm{const}>1,\quad \gamma=\mathrm{const}>0.$$

Доведемо допоміжну лему, яка буде використовуватися при дослідженні розв'язку системи (6) на осі.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* 1^0- -4^0, *тоді існують* $\varepsilon_5\in(0,\varepsilon_4]$ *і додатні сталі* c_{11}, c_{12} *та* c_{13}, *такі, що для всіх* $\tau>t$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_5]$ *і* $\|y\|\le\sigma_6(4c_{11})^{-1}$ *правильні нерівності*

$$\|\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)-\xi(\tau,\varepsilon)\|\le$$
$$\le\left(\|y\|e^{-\gamma(\tau-t)}+c_{12}\varepsilon^\alpha\right)c_{11}, \qquad (19)$$
$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\right\|\le2Ke^{-\gamma(\tau-t)+c_{13}}, \qquad (20)$$

Доведення. Введемо функцію $z(\tau;t,y+$ $+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)-\xi(\tau,\varepsilon)$, причому $\|z(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|\le c_{10}\varepsilon^\alpha$ при $t-\Delta\le\tau\le t$. Виділивши лінійну частину в рівнянні для функції $z(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)$, на підставі інтегрального зображення розв'язку [16] та нерівності (18) на деякому півінтервалі $[t,T_1)$ дістанемо оцінку

$$\|z(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|\le K\|y\|e^{-\gamma(\tau-t)}+$$
$$+\int\limits_t^\tau Ke^{-\gamma(\tau-l)}\Big(\varepsilon^\alpha\sigma_5+$$
$$+n^2\sigma_5\Big(\|z^2(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|+$$
$$+\|z_\Delta^2(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|\Big)\Big)dl.$$

Нехай на максимальному півінтервалі $[t,T)$, $T\ge T_1$ виконується нерівність $\|z(\tau;t,y+\xi(t),\varepsilon)\|<\sigma_6$. Тоді:

$$\|z(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\| \le K\|y\|e^{-\gamma(\tau-t)}+$$
$$+\int\limits_t^\tau Ke^{-\gamma(\tau-l)}\Big(\varepsilon^\alpha\sigma_5+$$
$$+n^2\sigma_5\sigma_6\Big(\|z(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|+$$
$$+\|z_\Delta(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|\Big)\Big)dl.$$

На підставі інтегральної нерівності, наведеної в праці [17, с.149], при $\tau\in[t,T)$ будемо мати:

$$\begin{aligned}&\|z(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|\le\\&\le\Big(\|y\|e^{-\gamma(\tau-t)}+c_{12}\varepsilon^\alpha\Big)c_{11},\end{aligned}\tag{21}$$

де $c_{11}=K\exp\{2Kn^2\sigma_5\sigma_6\gamma^{-1}\}$,
$c_{12}=\sigma_5(1+n^2\sigma_6c_{10})\gamma^{-1}$.
Оскільки $\Big(\|y\|+c_{12}\varepsilon^\alpha\Big)c_{11}\le\dfrac{3}{4}\sigma_6$ при $\varepsilon\le\varepsilon_5$, $\varepsilon_5=\left(\dfrac{\sigma_6}{2c_{11}c_{12}}\right)^m$, і $\|y\|\le\dfrac{\sigma_6}{4c_{11}}$, то (21) виконується при $\tau\in[t,\infty)$. Отже, нерівність (19) доведено.

Із першого з рівнянь (7) знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)=Q(t,t,\varepsilon)+$$
$$+\int\limits_t^\tau Q(\tau,l,\varepsilon)\bigg\{\bigg[\frac{\partial}{\partial x}\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\overline{A}(\tau,\xi,\xi_\Delta,0)\bigg]\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)+$$
$$+\bigg[\frac{\partial}{\partial x_\Delta}\overline{A}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial x_\Delta}\overline{A}(\tau,\xi,\xi_\Delta,0)\bigg]\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}_\Delta(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\bigg\}dl.$$

На підставі умов леми одержимо наступну нерівність

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|\le Ke^{-\gamma(\tau-t)}+$$
$$+K\Big(\sigma_5\varepsilon^\alpha+n^2\sigma_5\big(\|z(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|+$$
$$+\|z_\Delta(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\|\big)\Big)\times$$
$$\times\int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau-l)}\Big(\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|+$$
$$+\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}_\Delta(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|\Big)dl.$$

Врахувавши оцінку (18), одержимо:

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|\le Ke^{-\gamma(\tau-t)}+$$
$$+K\sigma_5\Big(\varepsilon^\alpha(1+2n^2c_{11}c_{12})+2n^2c_{11}\|y\|\Big)$$
$$\times\int\limits_t^\tau e^{-\gamma(\tau-l)}\Big(\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|+$$
$$+\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}_\Delta(l;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|\Big)dl.$$

На підставі інтегральної нерівності [17, с.149], матимемо:

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\|\le\big(Ke^{-\gamma(\tau-t)}+\frac{c_{10}}{\gamma}\times$$
$$\times K\sigma_5\big(\varepsilon^\alpha(1+2n^2c_{11}c_{12})+2n^2c_{11}\|y\|\big)\varepsilon^\alpha\big)\times$$
$$\times\exp\Big\{2K\frac{\sigma_5}{\gamma}\big(\varepsilon^\alpha(1+2n^2c_{11}c_{12})+2n^2c_{11}\|y\|\big)\Big\}\le$$
$$\le 2Ke^{-\gamma(\tau-t)+c_{13}}$$

Тут $\sigma_6=\min\left\{\dfrac{1}{2}\rho;\dfrac{2}{\sqrt{c_{10}\sigma_5(2n^2(\sigma_5+2)+\gamma)}}\right\}$,
$c_{13}=\dfrac{K\sigma_5\sigma_6}{2}\Big(3n^2+\dfrac{1}{c_{11}c_{12}}\Big)$, $\tau\ge t$, $\varepsilon\le\varepsilon_5$,
$\|y\|\le\dfrac{\sigma_6}{4c_{11}}$. Лему доведено.

Оцінка (19) і обмеження на ε та y дозволяють стверджувати, що повільні змінні $\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t),\varepsilon)$ кожного розв'язку усереднених рівнянь (7) лежать в D разом із своїм $\dfrac{1}{2}\rho$-околом при $\tau\ge t$.

Тоді, використовуючи оцінки (8) і (10) для функції

$$U=\Big\{x(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)-\overline{x}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon),$$
$$\varphi(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau;t,y+\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}$$

записуємо нерівність

$$\|U\|+\Big\|\frac{\partial}{\partial y}U\Big\|+\Big\|\frac{\partial}{\partial\psi}U\Big\|\le\sigma_7\varepsilon^\alpha\tag{22}$$

для всіх $\tau\in[t,t+L]$, $\|y\|\le\sigma_6(4c_{11})^{-1}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_5]$, $\psi\in\mathbb{R}^m$ зі сталою σ_7, яка залежить від L, але не залежить від t,y,ψ,ε.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $1^0 - 4^0$. *Тоді існує* $\varepsilon_6 \in (0, \varepsilon_5]$, *таке, що для кожних* $(\psi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_5]$ *знайдеться точка* $x^0(\psi, \varepsilon) \in D$, *що розв'язок* $\{x(\tau; 0, x^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon), \quad \varphi(\tau; 0, x^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon)\}$ *системи* (6) *визначений при* $\tau \in \mathbb{R}$ *і задовольняє нерівність*

$$\|x(\tau; 0, x^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le \sigma_8 \varepsilon^\alpha, \quad (23)$$

зі сталою σ_8, *не залежною від* ψ, ε.

Доведення. Скористаємось методикою роботи [12]. Нехай $L = \ln(16mK)/\gamma + c_{13}$ і $\|y\| \le 16mK\sigma_7 c_{11}^{-1}\varepsilon^\alpha$. Із нерівностей (19) і (20) випливають оцінки

$$\begin{aligned} &\|\overline{x}(\tau; t, y + \xi(t, \varepsilon), \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le \\ &\le \left[\frac{16mK\sigma_7}{c_{11}} e^{-\gamma(\tau - t)} + c_{12}\right] c_{11}\varepsilon^\alpha, \tau \ge t, \quad (24) \\ &\left\|\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(\tau; t, y + \xi(t, \varepsilon), \varepsilon)\right\| \le \frac{1}{8m}, \quad \tau \ge t + L. \end{aligned}$$

Зафіксуємо довільне $\psi \in \mathbb{R}^m$ і задамо крайові умови

$$\begin{aligned} &x(s, \varepsilon) = y + \xi(s, \varepsilon), s \in [-L - \varepsilon\Delta, -L]; \\ &\varphi(s, \varepsilon) = \overline{\varphi}(s, \varepsilon), s \in [-L - \varepsilon\Delta, -L), \qquad (25) \\ &\varphi|_{\tau=0} = \psi. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою 2 існує єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} &x(\tau; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon), \\ &\varphi(\tau; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon), \end{aligned}$$

$\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(y + \xi(-L, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$, крайової задачі (6), (25), повільні змінні якого з урахуванням (22), (24) задовольняють умови

$$\begin{aligned} &\|x(\tau; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le \\ &\le \|x(\tau; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon) - \\ &- \overline{x}(\tau; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon)\| + \qquad (26) \\ &+ \|\overline{x}(\tau; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le \\ &\le \big(\sigma_7(1 + 16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

для всіх $\tau \in [-L, 0)$ і

$$\begin{aligned} &\|x(0; -L, y + \xi(-L, \varepsilon), \psi^{(1)}, \varepsilon) - \xi(0, \varepsilon)\| \le \\ &\le \big(\sigma_7(1 + 16mKe^{-\gamma L}) + c_{11}c_{12}\big)\varepsilon^\alpha \le \qquad (27) \\ &\le \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Зазначимо, що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_6]$, $\varepsilon_6 = \min\{(8m\sigma_7)^{-m}; (2\sigma_7(1+\sigma_4))^{-m}\}$ для функції $\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(y + \xi(-L, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$ виконується нерівність (15):

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\partial}{\partial y}\psi^{(1)}\right\| \le 2m\big[4LK\sigma_1 e^{c_{13}} + \sigma_7\varepsilon^\alpha\big] < \\ &< 2m\left[4LK\sigma_1 e^{c_{13}} + \sigma_7\varepsilon^\alpha(1 + \sigma_4) + \frac{\sigma_4}{8m}\right] \le \\ &\le \sigma_4 = 16mLK\sigma_1 e^{c_{13}} + \frac{1}{2}. \qquad (28) \end{aligned}$$

Розглянемо тепер крайові умови

$$\begin{aligned} &x(s, \varepsilon) = y + \xi(s, \varepsilon), s \in [-2L - \varepsilon\Delta, -2L]; \\ &\varphi(s, \varepsilon) = \overline{\varphi}(s, \varepsilon), s \in [-2L - \varepsilon\Delta, -2L), \qquad (29) \\ &\varphi|_{\tau=-L} = \psi^{(1)}(x|_{\tau=-L}, \psi, \varepsilon). \end{aligned}$$

Аналогічно, як і вище, існує єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} &x(\tau; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon), \\ &\varphi(\tau; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon), \end{aligned}$$

$\psi^{(2)} = \psi^{(2)}(y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi, \varepsilon)$, крайової задачі (6), (29), для якого справедливі оцінки

$$\begin{aligned} &\|x(\tau; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le \\ &\le \big(\sigma_7(1 + 16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^\alpha, \tau \in [-2L, -L), \\ &\|x(-L; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon) - \qquad (30) \\ &- \xi(-L, \varepsilon)\| \le \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Оцінимо далі $\dfrac{\partial \psi^{(2)}}{\partial y}$. Враховуючи нерівності (15), (22), (24) і (28), отримуємо нерівність $\left\|\dfrac{\partial}{\partial y}\psi^{(2)}\right\| \le 2m\bigg[4LK\sigma_1 e^{c_{13}} + \sigma_7\varepsilon^\alpha(1 + \sigma_4) + \dfrac{\sigma_4}{8m}\bigg] \le \sigma_4$ при $\varepsilon \le \varepsilon_6$.

Об'єднавши (26), (27) і (30), одержимо, що

$$\begin{aligned} &x(\tau; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon), \\ &\varphi(\tau; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon), \end{aligned}$$

є розв'язком системи (6) при $\tau \in [-2L, 0]$, задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} &x(s, \varepsilon) = y + \xi(s, \varepsilon), s \in [-2L - \varepsilon\Delta, -2L]; \\ &\varphi(s, \varepsilon) = \overline{\varphi}(s, \varepsilon), s \in [-2L - \varepsilon\Delta, -2L), \\ &\varphi(0; -2L, y + \xi(-2L, \varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon) = \psi. \end{aligned}$$

і нерівності

$$\|x(\tau; -2L, y+\xi(-2L,\varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon) - \xi(\tau,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}, \tau \in [-2L, 0),$$
$$\|x(0; -2L, y+\xi(-2L,\varepsilon), \psi^{(2)}, \varepsilon) -$$
$$- \xi(0,\varepsilon)\| \le \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}.$$

Методом математичної індукції для довільного цілого $r > 2$ і $\tau \in [-rL, -(r-1)L]$ знаходимо розв'язок

$$x(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon),$$
$$\varphi(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon),$$

рівнянь (6), який справджує крайові умови

$$x(s,\varepsilon) = y + \xi(s,\varepsilon), s \in [-rL - \varepsilon\Delta, -rL];$$
$$\varphi(s,\varepsilon) = \overline{\varphi}(s,\varepsilon), s \in [-rL - \varepsilon\Delta, -rL),$$
$$\varphi|_{\tau=-(r-1)L} = \ \psi^{(r-1)}(x|_{\tau=-(r-1)L}, \psi, \varepsilon).$$

і нерівності

$$\|x(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon) - \xi(\tau,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha},$$
$$\tau \in [-rL, -(r-1)L),$$
$$\|x(-(r-1)L; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon) -$$
$$- \xi(-(r-1)L,\varepsilon)\| \le \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha},$$
$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}\psi^{(r)}(y+\xi(-rL),\psi,\varepsilon)\right\| \le \sigma_4.$$

Таким чином,

$$x(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon),$$
$$\varphi(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon),$$

є розв'язком системи (6) для всіх $\tau \in [-rL, 0]$, причому

$$\|x(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon) - \xi(\tau,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}, \tau \in [-rL, 0),$$
$$\|x(0; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon) - \xi(0,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}, \tag{31}$$
$$\varphi(0; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon), \psi^{(r)}, \varepsilon) = \psi.$$

Зафіксуємо довільне $y \in D$, $\|y\| \le 16mK \times \times \sigma_7 c_{11}^{-1}\varepsilon^{\alpha}$ і розглянемо послідовність

$$\big\{x(0; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon),$$
$$\psi^{(r)}(y+\xi(-rL,\varepsilon),\psi,\varepsilon),\varepsilon\big\}_{r=1}^{\infty} = \big\{x^{(r)}(\psi,\varepsilon)\big\}_{r=1}^{\infty}$$

На підставі рівномірної обмеженості норми кожного елемента вказаної послідовності числом $\|\xi(0,\varepsilon)\| + \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}$ з неї можна виділити збіжну підпослідовність

$$\big\{x^{(r_j)}(\psi,\varepsilon)\big\}_{j=1}^{\infty}, \quad r_j = r_j(\psi,\varepsilon),$$
$$\lim_{j\to\infty} x^{(r_j)}(\psi,\varepsilon) = x^0(\psi,\varepsilon),$$
$$\|x^0(\psi,\varepsilon) - \xi(0,\varepsilon)\| \le \big(2\sigma_7 + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}.$$

Покажемо, що розв'язок $x(\tau; 0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon)$, $\varphi(\tau; 0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon)$ системи (6) визначений для всіх $\tau \in (-\infty, 0]$ і

$$\|x(\tau; 0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}.$$

Нехай це не так, тобто

$$\|x(\tau_0; 0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau_0,\varepsilon)\| >$$
$$> \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha} \tag{32}$$

при деякому $\tau_0 < 0$. Враховуючи, що

$$x\big(\tau; -rL, y+\xi(-rL,\varepsilon),$$
$$\psi^{(r)}(y+\xi(-rL,\varepsilon),\psi,\varepsilon),\varepsilon\big) =$$
$$= x(\tau; 0, x^{(r)}(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon)$$

для всіх $\tau \in [-rL, 0]$, із (31) при $r_j L > \tau_0$ маємо

$$\|x(\tau_0; 0, x^{(r_j)}(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau_0,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)\varepsilon^{\alpha}. \tag{33}$$

Використовуючи неперервну залежність розв'язку від початкових даних і переходячи в (33) до границі при $j \to \infty$, отримуємо протитиріччя з (32).

При $\tau \in [0, \infty)$ метод усереднення обґрунтоваґний в роботі [18], якщо виконується нерівність (19). Обмеження $\sigma_8\varepsilon^{\alpha} \le \dfrac{1}{2}\rho$, $\sigma_8 = \big(\sigma_7(1+16mK) + c_{12}c_{11}\big)$, яке гарантує, що крива $x = x_{\tau}(0, x^0(\psi,\varepsilon), \psi, \varepsilon)$ лежить в D для всіх $\tau \in \mathbb{R}$, завершує доведення теореми.

Зауваження 1. Нерівність (23), як і в праці [6], можна інтерпретувати як оцінку похибки методу усереднення на всій осі при умові, що в початковий момент повільні змінні набувають значення $x^0(\psi,\varepsilon)$.

Зауваження 2. Теореми 1–3 узагальнюються і на випадок, коли в системі (6) змінні x і φ залежать від довільної кількості запізнень Δ_ν, $\nu = 1, \ldots, r$. При цьому ускладнюються усереднена система (7) і умова (9).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арнольд В.И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс / В.И. Арнольд // Докл. АН СССР. – 1965. – **161,** №1. – С. 9–12.

2. *Гребеников Е.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. – М.: Наука, 1979. – 431 с.

3. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости / М.М. Хапаев. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

4. *Нейштадт А.И.* Об усреднении в многочастотных системах / А.И. Нейштадт // Докл. АН СССР. – 1976. – **226,** №6. – С. 1295–1298.

5. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем / А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23,** №2. – С. 267–278.

6. *Самойленко А.М.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А.М. Самойленко, Р.І. Петришин. – К.: Наукова думка, 2004. – 474 с.

7. *Петришин Р.І.* Оцінка похибки методу усереднення на півосі для багаточастотної резонансної системи / Р.І. Петришин, О.М. Похила // Укр. мат. журн. – 1997. – **49,** №5. – С. 685–690.

8. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007. – **59,** №4. – С. 435–446.

9. *Данилюк І.М.* Крайова задача з параметрами для нелінійної коливної системи із загаюваннями / І.М. Данилюк // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 454. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 19–27.

10. *Березовська І.В.* Усереднення в багаточастотних крайових задачах із лінійно перетвореними аргументами / І.В. Березовська // Нелінійні коливання. – 2013. – **16,** №2. – С. 147–156.

11. *Самойленко А.М.* Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале / А.М. Самойленко, А.Н. Станжицкий // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42,** №4. – С. 476–482.

12. *Самойленко А.М.* Метод усреднения в некоторых краевых задачах / А.М. Самойленко, Р.И. Петришин // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25,** №6. – С. 956–964.

13. *Колесов Ю.С.* Автоколебания в системах с запаздыванием / Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра. – Вильнюс: Москва, 1979. – 148 с.

14. *Мартынюк А.Д.* Устойчивость движения: метод интергальных неравенств / А.Д. Матрынюк, В. Лакшмикантам, С. Лила. – К.: Наукова думка, 1989. – 272 с.

15. *Бигун Я.И.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием / Я.И. Бигун, А.М. Самойленко// Дифференц. уравнения. – 1999. – **35,** №1. – С. 8–14.

16. *Тышкевич В.А.* Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1981. – 80 с.

17. *Bainov Drumi* Integral Inequalities and Applications / Drumi Bainov, Pavel Simeonov. – Mathematics and its applications (Kluwer Academic Publishers), East European series: v. 57, 1992. – 245 p.

18. *Бігун Я.Й.* Обґрунтування методу усереднення для нелінійних резонансних систем із запізненням / Я.Й. Бігун // Нелінійні коливання. – 1999. – **2,** №2. – С. 162–169.