УДК 123.456

©2014 р. І.М. Ісарюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ

У гельдерових просторах із степеневою вагою досліджується існування та єдиність розв'язку задачі Діріхле для параболічного рівняння з степеневими особливостями в коефіцієнтах по просторових змінних та імпульсними умовами по часовій змінній.

We study the existence and uniqueness of the solutions of the Dirichlet problem for a parabolic equation with power-features in the coefficients depending on the spatial variables and an impulse action with respect to the time variable.

В сучасних прикладних дослідженнях рівнянь математичної фізики та рівнянь з частинними похідними все частіше зустрічаються задачі з некласичними умовами у рівняннях, крайових операторах і різними особливостями і виродженнями. Особливий інтерес мають такі задачі для рівнянь і систем параболічного типу, які описують процеси дифузії рідин і газів, тиск, поширення тепла та інші процеси у тілах складної конфігурації.

Фундаментальні результати в теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними, які мають особливості, одержані М.В.Келдишом, М.М.Смирновим, О.В.Біцадзе, Ф.Трікомі, Г.Фікерою, С.М.Нікольським, Л.Г.Михайловим, С.Д.Ейдельманом, М.І.Матійчуком, І.Д.Пукальським та іншими математиками.

У монографії М.І. Матійчука [3] досліджена задача Коші та крайова задача для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку. Праця І.Д. Пукальського [4] присвячена дослідженню крайових задач для параболічних та еліптичних рівнянь з степеневими виродженнями та особливостями у коефіцієнтах рівняння і крайових умовах.

Існують реальні процеси, які описуються системою диференціальних рівнянь і піддаються імпульсній дії в різні моменти часу, тоді виникають математичні моделі з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у праці А.М. Самойленка і О.М. Перестюка [8].

З іншого боку, існує завершена теорія задачі Коші та крайових задач для рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Задачі з імпульсною дією для таких рівнянь дуже мало вивчені.

В монографії М.І. Матійчука [2] побудована теорія коректності задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією у максимально широких нормованих просторах Діні.

У даній статті встановлюється коректність першої крайової задачі для виродженого параболічного рівняння з імпульсними умовами.

Постановка задачі та основний результат

Нехай $(x_1, ..., x_n)$ – координати точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j \equiv \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D – обмежена область із множини $\{x \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0, j \in \{1, ..., n\}\}$ з межею ∂D, така, що $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, ..., n\}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглядається задача знаходження функції $u(t, x)$, яка при $t \neq t_k$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ є розв'язком першої крайової задачі з імпульсними умовами

$$(Lu)(t,x) = \partial_t u(t,x) - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} \times$$

$$\times u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} u(t,x) -$$

$$-A_0(t,x)u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \qquad (2)$$

$$u(t_k+0,x) - u(t_k-0,x) = b_k(t_k,x)u(t_k-0,x) +$$

$$+\varphi_k(t_k,x), \qquad (3)$$

$$u(t,x)|_{\Gamma} = g(t,x), \qquad (4)$$

де $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1}$.

Позначимо через $Q^{(\nu)} = [t_\nu, t_{\nu+1}) \times D$, $\nu \in \{0,1,\ldots,N\}$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки області $Q^{(\nu)}$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, де $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_i^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(1)},x^{(2)} \in Q$; β_i, γ, a, l – дійсні числа, де $\beta = \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\gamma \geq 0$, $a \geq 0$, $l \geq 0$.

Порядок особливості коефіцієнтів диференціального оператора L буде характеризувати функція $s(\beta_i,x_i)$, де $s(\beta_i,x_i) = x_i^{\beta_i}$ при $0 < x_i \leq 1$, $s(\beta_i,x_i) = 1$ при $x_i \geq 1$; $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Простір функцій, в якому вивчається задача (1) – (4) позначимо через $C^l(\gamma;\beta;a;Q)$, $l \in \mathbb{R}$. Класу $C^l(\gamma;\beta;a;Q)$ належать функції $u(t,x)$, які мають неперервні частинні похідні при $t \neq t_\lambda$, $x \notin \overline{Q}$, вигляду $\partial_t^j \partial_x^r u$, $2j + |r| \leq [l]$, для яких скінченною є норма

$$\|u;\gamma;\beta;a;Q\|_l = \|u;\gamma;\beta;a;Q|_{[l]} +$$

$$+\langle u;\gamma;\beta;a;Q\rangle_l,$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_{\nu}\{\sup_{Q^{(\nu)}}|u|\} \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;a;Q\|_{[l]} = \sup_{\nu}\Big\{\sum_{2j+|k|\leq[l]} \sup_{P\in Q^{(\nu)}}[s(a+$$

$$+(2j+|k|)\gamma,x)\prod_{i=1}^{n} s(-r_i\beta_i,x_i)|\partial_t^j\partial_x^r u(P)|,$$

$$\langle u;\gamma;\beta;a;Q\rangle_l = \sup_{\nu}\Big\{\sum_{2j+|k|=[l]} \sup_{(P_1,H_\omega)\subset Q^{(\nu)}}$$

$$[s(a+l\gamma,\tilde{x})\prod_{i=1}^{n} s(-r_i\beta_i,\tilde{x}_i)|\partial_t^j\partial_x^r u(P_1) -$$

$$-\partial_t^j\partial_x^r u(H_\omega)||x_\omega^{(1)} - x_\omega^{(2)}|^{-\{l\}}\Big]\Big\} +$$

$$+\sum_{2j+|k|=[l]}\sum_{i=1}^{n} \sup_{(P_2,H_\omega)\subset Q^{(\nu)}} s(a+l\gamma,\tilde{x}) \times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n} s(-r_k\beta_k,\tilde{x}_i)|\partial_t^j\partial_x^r u(P_2) -$$

$$-\partial_t^j\partial_x^r u(H_\omega)||t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2}\right\}},$$

тут $|r| = r_1 + \cdots + r_n$, $l = [l] + \{l\}$, $s(\gamma,x) = \min\limits_i s(\gamma,x_i)$; $s(a,\tilde{x}_i) = \min\{s(a,x^{(1)}),s(a,x^{(2)})\}$.

Припустимо, що для задачі (1) – (4) виконуються умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ правильна нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)\xi_i\xi_j \leq$$

$$\leq \pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі;

б) $s(\beta_i,x_i)s(\beta_j,x_j)A_{ij}(t,x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_i,x)A_i(t,x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_0,x)A_0(t,x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_0(t,x) < K < +\infty, K = const$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu_i \geq 0$, $i \in \{1,...,n\}$; $\gamma = \max\{\max\limits_i(1+\beta_i);\max\limits_i(\mu_i-\beta_i);\frac{\mu_0}{2}\}$;

в) функції $f(t,x) \in C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi_0(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\varphi_k(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q \cap (t = t_k))$, $b_k(t_k,x) \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q \cap (t = t_k))$, $g \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)})$, межа $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\varphi_0(x)|_{\partial D} = g(t_0,x)|_{\partial D}$; $(g(t_k+0,x) - g(t_k-0,x))|_{\partial D} = (b_k(t_k,x)g(t_k-0,x) + \varphi_k(t_k,x))|_{\partial D}$.

При виконанні умов а) – в) для задачі (1) – (4) правильною є наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо дані задачі (1) – (4) задовольняють умовам а) – в), то* *існує розв'язок задачі (1) – (4) із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *для якого правильна оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\right.$$
$$+\|b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times$$
$$\times(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_\alpha+$$
$$+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})+$$
$$+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$\left.+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\|_\alpha+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\right\}. \tag{5}$$

Для отримання нерівності (5) необхідно спочатку задачі (1) – (4) поставити у відповідність множину задач з гладкими коефіцієнтами і побудувати множину розв'язків отриманої задачі. Тоді із множини знайдених розв'язків виділити збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1) – (4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами

Позначимо через $Q_m^{(\nu)}=Q^{(\nu)}\cap\Big\{(t,x)\in Q^{(\nu)}|\ \ s(\beta_i,x_i)\ge\dfrac{1}{m}, i\in\{1,..,n\}, m>1\Big\}$ – послідовності областей, які при $m\to\infty$ збігаються до $Q^{(\nu)}$.

В області Q розглянемо задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, де, при $t\ne t_\nu$, $u_m(t,x)$ є розв'язком задачі з гладкими коефіцієнтами

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}-a_0(t,x)\Big]u_m=f_m(t,x), \tag{6}$$
$$u_m(t_0+0,x)=\varphi_m^{(0)}(x), \tag{7}$$
$$u_m(t_\nu+0,x)-u_m(t_\nu-0,x)=$$
$$=b_\nu(t_\nu,x)u_m(t_\nu-0,x)+\varphi_m^{(\nu)}(t_\nu,x), \tag{8}$$
$$u_m(t,x)|_\Gamma\equiv g_m(t,x), \tag{9}$$

тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\nu)}$, g_m в області $Q_m^{(\nu)}$ співпадають з коефіцієнтами A_{ij}, A_i, A_0 і функціями f, φ_0, φ_k, g відповідно, а в областях $Q\setminus Q_m^{(\nu)}$ вони є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, функцій f, φ_0, φ_k, g із областей $Q_m^{(\nu)}$ в область $Q\setminus Q_m^{(\nu)}$ із збереженням норм і гладкості [6, стор. 82].

Встановимо оцінку розв'язку $u_m(t,x)$ задачі (6) – (9).

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $u_m(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі (6) – (9) в області* Q *та виконуються умови а) – в). Тоді для розв'язку* $u_m(t,x)$ *правильна оцінка*

$$|u_m(t,x)|\le\sum_{\nu=1}^{N}\left\{\prod_{r=\nu}^{N}(1+\|b_r^m;Q\cap(t=t_r)\|_0)\cdot\right.$$
$$\cdot(\|\varphi_m^{(\nu-1)};Q^{(\nu-1)}\cap(t=t_{\nu-1})\|_0+$$
$$\left.+\|f_ma_0^{-1};Q^{(\nu-1)}\|_0+\|g_m;Q^{(\nu-1)}\|_0\right\}+$$
$$+\|\varphi_m^N;Q\cap(t=t_N)\|_0+\|f_ma_0^{-1};Q^{(N)}\|_0+$$
$$+\|g_m;Q^{(N)}\|_0. \tag{10}$$

Доведення. Припустимо, що $u_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі (6) – (9). Знайдемо його оцінку в області Q. Розглянемо всеможливі випадки розміщення додатнього максимуму та від'ємного мінімуму.

Нехай точка $M_1(t,x)$ є точкою максимуму функції $u_m(t,x)$, тобто $u_m(M_1)\equiv\max\limits_{Q^{(\nu)}}u_m(t,x)$ в області Q.

Якщо $M_1(t,x)\in Q^{(\nu)}$ то в точці M_1 виконуються співвідношення $\partial_tu_m(M_1)\ge0$, $\partial_{x_i}u_m(M_1)=0$,

$$\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(M_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(M_1)\le0 \tag{11}$$

і задовольняється рівняння (6).Враховуючи формули (11) і рівняння (6) в точці M_1 правильна нерівність

$$u_m(M_1)\le\sup_{Q^{(\nu)}}(fa_0^{-1}). \tag{12}$$

Якщо $M_1\in[t_\nu,t_{\nu+1})\times\partial D$, то з крайової умови (8) маємо, що

$$|u_m(M_1)|\le\|g_m;Q^{(\nu)}\|_0. \tag{13}$$

У випадку, коли $M_1 \in \overline{D}$, враховуючи початкову умову (7), одержимо

$$\|u_m\| \leq \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{14}$$

Якщо $M_1 \in Q \cap (t = t_\nu)$, то із урахуванням умов (8), отримуємо

$$\|u_m; Q\cap(t = t_\nu)\|_0 \leq (1+\|b_\nu^m; Q\cap(t = t_\nu)\|_0)\times$$
$$\times\|u_m; Q^{(\nu-1)}\|_0 + \|\varphi_m^{(\nu)}; Q \cap (t = t_\nu)\|_0. \tag{15}$$

Аналогічно можна проаналізувати всеможливі розміщення від'ємного мінімуму.

Тоді, при $\nu = 0$, для розв'язку $u_m(t, x)$ правильна оцінка

$$\|u_m; Q^{(0)}\|_0 \leq \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; Q^{(0)}\|_0+$$
$$+\|g_m; Q^{(0)}\|_0. \tag{16}$$

Враховуючи нерівності (15), (16) і застосовуючи метод математичної індукції отримаємо оцінку (10).

Отже, для множини розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами (6) – (9) правильна нерівність (10).

Встановимо тепер коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами (6) – (9). В просторі $C^{(2+\alpha)}(Q)$ введемо норму $\|u_m; \gamma; \beta; a; Q\|_l$ еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; a; Q\|_l$ тільки замість функцій $s(\beta_i, x)$ беремо $d(\beta_i, x)$, де $d(\beta_i, x) = \max(s(\beta_i, x), m^{-\beta_i})$, при $\beta_i \geq 0$ і $d(\beta_i, x) = \min(s(\beta_i, x), m^{-\beta_i})$, якщо $\beta_i < 0$.

Правильна теорема.

Теорема 3. *Якщо для задачі (6) – (9) виконуються умови а) – в), то для розв'язку $u_m(t, x)$ цієї задачі правильна нерівність*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq c\Bigg\{ \sum_{\nu=1}^{N} \Big\{ \prod_{k=\nu}^{N} (1 + \|b_k; Q \cap (t = t_k)\|_0)\times$$
$$\times(\|\varphi_{\nu-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{\nu-1})\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(\nu-1)}\|_\alpha+$$
$$+\|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(\nu-1)}\|_{1+\alpha}\Big\}+$$
$$+\|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; 0; Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Bigg\}. \tag{17}$$

Доведення. В задачі (6) – (9) зробимо заміну

$$u_m(t, x) = v_m(t, x)e^{\lambda t} + g_m(t, x), \tag{18}$$

тоді $v_m(t, x)$ буде розв'язком задачі

$$(L_1 v_m)(t, x) = F_m(t, x), \tag{19}$$

$$v_m(t_0, x) = \Phi_m^{(0)}(t_0, x), \tag{20}$$

$$v_m(t_\nu, x) = \Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, x), \tag{21}$$

$$v_m(t, x)|_{\Gamma^{(\nu)}} = 0, \tag{22}$$

де $\Gamma^{(\nu)} = [t_\nu, t_{\nu+1}) \times \partial D$, $F_m(t, x) = f_m(t, x)e^{-\lambda t} - (L_1 g_m)(t, x)$, $\Phi_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x)e^{-\lambda t_0} - g_m(t_0, x)$, $x \in D$, $\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu, x) = (1 + b_\nu(t_\nu, x))[v_m(t_\nu - 0, x) + g_m(t_\nu - 0, x)] + [\varphi_m(t_\nu, x)e^{-\lambda t_\nu} - g_m(t_\nu + 0, x)]$, $x \in Q \cap (t = t_\nu)$, $\nu \in \{1, \ldots, N\}$.

У праці [7, стор.364] встановлено, що задача вигляду (19) – (22) в області $Q^{(\nu)}$, має єдиний розв'язок у класі $C^{(2+\alpha)}(Q^{(\nu)})$, який має вигляд

$$v_m(t, x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_D \Gamma(t, \tau, x, \xi) F_m(\tau, \xi) d\xi+$$
$$+ \int_D \Gamma(t, t_0, x, \xi) \Phi_m^{(0)}(t_0, \xi) d\xi,$$

якщо $(t, x) \in Q^{(0)}$;

$$v_m(t, x) = \int_{t_\nu}^{t} d\tau \int_D \Gamma(t, \tau, x, \xi) F_m(\tau, \xi) d\xi+$$
$$+ \int_D \Gamma(t, t_0, x, \xi) \Phi_m^{(\nu)}(t_0, \xi) d\xi,$$

якщо $(t, x) \in Q^{(\nu)}$, тут $\Gamma(t, \tau, x, \xi)$ – функція Гріна задачі (19) – (22).

Встановимо оцінку розв'язку задачі (19) – (22).

Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [6], [4], маємо

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha)\times$$
$$\times\langle v_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(\nu)}\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m; Q^{(\nu)}\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0;1)$.Оцінимо півнорму $\langle v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає, що в області $Q^{(\nu)}$ існують точки P_1, H_i, P_2, для яких правильна одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}\le E_\delta,\quad \delta\in\{1,2\}, \tag{23}$$

де

$$E_1=\sum_{2j+|r|=2}\sum_{i=1}^{N}|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|^{-\alpha}d((2+\alpha)\gamma,\tilde{x})\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n}d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x})|\partial_t^j\partial_x^r v_m(H_i)-\partial_t^j\partial_x^r v_m(P_1)|,$$

$$E_2=\sum_{2j+|r|=2}\sum_{i=1}^{N}|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}d((2+\alpha)\gamma,\tilde{x})\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n}d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x})|\partial_t^j\partial_x^r v_m(H_i)-\partial_t^j\partial_x^r v_m(P_2)|,$$

$d(\gamma,\tilde{x})=\min(d(\gamma,x^{(1)}),d(\gamma,x^{(2)}))$.

Позначимо через $T_1\equiv d(2\gamma,\tilde{x})\frac{\tau}{16}$, де τ – довільне число із інтервалу (0;1). Тоді, якщо $|t^{(1)}-t^{(2)}|\ge T_1$, то

$$E_2\le 2\tau^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_2. \tag{24}$$

Нехай $T_2\equiv n^{-1}d(\gamma-\beta_i,\tilde{x})\frac{\tau}{4}$, тоді при $|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|\ge T_2$ маємо, що

$$E_1\le 2\tau^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_2. \tag{25}$$

Якщо до нерівностей (24) і (25) застосувати інтерполяційні нерівності, то отримаємо

$$E_\delta\le\tau^{\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}+c(\tau)\|v_m;Q^{(\nu)}\|_0. \tag{26}$$

Залишається розглянути випадок, коли $|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|\le T_2$, $|t^{(1)}-t^{(2)}|\le T_1$. Припустимо, що $d(\gamma,\tilde{x})\equiv d(\gamma,x^{(1)})$, $P_1^{(\nu)}(t^{(1)},x^{(1)})\in Q^{(\nu)}$, $\nu\in\{0,1,\dots,N\}$.

В області $Q^{(\nu)}$ розглянемо задачу (19) – (22) у вигляді

$$(L_2v_m)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big]v_m=$$

$$=\sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(P)-a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(P)\partial_{x_i}v_m+a_0(P)v_m+F_m(t,x)\equiv$$

$$\equiv F_m^{(1)}(t,x;v_m)+F_m(t,x), \tag{27}$$

$$v_m(t_\nu+0,x)=\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu,x), \tag{28}$$

$$v_m|_{\Gamma^{(\nu)}}=0. \tag{29}$$

Розглянемо тепер деяку підобласть області $Q^{(\nu)}$ і позначимо її через $V_{\varepsilon_1}^{(\nu)}$, де $V_{\varepsilon_1}^{(\nu)}\equiv\{(t,x)\in Q^{(\nu)}||t-t_1|\le\varepsilon_1T_1;|x_i-x_i^{(1)}|\le\varepsilon_1T_2,i\in\{1,..,n\}\}$. В задачі (27) – (29) зробимо заміну $v_m(t,x)=V_m(t,y)$, де $y_i=d(\beta_i,x_i^{(1)})x_i$.

Тоді задача (27) – (29) набуде вигляду

$$(L_2V_m)(t,y)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1^{(\nu)})d(\beta_i,x_i^{(1)})\times$$

$$\times d(\beta_j,x_j^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]V_m=F_m^{(1)}(t,\tilde{y};V_m)+F_m(t,\tilde{y}), \tag{30}$$

$$V_m(t_\nu+0,y)=\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu,\tilde{y}), \tag{31}$$

$$V_m(t,y)|_{\Gamma^{(\nu)}}\equiv 0, \tag{32}$$

тут $\tilde{y}=(d(-\beta_1,x^{(1)}))y_1,\dots,d(-\beta_n,x^{(1)})y_n)$, $P_1^{(\nu)}(t^{(1)},x^{(1)})\in Q^{(\nu)}$.

Позначимо через $y_i^{(1)}=d(\beta_i,x^{(1)})x_i^{(1)}$, $H_{\varepsilon_1}^{(\nu)}=\{(t,y):|t-t^{(1)}|\le\varepsilon_1T_1,|y_i-y_i^{(1)}|\le\varepsilon_1n^{-1}\sqrt{T_2}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка володіє властивостями

$$\eta(t,y)=\begin{cases}1,(t,y)\in H_{1/4}^{(\nu)},0\le\eta(t,y)\le 1;\\ 0,(t,y)\notin H_{3/4}^{(\nu)},|\partial_t^j\partial_y^r\eta|\le c_{i\nu}\cdot\\ \cdot d(-(2j+|r|)\gamma,x^{(1)}).\end{cases}$$

Побудуємо функцію $\omega_m(t,y)=V_m(t,y)\eta(t,y)$, яка задовольняє крайову задачу

$$(L_3\omega_m)(t,y)=\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1^{(\nu)})d(\beta_i,x_i^{(1)})\times$$

$$\times d(\beta_j,x_j^{(1)})\{\partial_{y_i}V_m\partial_{y_j}\eta+\partial_{y_j}V_m\partial_{y_i}\eta\}+$$

$$+V_m(t,y)\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1^{(\nu)})d(\beta_i,x_i^{(1)})d(\beta_j,x_j^{(1)})\times$$

$$\times\{\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta-\partial_t\eta\}\equiv F_m^{(2)}+\eta F_m, \qquad (33)$$

$$\omega_m(t_\nu+0,y)=\eta\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu,\tilde{y})\eta(t_\nu,\tilde{y}), \qquad (34)$$

$$\omega_m(t,y)|_{\Gamma^{(\nu)}}=0. \qquad (35)$$

Розв'язок задачі (33) – (35) $\omega_m(t,y)$, згідно з теоремою 5.2 із [7, стор.264], задовольняє нерівність

$$d^{-\alpha}(N_1,N_2)|\partial_t^j\partial_y^r\omega_m(N_1)-\partial_t^j\partial_y^r\omega_m(N_2)|\le$$

$$\le c(\|F_m^{(2)}+\eta F_m\|_{C^{\alpha}(H_{3/4}^{(\nu)})}+\|\eta\Phi_m^{(\nu)}\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(\nu)})}, \qquad (36)$$

де $(N_1,N_2)\subset H_{\frac{1}{4}}^{(\nu)}$, $d(N_1,N_2)$ – параболічна відстань між точками N_1 і N_2, $2j+|r|=2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, отримаємо оцінки для доданків із (36):

$$\|F_m^{(2)}+\eta F_m\|_{C^{\alpha}(H_{3/4}^{(\nu)})}\le$$

$$\le cd(-(2+\alpha)\gamma,x^{(1)})(\|V_m;\gamma;0;0;H_{3/4}^{(\nu)}\|_2+$$

$$+\|V_m;H_{3/4}^{(\nu)}\|_0+\|F_m^{(1)};\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}^{(\nu)}\|_\alpha+$$

$$+\|F_m;\gamma;0;2\gamma;H_{3/4}^{(\nu)}\|_\alpha), \qquad (37)$$

$$\|\eta\Phi_m^{(\nu)}\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(\nu)}\cap(t=t_\nu))}\le cd(-(2+\alpha)\gamma,x^{(1)})\times$$

$$\times(\|\Phi_m^{(\nu)};\gamma;0;0;H_{3/4}^{(\nu)}\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha}, \qquad (38)$$

Підставимо отримані оцінки (37), (38) у нерівність (36), а потім повернемось до змінних (t,x), в результаті отримаємо нерівність

$$E_\delta\le c_1(\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2\gamma;H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_\alpha+$$

$$+\|\Phi_m^{(\nu)};\gamma;\beta;0;H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha}+\|v_m;H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_0+$$

$$+\|v_m;\gamma;\beta;0;H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_2+\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;H_{\frac{3}{4}}^{(\nu)}\|_\alpha. \qquad (39)$$

За допомогою інтерполяційних нерівностей і оцінок норми кожного доданка виразів $F_m^{(1)}$ і $\Phi_m^{(\nu)}$, маємо

$$E_\delta\le(\tau^\alpha(n+2)+\varepsilon_1 n^2)\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}+$$

$$+c(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(\nu)}\|_\alpha+$$

$$+\|\Phi_m^{(\nu)};\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha}+c_1\|v_m;Q^{(\nu)}\|_0). \qquad (40)$$

Враховуючи нерівності (26), (39), (40) та вибравши τ і ε досить малими величинами отримаємо наступну оцінку

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}\le c(\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(\nu)}\|_\alpha+$$

$$+\|\Phi_m^{(\nu)};\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha}. \qquad (41)$$

Оскільки, $F_m(t,x)=f_m(t,x)-(L_1g_m)(t,x)$, $\Phi_m^{(0)}(t_0,x)=\varphi_m^{(0)}(x)-g_m(t_0,x)$, $\Phi_m^{(\nu)}(t_\nu,x)=(1+b_\nu(t_\nu,x))[v_m(t_\nu-0,x)+g_m(t_\nu-0,x)]+[\varphi_m(t_\nu,x)-g_m(t_\nu+0,x)]$, то правильні нерівності

$$\|F_m;\gamma;\beta;2\gamma;Q^{(\nu)}\|_\alpha\le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(\nu)}\|_\alpha+$$

$$+\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}), \qquad (42)$$

$$\|\Phi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D)\|_\alpha\le\|\varphi_m^{(0)};\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\|_{2+\alpha}), \qquad (43)$$

$$\|\Phi_m^{(\nu)};\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu))\|_{2+\alpha}\le$$

$$\le c(1+\|b_\nu;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu))\|_0)\times$$

$$\times(\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu-1)})\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu-1)}\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|\varphi_m^{(\nu)};\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu))\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}), \qquad (44)$$

при $k=1,...,N$.

Крім цього виконуються нерівності

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(\nu)}\|_\alpha\le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(\nu)}\|_\alpha,$$

$$\|g_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha}\le c\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(\nu)}\|_{2+\alpha},$$

$$\|\varphi_m^{(\nu)};\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha}\le$$

$$\le c\|\varphi_\nu;\gamma;\beta;0;Q^{(\nu)}\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha},$$

Враховуючи тепер заміну (18), оцінку (10) та нерівності (41) – (44) отримуємо оцінку розв'язку $u_m(t,x)$ задачі (6) – (9):

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le$$

$$\le c\Bigg\{\sum_{\nu=1}^{N}\Big\{\prod_{k=\nu}^{N}(1+\|b_k;Q\cap(t=t_k)\|_0)\times$$

$$\times(\|\varphi_{\nu-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{\nu-1})\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(\nu-1)}\|_\alpha+$$

$$+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(\nu-1)}\|_{1+\alpha}\Big\}+$$

$$+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$\left.+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\|_\alpha+\|g;\gamma;\beta;0;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\right\}.$$

Таким чином, встановлено коректну розв'язність множини крайових задач з гладкими коефіцієнтами (6) – (9). Тепер із цієї множини одержаних розв'язків можна виділити збіжну підпослідовність граничне значення якої є розв'язком задачі (1) – (4).

Доведення теореми 1. Права частина нерівності (17) не залежить від m. Розглянемо послідовності $\{U_m^{(0)}\}\equiv\{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\}\equiv\{d(\gamma-\beta_i,x)\partial_{x_i}u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(2)}\}\equiv\{d(2\gamma;x)\ \partial_t u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(3)}\}\equiv\{d(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(t,x)\}$. Тоді, за теоремою Арчела, існують підпослідовності $\{U_{m_\nu}^{(j)}\}$, які рівномірно збіжні в $\overline{Q^{(\nu)}}$ до $\{U_0^{(j)}\}$ при $m\to\infty$, $j\in\{0,1,2,3\}$. Перейшовши до границі при $m\to\infty$ в задачі (6) – (9), одержимо, що $u(t,x)=U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1) – (4), $u\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бицадзе А.Б.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: Монографія. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 248 с.

3. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

4. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

5. *Пташник Б.І., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

8. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференцыальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.

9. *Pukal'skyi I.* Nonlocal boundary value problem with degeneration ant optimal control problem for linear parabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 173, No 2. July, 2011. – P. 1-17.