УДК 517.956

©2014 р. Т.О. Дерев'янко

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАВАНТАЖЕНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто задачу оптимального керування для виродженої напівлінійної гіперболічної системи навантажених рівнянь в півсмузі, причому система має горизонтальні, вертикальні і похилі характеристики. За допомогою методу характеристик і принципу стискуючих відображень отримано умови існування та єдиності глобального узагальненого розв'язку гіперболічної мішаної задачі. Доведено коректну розв'язність спряженої напівлінійної гіперболічної системи без початкових умов. Виведено необхідні умови оптимальності для неперервно-диференційованих керувань в початкових і крайових умовах.

We consider a control problem for a degenerated semilinear hyperbolic system of loaded equations in a half-strip. The system of equations under consideration has horizontal, vertical and sloping characteristics. Applying the method of characteristics and the principle of contractive mappings we find conditions for global generalized solvability of the hyperbolic problem. A necessary optimality conditions for smooth boundary and initial controls in optimal control problem for loaded semilinear hyperbolic system of the first order equations are deduced.

1. Вступ. Розвиток теорії оптимального керування розпочався для процесів, які можна описати звичайними диференціальними рівняннями [1]. Задачі оптимального керування охоплюють, зокрема, диференціальні рівняння з частинними похідними [2]–[4], стохастичні диференціальні рівняння [5], задачі Стефана (керування фазовим переходом з невідомою межею) [6].

Керування коливними гіперболічними системами зустрічаються в багатьох математичних моделях механіки, техніки, економічних та біохімічних процесів тощо [3]–[7].

У цій роботі запропоновано дослідження задачі оптимального керування гіперболічною системою навантажених рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними, в яку також входять рівняння з ортогональними (виродженими) характеристиками, наявність яких описує поширення у фізичному середовищі швидких збурень (електричних, електромагнітних тощо) [7].

Ортогональність характеристик вимагає дослідження глобальної розв'язності вихідної задачі за обидвома змінними. Окрім доведення глобальної узагальненої (неперервної) розв'язності задачі, наявність керування в початкових і крайових умовах призводить до спряженої задачі без початкових умов з вертикальними характеристиками для гіперболічної системи рівнянь першого порядку, тобто до задачі з нескінченним горизонтом планування, які, зазвичай, використовують в економічній теорії оптимальних процесів [8].

У роботі доведено існування та єдиність глобального узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для виродженої одновимірної гіперболічної системи навантажених напівлінійних рівнянь першого порядку з ортогональними характеристиками і встановлено необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування такою системою з нескінченним горизонтом планування. Навантажені гіперболічні системи рівнянь мають важливе застосування в багатьох прикладних задачах [8]– [12].

2. Формулювання задачі. В області $(x,t) \in \Pi = (0,1) \times (0,+\infty)$ розглянемо деякий процес $y = y(x,t)$, еволюцію якого в часі та просторі описуємо напівлінійною гіперболічною системою навантажених рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x}=f_i(y(x,t),x,t)+ \\ +f_i^0(y(0,t),t)+f_i^1(y(1,t),t),\ i\in I_{m_1},\quad (1)$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t}=f_i(y(x,t),x,t)+f_i^0(y(0,t),t)+ \\ +f_i^1(y(1,t),t),\ i\in I_{m_2},\quad (2)$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x}=f_i(y(x,t),x,t)+f_i^0(y(0,t),t)+ \\ +f_i^1(y(1,t),t),\ i\in I_{m_3},\quad (3)$$

де $card(I_{m_j})=m_j$ $(j=1,2,3)$, $y:\Pi\to\mathbb{R}^{m_1+m_2+m_3}$ – вектор-функція розв'язку, для всіх $i\in I_{m_1}$ функції $\lambda_i=\lambda_i(x,t)$ приймають додатні або від'ємні значення, праві частини рівнянь (1)–(3) нелінійні функції, причому для $i\notin I_{m_3}$ вони не залежать від компонент розв'язку $y_j(0,t), j\in I_0\cup I_{m_2}$, $y_j(1,t), j\in I_1\cup I_{m_2}$ та $y_j(0,t), j\in I_{m_3}$, а також для $i\in I_{m_3}$ функції $f_i=f_i(y(x,t),y(0,t),y(1,t),x,t)$ не залежать від $y_j(1,t), j\in I_{m_3}$. Тут $I=I_{m_1}\cup I_{m_2}\cup I_{m_3}$, $I_0=\{i\in I_{m_1}|\lambda_i(x,t)>0,\ (x,t)\in\overline{\Pi}\}$, $I_1=\{i\in I_{m_1}|\lambda_i(x,t)<0,\ (x,t)\in\overline{\Pi}\}$, де $card(I)=n$, $card(I_0)=m_0$, $card(I_1)=m_1-m_0$. Тобто, без обмеження загальності, для (1) будемо вважати, що перші m_0 функцій $\lambda_i(x,t)$ є додатніми, а інші (m_1-m_0) – від'ємні. Зазначимо, що вигляд напівлінійної гіперболічної системи (1)–(3) не обмежує загальності вигляду системи, оскільки опираючись на результати [12, с. 22], довільну гіперболічну систему напівлінійних рівнянь першого порядку з не діагональною характеристичною матрицею можна звести до вигляду (1)–(3).

Для системи (1)–(3) задамо початково-крайові умови

$$y_i(x,0)=y_i^0(u^{(0)}(x),x),\ x\in[0,1], \\ i\notin I_{m_3},\quad (4)$$

$$y_i(0,t)=\gamma_i^0\left(y_k(0,t)_{k\in I_1},u^{(1)}(t),t\right), \\ t\in\mathbb{R}_+,\ i\in I_0,\quad (5)$$

$$y_i(1,t)=\gamma_i^1\left(y_k(1,t)_{k\in I_0},u^{(2)}(t),t\right), \\ t\in\mathbb{R}_+,\ i\in I_1,\quad (6)$$

$$y_i(0,t)=\gamma_i^0\left(u^{(3)}(t),t\right),\ t\in\mathbb{R},\ i\in I_{m_3}.\quad (7)$$

Тут $u=(u^{(0)},u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)})\in\mathcal{U}$, де $\mathcal{U}$ – простір керувань, елементи якого є вимірними з квадратом на $[0,1]\times\mathbb{R}_+^3$ та відповідні інтеграли є рівномірно збіжними. Для компактних множин $U^j\subset\mathbb{R}^{r_j}(r_j\in\mathbb{N}), j\in\{0,1,2,3\}$ елементи u задовольняють такі умови: $u^{(0)}\in C([0,1];U^0)$, $u^{(j)}\in C([0,T];U^j), j\in\{1,2,3\}$. Праві частини рівностей (4)–(7) нелінійні функції.

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(u)=\nu_0\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\rho_0 t}\|y(0,t)-z^0(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_1-m_0}}dt+ \\ +\nu_1\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\rho_1 t}\|y(1,t)-z^1(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_0}}dt+ \\ +\nu_3\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\rho_3 t}\|y(1,t)-z^3(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_3}}dt+ \\ +\nu\iint_\Pi\frac{1}{2}e^{-\rho t}\|y(x,t)-z(x,t)\|^2_{\mathbb{R}^n}dxdt+ \\ +\nu_{2_0}\int_0^1\frac{1}{2}\|u(x)-v(x)\|^2_{\mathbb{R}^{r_0}}dx+ \\ +\sum_{j=1}^3\nu_{2_i}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\|u^{(j)}(t)-v^{(j)}(t)\|^2_{\mathbb{R}^{r_j}}dt,\quad (8)$$

у якого $(v^{(0)},v^{(2)},v^{(2)},v^{(3)})\in\mathcal{U}$ та функції $z_0:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{m_1-m_0}$, $z_1:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{m_0}$, $z_3:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{m_3}$, $z:[0,1]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$, та $\rho,\rho_0,\rho_1,\rho_3>0$ – множники дисконтування [7], задані таким чином , що (8) є збіжним при $y\in\mathcal{Q}_n$ (простір $\mathcal{Q}_n$ введено нижче). Коефіцієнти $\nu_0,\nu_1,\nu_3,\nu\in[0,1]$, причому $\nu_0+\nu_1+\sum\limits_{j=0}^3\nu_{2_j}+\nu_3+\nu=1$ і $|\nu_0|+|\nu_1|+\sum\limits_{j=0}^3|\nu_{2_j}|+|\nu_3|+|\nu|\neq 0$. У функціоналі (8) усі норми є евклідовими.

Отже, потрібно дослідити задачу

$$\min_{u\in\mathcal{U}} J(u), \tag{9}$$

де мінімум береться для тих $u \in \mathcal{U}$, для яких розв'язок початково-крайової задачі (1)–(3) існує в сенсі наведеного нижче означення 3.1.

3. Існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(7) **.** Розглянемо простір $\mathcal{U}_{ad} \subseteq \mathcal{U}$, елементами якого є рівномірно вимірні з квадратом на свої областях визначення набори керувань $u = (u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$, для яких:

$u \in (C[0,l])^{r_0} \times \prod\limits_{j=1}^{3} (C(\mathbb{R}_+))^{r_j}$; для $i \in I_0$

$y_i^0(0, u^{(0)}(0)) = \gamma_i^0\big(y_k^0(0, u^{(0)}(0))_{k\in I_1}, u^{(1)}(0), 0\big)$, та для $i \in I_1$

$y_i^0(1, u^{(0)}(1)) = \gamma_i^1\big(y_k^0(1, u^{(0)}(1))_{k\in I_0}, u^{(2)}(0), 0\big)$; $\forall x \in [0,1] : u^{(0)}(x) \in U$, $\forall t \in \mathbb{R}_+ : u^{(1)}(t) \in U^1$, $u^{(2)}(t) \in U^2$, $u^{(3)}(t) \in U^3$.

Для $u \in \mathcal{U}_{ad}$, оскільки функції керування неперервні та множини значень – компакти, можна позначити:

$$y_i^0(u^{(0)}(x), x) = \tilde{y}_i^0(x), i \notin I_{m_3};$$

$$\gamma_i^0\big(y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t), t\big) = \\ = \tilde{\gamma}_i^0\left(y_k(0,t)_{k\in I_1}, t\right), i \in I_0;$$

$$\gamma_i^1\left(y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t), t\right) = \\ \tilde{\gamma}_i^1\big(y_k(1,t)_{k\in I_0}, t\big), i \in I_1;$$

$$\gamma_i^0(u^{(3)}(t), t) = \tilde{\gamma}_i^0(t), i \in I_{m_3}.$$

Нехай L спільна стала Ліпшиця для усіх вихідних даних за змінною y, наприклад $|f_i(y^1, x, t) - f_i(y^2, x, t)| \leqslant L \max\limits_{j\in I} |y_j^1 - y_j^2|$, а $\Lambda_{max} = \sup\limits_{\substack{i\in I_{m_1},\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)|, \Lambda_{min} = \inf\limits_{\substack{i\in I_{m_1},\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)|$.

На множині $\overline{\Pi}$ для $i \in I$ визначимо функції $\alpha_i = \alpha_i(x, t; a, p, \varepsilon)$ наступним чином [13]: $e^{px(1-x)-at}$, $i \in I_0$, $i \in I_1$, $i \notin I_{m_3}$; e^{px-at}, $i \in I_0$, $i \notin I_1$, $i \notin I_{m_3}$; $e^{p(1-x)-at}$, $i \notin I_0$, $i \in I_1$, $i \notin I_{m_3}$; e^{p-at}, $i \notin I_0$, $i \notin I_1$, $i \notin I_{m_3}$; εe^{-px-at}, $i \notin I_{m_1}$, $i \notin I_{m_2}$, $i \in I_{m_3}$. Параметрами визначені так $p = 8L$, $\varepsilon = \dfrac{1}{8L}$, $a = \max\left\{p\Lambda_{max}, \dfrac{8Le^{2p}}{3\varepsilon}\right\}$.

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$ розв'язки задач Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau),\ \xi\big|_{\tau=t} = x,\ i \in I_{m_1}$$

та

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0,\ \xi\big|_{\tau=t} = x,\ i \in I_{m_2},$$

які називатимемо характеристиками системи (1)–(2).

Для (3) відповідна характеристика $\tau = t$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{d\tau}{d\xi} = 0,\ \tau\big|_{\xi=x} = t,\ i \in I_{m_3}.$$

Нехай $\chi_i(x,t)$, $\nu_i(x,t)$ точки перетину характеристик системи (1)–(3) з межею області Π, причому $\chi_i(x,t) \leqslant \nu_i(x,t)$, $i \in I$. Зазначимо, що $\nu_i(x,t) \equiv +\infty$ для $i \in I_{m_3}$.

Уведемо області:

$$\Pi^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} | \chi_i(x,t) = 0\right\}, i \notin I_{m_3};$$

$$\Pi_0^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} | \varphi_i(\chi_i(x,t); x, t) = 0\right\}, i \in I_0;$$

$$\Pi_1^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} | \varphi_i(\chi_i(x,t); x, t) = 1\right\}, i \in I_1.$$

Проінтегрувавши (1)–(3) вздовж характеристик, одержимо систему інтегро-операторних рівнянь [13]

$$y_i(x,t) = \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t) + \\ + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau; x,t), \tau), \varphi_i(\tau; x, t), \tau) + \\ + f_i^0(y(0,\tau),\tau) + f_i^1(y(1,\tau),\tau) d\tau, i \notin I_{m_3}, \tag{10}$$

$$y_i(x,t) = \tilde{\gamma}_i^0(t) + \int\limits_0^x f_i(y(s,t), s, t) + \\ + f_i^0(y(0,t), y) + f_i^1(y(1,t), t) ds,\ i \in I_{m_3}, \tag{11}$$

де, для всіх $i \notin I_{m_3}$, $\tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t)$ визначається наступним чином: $\tilde{y}_i^0(\varphi_i(0; x, t))$, $(x,t) \in \Pi^i$; $\tilde{\gamma}_i^0\left(y_k(0,t)_{k\in I_1}, t\right)$, $(x,t) \in \Pi_0^i$; $\tilde{\gamma}_i^1\left(y_k(1,t)_{k\in I_0}, t\right)$, $(x,t) \in \Pi_1^i$.

Розглянемо метричний простір

$$\mathcal{Q}_n = \left(C(\overline{\Pi})\right)^n \cap \left(B(\overline{\Pi})\right)^n,$$

де $B(\overline{\Pi})$ – простір обмежених функцій на множині $\overline{\Pi}$ з нормою $\|y\|_\alpha = \sup\limits_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |y_i(x,t)|\times$ $\times\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$ яка породжує метрику $\rho_\alpha(y^1,y^2) = \|y^1-y^2\|_\alpha$.

Означення 3.1. *Під узагальненим розв'язком задачі (1)–(7), будемо розуміти вектор-функцію $y\in\mathcal{Q}_n$, компоненти якої є неперервними функціями і задовольняють в $\overline{\Pi}$ систему інтегро-операторних рівнянь (10)–(11).*

Теорема 3.1. *Якщо виконуються умови:*

1) $\lambda_i \in C(\overline{\Pi})\cap Lip_x(\overline{\Pi})$ $\forall i\in I_{m_1}$, $\sup\limits_{\substack{i\in I_{m_1},\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)|<+\infty$, $\inf\limits_{\substack{i\in I_{m_1},\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)|<+\infty$;

2) $f_i\in C(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})\cap Lip_y(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})$ $\forall i\in I$,
$f_i^0\in C(\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times\mathbb{R}_+)\cap Lip_y(\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times\mathbb{R}_+)$ $\forall i\in I$,
$f_i^1\in C(\mathbb{R}^{m_0+m_3}\times\mathbb{R}_+)\cap Lip_y(\mathbb{R}^{m_0+m_3}\times\mathbb{R}_+)$ $\forall i\notin I_{m_3}$,
$f_i^1\in C(\mathbb{R}^{m_0}\times\mathbb{R}_+)\cap Lip_y(\mathbb{R}^{m_0}\times\mathbb{R}_+)$ $\forall i\in I_{m_3}$,
$$\sup_{\substack{i\in I,\\ (y,x,t)\in\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi}}} |f_i(y,x,t)|e^{-at}<+\infty,$$
$$\sup_{\substack{i\in I,\\ (y,t)\in\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times\mathbb{R}_+}} |f_i(y,t)|e^{-at}<+\infty,$$
$$\sup_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ (y,t)\in\mathbb{R}^{m_0+m_3}\times\mathbb{R}_+}} |f_i(y,t)|e^{-at}<+\infty,$$
$$\sup_{\substack{i\in I_{m_3},\\ (y,t)\in\mathbb{R}^{m_0}\times\mathbb{R}_+}} |f_i(y,t)|e^{-at}<+\infty;$$

3) $y_i^0\in C(U^0\times[0,1])$ $\forall i\notin I_{m_3}$;

4) $\gamma_i^0\in C(\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times U^1\times\mathbb{R}_+)\cap$ $\cap Lip_y(\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times U^1\times\mathbb{R}_+)$ $\forall i\in I_0$,
$$\sup_{\substack{i\in I_0,\\ (y,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times U^1\times\mathbb{R}_+}} |\gamma_i^0(y,u^{(1)},t)|e^{-at}<+\infty,$$
$\gamma_i^1\in C(\mathbb{R}^{m_0}\times U^2\times\mathbb{R}_+)\cap$ $\cap Lip_y(\mathbb{R}^{m_0}\times U^2\times\mathbb{R}_+)$ $\forall i\in I_1$,
$$\sup_{\substack{i\in I_1,\\ (y,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{m_0}\times U^2\times\mathbb{R}_+}} |\gamma_i^1(y,u^{(2)},t)|e^{-at}<+\infty,$$
$\gamma_i^0\in C(U^3\times\mathbb{R}_+)\cap Lip_y(U^3\times\mathbb{R}_+)$ $\forall i\in I_{m_3}$,
$$\sup_{\substack{i\in I_{m_3},\\ (u^{(3)},t)\in U^3\times\mathbb{R}_+}} |\gamma_i^0(y,u^{(3)},t)|e^{-at}<+\infty;$$

5) $u^{(0)}\in (C[0,l])^{r_0}$, $u^{(1)}\in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1}$, $u^{(2)}\in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2}$, $u^{(3)}\in (C(\mathbb{R}_+))^{r_3}$;

6) $y_i^0(0,u^{(0)}(0)) = \gamma_i^0\big(y_j^0(0,u^{(0)}(0))_{j\in I_1},u^1(0),0\big)$, $y_i^0(1,u^{(0)}(1)) = \gamma_i^1\big(y_j^0(1,u^{(0)}(1))_{j\in I_0},u^2(0),0\big)$ *(умови погодження нульового порядку)*,

то тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(7).

Доведення. На елементах простору $\mathcal{Q}_n$ визначимо нелінійний вектор-оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_n)$ такий, що

$$\mathcal{A}_i[y](x,t) = \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t)+ + \int_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)+ + f_i^0(y(0,\tau),\tau)+f_i^1(y(1,\tau),\tau)d\tau,\ i\notin I_{m_3},$$

$$\mathcal{A}_i[y](x,t) = \tilde{\gamma}_i^0(t)+ + \int_0^x f_i(y(s,t),s,t)+f_i^0(y(0,t),y)+ + f_i^1(y(1,t),t)d\tau,\ i\in I_{m_3}.$$

Зазначимо, що введений простір $\mathcal{Q}_n$ є повний, доведення повноти цього простору з незначними змінами повторює доведення повноти простору неперервних і обмежених функцій на необмеженій множині з рівномірною метрикою [14, ст. 504].

Отже відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)–(7) зводиться до відшукання нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}_n$. Використовуючи теорему Банаха про стискуюче відображення, встановимо існування та єдиність нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$.

Візьмемо довільні два різні елементи y^1,y^2 з простору $\mathcal{Q}_n$. Тоді в даному просторі, для всіх допустимих i,x,t справджується нерівність

$$\big|y_i^1(x,t)-y_i^2(x,t)\big|\leqslant\rho_\alpha(y^1,y^2)\alpha_i^{-1}(x,t;a,p,\varepsilon).$$

З визначення $\chi_i(x,t)$, можна отримати оцінки:

$$\chi_i(x,t) \leqslant t - x/\Lambda_{max}, i \in I_0;$$
$$\chi_i(x,t) \leqslant t - (l-x)/\Lambda_{max}, i \in I_1.$$

Для всіх $i \notin I_{m_3}$, справедлива оцінка

$$\left|\tilde{\mathfrak{R}}_i[y^1](x,t) - \tilde{\mathfrak{R}}_i[y^2](x,t)\right| \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant L \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \left\{ \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\in I_1}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)}, \right.$$
$$\left. \max_{\substack{i\in I_1,\\ j\in I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(1,\chi_i(x,t);a,p,\varepsilon)} \right\} \rho_\alpha(y^1,y^2) \leqslant$$
$$\leqslant Le^{-p}\rho_\alpha(y^1,y^2),$$

оскільки $a \geqslant p\Lambda_{max}$.

Враховуючи попередні оцінки, для компонент оператора $\mathcal{A}$ маємо оцінку

$$\left|\mathcal{A}_i[y^1](x,t) - \mathcal{A}_i[y^2](x,t)\right| \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant L \left(e^{-p} + \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \left\{ \int_0^x \max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\notin I_{m_3}}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,t;a,p,\varepsilon)} ds, \right. \right.$$
$$\int_0^x \max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\in I_{m_3}}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,t;a,p,\varepsilon)} ds,$$
$$\int_0^x \max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\in I_1}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(0,t;a,p,\varepsilon)} ds,$$
$$\left. \int_0^x \max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\in I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(1,t;a,p,\varepsilon)} ds \right\} +$$
$$+ 3 \max_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \left\{ \int_0^t \max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\notin I_{m_3}}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma, \right.$$
$$\int_0^t \max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\in I_{m_3}}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma,$$
$$\int_0^t \max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\in I_1}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(0,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma,$$
$$\int_0^t \max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\in I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(1,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma,$$
$$\left. \left. \int_0^t \max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\in I_{m_3}}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)}{\alpha_j(1,\sigma;a,p,\varepsilon)} d\sigma \right\} \right) \rho_\alpha(y^1,y^2).$$

З вигляду функцій $\alpha_i = \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$, одержимо

$$\left|\Delta_k \mathcal{A}_i[y^k]\ \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) \leqslant\right.$$
$$\leqslant L\Big(e^{-p} + \varepsilon + \frac{1}{p} + \frac{3e^{2p}}{\varepsilon a}\Big)\rho_\alpha(y^1,y^2).$$

Для вибраних параметрів a, p та ε справджуються оцінка

$$\rho(\mathcal{A}[y^1],\mathcal{A}[y^2]) \leqslant \frac{1}{2}\rho_\alpha(y^1,y^2).$$

Отже оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{Q}_n$ з вибраними функціями $\alpha_i = \alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$ та параметрами a, p та ε.

Тому за теоремою Банаха, існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}_n$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (1)–(7) для набору керувань $u \in \mathcal{U}_{ad}$. □

Зауваження 3.1. *Існують сталі* $\overline{K}^0 > 0$, $\overline{K}^j > 0$ *такі, що*

$$\sup_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{K} \max_{x\in[0,l]} \|\Delta u^{(0)}(x)\|_{\mathbb{R}_{r_0}}, \quad (12)$$

$$\sup_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{K}^j \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|\Delta u^{(j)}(t)\|_{\mathbb{R}_{r_j}},\ j \in \{1,2,3\}. \quad (13)$$

де, наприклад, $\|\Delta u^{(0)}(x)\|_{\mathbb{R}_{r_0}} = \max_{i\in\{1,2,\ldots,r_0\}} |\Delta u_i^{(0)}(x)|$.

Зауваження 3.2. *Справедливою є формула інтегрування частинами для елементів простору* $\mathcal{Q}_n$ *вздовж відповідних сімей* *характеристик. Доведення цього випливає із подібного факту в [15].*

4. Задача лінеаризації. Додатково вимагатимемо, щоб: $\lambda_i \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Pi})$ $\forall i \in I_{m_1}$; $f_i \in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})$ $\forall i \in I$, $f_i^0 \in C^{1,0}_{y,t}(\mathbb{R}^{m_1-m_0} \times \mathbb{R}_+)$ $\forall i \in I$, $f_i^1 \in C^{1,0}_{y,t}(\mathbb{R}^{m_0+m_3} \times \mathbb{R}_+)$ $\forall i \notin I_{m_3}$, $f_i^1 \in C^{1,0}_{y,t}(\mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}_+)$ $\forall i \in I_{m_3}$, $y_i^0 \in C^{1,0}_{u^{(0)},x}(U \times [0,1])$, $i \notin I_{m_3}$; $\gamma_i^0 \in C^{1,1,0}_{y,u^{(1)},t}(\mathbb{R}^{m_1-m_0} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)$, $i \in I_0$; $\gamma_i^0 \in C^{1,0}_{u^{(3)},t}(U^3 \times \mathbb{R}_+)$, $i \in I_{m_3}$; $\gamma_i^1 \in C^{1,1,0}_{y,u^{(2)},t}(\mathbb{R}^{m_0} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)$, $i \in I_1$.

Для довільних двох допустимих керувань u, $\widetilde{u}$ та відповідних розв'язків (1)–(7) $y = y(x,t)$ і $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x,t)$, де $\widetilde{y} = y + \Delta y$, $\widetilde{u} = u + \Delta u$, функція $\Delta y = \widetilde{y} - y$ та керування $\Delta u = \widetilde{u} - u$ задовольняють таку мішану задачу для гіперболічної системи

$$\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x} = \\ = \Delta_y f_i(y(x,t),x,t) + \Delta_y f_i^0(y(0,t),t) + \\ + \Delta_y f_i^1(y(1,t),t), \ (x,t) \in \Pi, \ i \in I_{m_1}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t} = \Delta_y f_i(y(x,t),x,t) + \\ + \Delta_y f_i^0(y(0,t),t) + \Delta_y f_i^1(y(1,t),t), \\ (x,t) \in \Pi, \ i \in I_{m_2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x} = \Delta_y f_i(y(x,t),x,t) + \\ + \Delta_y f_i^0(y(0,t),t) + \Delta_y f_i^1(y(1,t),t), \\ (x,t) \in \Pi, \ i \in I_{m_3}, \quad (16)$$

$$\Delta y_i(x,0) = \Delta_{u^{(0)}} y_i^0(u^{(0)}(x),x), \\ x \in [0,1], \ i \notin I_{m_3}, \quad (17)$$

$$\Delta y_i(0,t) = \Delta_{y,u^{(1)}} \gamma_i^0 \left(y_k(0,t)_{k \in I_1}, u^{(1)}(t), t \right), \\ t \in \mathbb{R}_+, \ i \in I_0, \quad (18)$$

$$\Delta y_i(1,t) = \Delta_{y,u^{(2)}} \gamma_i^1 \left(y_k(1,t)_{k \in I_0}, u^{(2)}(t), t \right), \\ t \in \mathbb{R}_+, \ i \in I_1, \quad (19)$$

$$\Delta y_i(0,t) = \Delta_{u^{(3)}} \gamma_i^0 \left(u^{(3)}(t), t \right), \\ t \in \mathbb{R}_+, \ i \in I_{m_3}. \quad (20)$$

де, наприклад, через $\Delta_y f_i(y(x,t),x,t)$ будемо позначати різницю $f_i(\widetilde{y}(x,t),x,t) - f_i(y(x,t),x,t)$.

Приріст цільового функціоналу (8), з урахуванням (14)–(16), можна представити як

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \\ = \nu_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\rho_0 t} \Delta_y \|y(0,t) - z^0(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_1-m_0+m_2}} dt + \\ + \nu_1 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\rho_1 t} \Delta_y \|y(1,t) - z^1(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_0+m_2}} dt + \\ + \nu_3 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\rho_3 t} \Delta_y \|y(1,t) - z^3(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_3}} dt + \\ + \nu \iint_\Pi \frac{1}{2} e^{-\rho t} \Delta_y \|y(x,t) - z(x,t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dx dt + \\ + \nu_{2_0} \int_0^1 \frac{1}{2} \Delta_u \|u(x) - v(x)\|^2_{\mathbb{R}^{r_0}} dx + \\ + \sum_{i=1}^3 \nu_{2_i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \Delta_u \|u^{(i)}(t) - v^{(i)}(t)\|^2_{\mathbb{R}^{r_j}} dt + \\ + \iint_\Pi \sum_{i \in I_{m_1}} \psi_i(x,t) \Big(\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t} + \\ + \lambda_i(x,t) \frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x} - \Delta_y f_i(y(x,t),x,t) - \\ - \Delta_y f_i^0(y(0,t),t) - \Delta_y f_i^1(y(1,t),t) \Big) dx dt + \\ + \iint_\Pi \sum_{i \in I_{m_2}} \psi_i(x,t) \Big(\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial t} - \\ - \Delta_y f_i(y(x,t),x,t) - \Delta_y f_i^0(y(0,t),t) - \\ - \Delta_y f_i^1(y(1,t),t) \Big) dx dt + \\ + \iint_\Pi \sum_{i \in I_{m_3}} \psi_i(x,t) \Big(\frac{\partial \Delta y_i(x,t)}{\partial x} - \\ - \Delta_y f_i(y(x,t),x,t) - \Delta_y f_i^0(y(0,t),t) - \\ - \Delta_y f_i^1(y(1,t),t) \Big) dx dt, \quad (21)$$

де $\psi = \psi(x,t)$ – вектор-функція з простору $\mathcal{Q}_n$.

Уведемо функції

$$H(\psi, y, x, t) = \sum_{i\in I} \psi_i(x,t) f_i(y(x,t), y(0,t),$$
$$y(1,t), x, t) - \frac{\nu}{2} e^{-\rho t} \|y(x,t) - z(x,t)\|^2_{\mathbb{R}^n},$$

$$h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x \right) =$$
$$= \sum_{i\notin I_{m_3}} \psi_i(x,0) y_i^0(u^{(0)}(x), x),$$

$$h^1\left(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t), t \right) =$$
$$= \sum_{i\in I_0} \psi_i(0,t) \lambda_i(0,t) \gamma_i^0 \left(y_k(0,t)_{k\in I_1}, \right.$$
$$\left. u^{(1)}(t), t \right) - \frac{\nu_0}{2} e^{-\rho_0 t} \|y(0,t) - z^0(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_1 - m_0}},$$

$$h^2\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_1}, y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t), t \right) =$$
$$= \sum_{i\in I_1} \psi_i(1,t) \lambda_i(1,t) \gamma_i^1 \left(y_k(1,t)_{k\in I_0}, \right.$$
$$\left. u^{(2)}(t), t \right) + \frac{\nu_1}{2} e^{-\rho_1 t} \|y(1,t) - z^1(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_0}},$$

$$h^3\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_3}, y_k(1,t)_{k\in I_3}, u^{(3)}(t), t \right) =$$
$$= \sum_{i\in I_{m_3}} \psi_i(1,t) \gamma_i^0 \left(u^{(3)}(t), t \right) +$$
$$+ \frac{\nu_3}{2} e^{-\rho_3 t} \|y(1,t) - z^3(t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_3}}.$$

Нехай функція $\psi : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^n$ є узагальненим розв'язком задачі:

$$\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t) \frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x} +$$
$$+ \frac{\partial \lambda_i(x,t)}{\partial x} \psi_i(x,t) =$$
$$= -H_{y_i}(\psi, y, x, t), \ i \in I_{m_1}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial t} = -H_{y_i}(\psi, y, x, t), \ i \in I_{m_2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x} = -H_{y_i}(\psi, y, x, t), \ i \in I_{m_3}, \quad (24)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \psi_i(x,t) e^{at} = 0, \ x \in [0,1], \ i \notin I_{m_3} \quad (25)$$

і для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ визначимо крайові умови при $i \in I_0$

$$\psi_i(1,t) = -\lambda_i^{-1}(1,t) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial h^2\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_1}, y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t), t \right)}{\partial y_i} - \right.$$
$$\left. - \sum_{j\in I} \frac{\partial f_j^1(y(1,t),t)}{\partial y_i} \right), \quad (26)$$

при $i \in I_1$

$$\psi_i(0,t) = -\lambda_i^{-1}(0,t) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial h^1\left(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t), t \right)}{\partial y_i} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j\in I} \frac{\partial f_j^0(y(0,t),t)}{\partial y_i} \right) \quad (27)$$

та при $i \in I_{m_3}$

$$\psi_i(1,t) =$$
$$= - \frac{\partial h^3\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_3}, y_k(1,t)_{k\in I_3}, u^{(3)}(t), t \right)}{\partial y_i} +$$
$$+ \sum_{j\notin I_{m_3}} \frac{\partial f_j^1(y(1,t),t)}{\partial y_i}, \quad (28)$$

означення узагальненого розв'язку якої наведено нижче.

Використавши формулу Тейлора [16, ст. 364] та застосувавши зауваження до останніх трьох доданків в (21), лінеаризувавши крайові умови (18)–(20), одержимо

$$\Delta J(u) = \nu_0 \int_0^{+\infty} \sum_{j\in I_1} e^{-\rho_0 t} \left(y_j(0,t) - z_j^0(t) \right) \times$$
$$\times \Delta y_j(0,t) dt + o_{\rho_0}(\|\Delta y(0,t)\|^2_{\mathbb{R}^n}) +$$
$$+ \nu_1 \int_0^{+\infty} \sum_{j\in I_0} e^{-\rho_1 t} (y_j(1,t) - z_j^1(t)) \Delta y_j(1,t) dt +$$
$$+ o_{\rho_1}(\|\Delta y(1,t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_1 - m_0}}) +$$

$$+\nu_3\int\limits_0^{+\infty}\sum_{j\in I_{m_3}}e^{-\rho_3 t}(y_j(1,t)-z_j^3(t))\Delta y_j(1,t)dt+$$
$$+\,o_{\rho_3}(\|\Delta y(1,t)\|^2_{\mathbb{R}^{m_0}})+$$
$$+\nu\iint\limits_{\Pi}\sum_{j\in I}e^{-\rho t}(y_j(x,t)-z_j(x,t))\Delta y_j(x,t)dxdt+$$
$$+\,o_{\rho}(\|y(x,t)\|^2_{\mathbb{R}^n})+$$
$$+\,\nu_{2_0}\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{r_0}(u_j(x)-v_j(x))\Delta u_j(x)dx+$$
$$+\,\nu_{2_0}\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{r_0}\left(\Delta u_j^{(0)}(x)\right)^2dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_j}(u_j^{(i)}(t)-v_j^{(i)}(t))\Delta u_j(t)dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int\limits_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_j}\left(\Delta u_j^{(i)}(t)\right)^2dt+$$
$$+\int\limits_0^1\sum_{i\notin I_{m_3}}\lim_{t\to+\infty}\psi_i(x,t)\Delta y_i(x,t)dx-$$
$$-\int\limits_0^1\Delta_u h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}},u^{(0)}(x),x\right)dx+$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i\in I_{m_3}}\psi_i(1,t)\Delta y_i(1,t)dt-$$
$$-\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(3)}}h^3\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_3},y_k(1,t)_{k\in I_3},u^{(3)}(t),t\Big)dt+$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\Bigg(\sum_{i\in I_0}\psi_i(1,t)\lambda_i(1,t)+\sum_{j\in I_1}\psi_j(1,t)\lambda_j(1,t)\times$$
$$\times\frac{\partial\gamma_j^1\left(y_k(1,t)_{k\in I_0},u^{(2)}(t),t\right)}{\partial y_i}\Bigg)\Delta y_i(1,t)dt+$$
$$+o_{\gamma^1}(||\Delta y(1,t)||_{\mathbb{R}^{m_1-m_0}})\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i\in I_1}\psi_i(1,t)\lambda_i(1,t)dt+$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(2)}}h^2\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_1},y_k(1,t)_{k\in I_0},u^{(2)}(t),t\Big)dt-$$
$$-\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i\in I_1}\Bigg(\psi_i(0,t)\lambda_i(0,t)+\sum_{j\in I_0}\psi_j(0,t)\lambda_j(0,t)\times$$
$$\times\frac{\partial\gamma_j^0\left(y_k(0,t)_{k\in I_1},u^{(1)}(t),t\right)}{\partial y_i}\Bigg)\Delta y_i(0,t)dt-$$
$$-\,o_{\gamma^0}(||\Delta y(0,t)||_{\mathbb{R}^{m_0}})\int\limits_0^{+\infty}\sum_{i\in I_0}\psi_i(0,t)\lambda_i(0,t)dt-$$
$$-\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(1)}}h^1\Big(\psi_j(0,t)_{j\in I_0},y_k(0,t)_{k\in I_1},u^{(1)}(t),t\Big)dt-$$
$$-\iint\limits_{\Pi}\Bigg(\sum_{i\in I_{m_1}}\bigg(\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}\psi_i(x,t)\bigg)\Delta y_i(x,t)+$$
$$+\sum_{i\in I_{m_2}}\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial t}\Delta y_i(x,t)+$$
$$+\sum_{i\in I_{m_3}}\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial x}\Delta y_i(x,t)\Bigg)dxdt-$$
$$-\iint\limits_{\Pi}\sum_{i\in I}\psi_i(x,t)\sum_{j\in I}\frac{\partial f_i(y(x,t),x,t)}{\partial y_j}\times$$
$$\times\Delta y_j(x,t)dxdt-o_f(\|\Delta y(x,t)\|)\times$$
$$\times\iint\limits_{\Pi}\sum_{i\in I}\psi_i(x,t)dxdt-\iint\limits_{\Pi}\sum_{i\in I_{m_3}}\psi_i(x,t)\times$$
$$\times\Bigg(\sum_{j\in I_1}\frac{\partial f_i^0(y(0,t),t)}{\partial y_j}\Delta y_j(0,t)+$$
$$+\sum_{j\in I_0}\frac{\partial f_i^1(y(1,t),t)}{\partial y_j}\Delta y_j(1,t)\Bigg)dxdt-$$
$$-\iint\limits_{\Pi}\sum_{i\notin I_{m_3}}\psi_i(x,t)\Bigg(\sum_{j\in I_1}\frac{\partial f_i^0(y(0,t),t)}{\partial y_j}\Delta y_j(0,t)+$$
$$+\sum_{j\in I_0}\frac{\partial f_i^1(y(1,t),x,t)}{\partial y_j}\Delta y_j(1,t)+$$
$$+\sum_{j\in I_{m_3}}\frac{\partial f_i^1(y(1,t),x,t)}{\partial y_j}\Delta y_j(1,t)\Bigg)dxdt-$$

$$-\iint\limits_{\Pi}\sum_{i\in I_{m_3}}\psi_i(x,t)\Big(\sum_{j\in I_1}\frac{\partial f_i(y(0,t),t)}{\partial y_j}\times$$
$$\times\|y_j(0,t)\|_{\mathbb{R}_{m_1-m_0}}+\sum_{j\in I_0}\frac{\partial f_i(y(1,t),t)}{\partial y_j}\times$$
$$\times\|y_j(1,t)\|_{\mathbb{R}_{m_0}}\Big)dxdt-\iint\limits_{\Pi}\sum_{i\notin I_{m_3}}\psi_i(x,t)\times$$
$$\times\Bigg(\sum_{j\in I_1}\frac{\partial f_i(y(0,t),t)}{\partial y_j}\|y_j(0,t)\|_{\mathbb{R}_{m_1-m_0}}+$$
$$+\sum_{j\in I_0}\frac{\partial f_i(y(1,t),t)}{\partial y_j}\|y_j(1,t)\|_{\mathbb{R}_{m_0}}+$$
$$+\sum_{j\in I_{m_3}}\frac{\partial f_i(y(1,t),t)}{\partial y_j}\|y_j(1,t)\|_{\mathbb{R}_{m_3}}\Bigg)dxdt,$$

де, наприклад, через $\|\Delta y(x,t)\|_{\mathbb{R}^n}$ ми будемо позначати $\max\limits_{i\in I}|y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p,\varepsilon)$.

З урахуванням умов (22)–(28), приріст цільового функціоналу набуде вигляду

$$\Delta J(u)=$$
$$=-\int_0^1\Delta_{u^{(0)}}h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}},u^{(0)}(x),x\right)dx-$$
$$-\int_0^{+\infty}\Delta_{u^{(1)}}h^1\Big(\psi_j(0,t)_{j\in I_0},y_k(0,t)_{k\in I_1},u^{(1)}(t),t\Big)dt+$$
$$+\int_0^{+\infty}\Delta_{u^{(2)}}h^2\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_1},y_k(1,t)_{k\in I_0},u^{(2)}(t),t\Big)dt-$$
$$-\int_0^{+\infty}\Delta_{u^{(3)}}h^3\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_3},y_k(1,t)_{k\in I_3},u^{(3)}(t),t\Big)dt+$$
$$+\nu_{2_0}\int_0^1\sum_{j=1}^{r_0}(u_j(x)-v_j(x))\Delta u_j(x)dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_j}(u_j^{(i)}(t)-v_j^{(i)}(t))\Delta u_j(t)dt+$$
$$+\eta,\quad(29)$$

де

$$\eta=\int_0^{+\infty}\sum_{j\in I_0}\psi_j(0,t)o_{h_1}(\|\Delta y(0,t)\|_{\mathbb{R}_{m_1-m_0}})+$$
$$+\sum_{j\in I_0}\psi_j(0,t)o_{h_1}(\|\Delta u^{(1)}(t)\|_{\mathbb{R}_{r_1}})dt+$$
$$\int_0^{+\infty}\sum_{j\in I_1}\psi_j(1,t)o_{h_2}(\|\Delta y(1,t)\|_{m_0})+$$
$$+\sum_{j\in I_1}\psi_j(1,t)o_{h_2}(\|\Delta u^{(2)}(t)\|_{r_2})dt+$$
$$+\iint\limits_{\Pi}\sum_{j\in I}\psi_j(x,t)\left(o_H(\|\Delta y(x,t)\|_{\mathbb{R}_n})+\right.$$
$$+o_H(\|\Delta y(0,t)\|_{\mathbb{R}_{m_1-m_0}})+$$
$$\left.+o_H(\|\Delta y(1,t)\|_{\mathbb{R}_{m_0}})\right)dxdt+$$
$$+\int_0^1 o_h(\|\Delta u^{(0)}(x)\|_{\mathbb{R}_{r_0}})dx+$$
$$+\nu_{2_0}\int_0^1\sum_{j=1}^{r_0}\Big(\Delta u_j^{(0)}(x)\Big)^2dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_j}\Big(\Delta u_j^{(i)}(t)\Big)^2dt.\quad(30)$$

5. Розв'язність спряженої задачі. Лінеаризація приросту цільового функціоналу вимагає існування єдиного розв'язку відповідної спряженої задачі (22)–(28).

Уведемо області

$$\pi_1^i=\left\{(x,t)\in\overline{\Pi}|\ \varphi_i(\nu_i(x,t);x,t)=1\right\},\ i\in I_0;$$

$$\pi_0^i=\left\{(x,t)\in\overline{\Pi}|\ \varphi_i(\nu_i(x,t);x,t)=0\right\},\ i\in I_1.$$

На множині $\overline{\Pi}$ для $i\in I$ визначимо функції $\beta_i=\beta_i(x,t;b,q,\omega)$ таким чином: $e^{qx(1-x)+bt}$, $i\in I_0$, $i\in I_1$, $i\notin I_{m_3}$; $e^{q(1-x)+bt}$, $i\in I_0$, $i\notin I_1$, $i\notin I_{m_3}$; e^{qx+bt}, $i\notin I_0$, $i\in I_1$, $i\notin I_{m_3}$; e^{q+bt}, $i\notin I_0$, $i\notin I_1$, $i\notin I_{m_3}$; $\omega e^{-q(1-x)+bt}$, $i\notin I_{m_1}$, $i\notin I_{m_2}$, $i\in I_{m_3}$. Для яких вибираємо параметри b, q та ω: $b=\max\{a,q\Lambda_{min},4nCe^{2q}/\varepsilon\}\}+b_0$, $q=\max\{\ln(4m_1C),4nC\}+q_0$, $\omega=\omega_0<\dfrac{1}{4nC}$, з довільно фіксованими додатними величинами b_0, q_0, ω_0; стала C обмежує за абсолютною величиною функції:

$$\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}, i\in I;$$

$$\lambda_i^{-1}(0,t)\sum_{j\in I_0}\frac{\partial\gamma_j^0}{\partial y_i}\left(y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t), t\right)\times$$
$$\times\lambda_j(0,t), i\in I_0, j\in I_1;$$

$$\frac{\partial f_j(y,x,t)}{\partial y_i}, i,j\in I;$$

$$\lambda_i^{-1}(1,t)\sum_{j\in I_1}\frac{\partial\gamma_j^1}{\partial y_i}\left(y_k(1,t)_{k\in I_1}, u^{(2)}(t), t\right)\times$$
$$\times\lambda_j(1,t), i\in I_1, j\in I_0,$$

на відповідних множинах визначення.

Проінтегрувавши (22)–(24) вздовж характеристик та використавши умови (25)–(28), одержимо систему інтегро-операторних рівнянь

$$\psi_i(x,t)=\mathfrak{D}_i[\psi](x,t)+$$
$$+\int\limits_t^{\nu_i(x,t)}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\left(\varphi_i(\tau;x,t),\tau\right)\psi_i(\tau;x,t),\tau)+$$
$$+\sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\times$$
$$\times\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)-\nu e^{-\rho t}(y_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)-$$
$$-z_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))d\tau,\ i\in I_{m_1},\quad(31)$$

$$\psi_i(x,t)=$$
$$=\int\limits_t^{+\infty}\sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\times$$
$$\times\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)-\nu e^{-\rho t}(y_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)-$$
$$-z_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))d\tau,\ i\in I_{m_2},\quad(32)$$

$$\psi_i(x,t)=\sum_{j\notin I_{m_3}}\frac{\partial f_j^1(y(1,t),t)}{\partial y_i}-$$
$$-\nu_3e^{-\rho_3 t}(y_i(1,t)-z_i^3(t))+$$
$$+\int\limits_x^1\sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(s,t),s,t)\psi_j(s,t)-$$
$$-\nu e^{-\rho t}(y_i(s,t)-z_i(s,t))ds,\ i\in I_{m_3},\quad(33)$$

де для всіх $i\in I_{m_1}$, $\mathfrak{D}_i[\psi](x,t)$ визначені правою частиною (26) при $t=\nu_i(x,t)$, якщо $(x,t)\in\pi_1^i$, або правою частиною (27) при $t=\nu_i(x,t)$, якщо $(x,t)\in\pi_0^i$.

Означення 5.1. *Узагальненим розв'язком спряженої системи* (22)–(28) *будемо називати вектор-функцію* $\psi=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)$, *яка задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь* (31)–(33) *в* $\overline{\Pi}$ *і умови* (25)–(28).

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i\in C_x^1(\overline{\Pi})\ \forall i\in I_{m_1}$,
$$\sup_{\substack{i\in I_{m_1},\\(x,t)\in\overline{\Pi}}}\left\{|\lambda_i(x,t)|,\left|\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}\right|\right\}<+\infty,$$
$$\inf_{\substack{i\in I_{m_1},\\(x,t)\in\overline{\Pi}}}\{|\lambda_i(x,t)|\}<+\infty;$$

2) $y\in\mathcal{Q}_n$;

3) $f_i\in C_y^1(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})\ \forall i\in I$,
$$\sup_{\substack{i,j\in I,\\(y,x,t)\in\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi}}}\left|\frac{\partial f_j(y,x,t)}{\partial y_i}\right|<+\infty$$ *і похідна є вимірною за* t;

4) $f_i^0\in C^1(\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times\mathbb{R}_+)\ \forall i\in I$, $f_i^1\in C^1(\mathbb{R}^{m_0}\times\mathbb{R}_+)\ \forall i\in I$;

5) $z^0\in\mathcal{Q}_{m_1-m_0}$, $z^1\in\mathcal{Q}_{m_0}$, $z^3\in\mathcal{Q}_{m_3}$, $z\in\mathcal{Q}_n$;

6) $\min\{\rho,\rho_1,\rho_2,\rho_3\}>b$;

7) $\gamma^0\in C_y^1(\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times U^1\times\mathbb{R}_+)\ \forall i\in I_0$,
$$\sup_{\substack{i\in I_1,j\in I_0,\\(y,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{m_1-m_0}\times U^1\times\mathbb{R}_+}}\left|\frac{\partial\gamma_j^0(y,u^{(1)},t)}{\partial y_i}\right|<+\infty,$$
$\gamma^1\in C_y^1(\mathbb{R}^{m_0}\times U^2\times\mathbb{R}_+)\ \forall i\in I_1$,
$$\sup_{\substack{i\in I_0,j\in I_1,\\(y,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{m_0}\times U^2\times\mathbb{R}_+}}\left|\frac{\partial\gamma_j^1(y,u^{(2)},t)}{\partial y_i}\right|<+\infty.$$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (22)–(28).

Доведення. Для знаходження розв'язку задачі (22)–(28), також використаємо метод стискуючих відображень. З простору $\mathcal{Q}_n$ виберемо підпростір $\mathcal{W}$, елементи якого володіють властивістю

$$\lim_{t\to+\infty}\psi_i(x,t)e^{at}=0$$

для будь-якого $i\in I$, $x\in[0,1]$, $\psi\in\mathcal{W}$ з метрикою

$$\rho_\beta(\psi^1,\psi^2)= = \max_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\psi_i^1(x,t)-\psi_i^2(x,t)|\beta_i(x,t;b,q,\omega).$$

Нехай оператор $\mathcal{B}$ визначений правою частиною (31)–(33), тобто

$$\mathcal{B}_i[\psi](x,t)=\mathfrak{D}_i[\psi](x,t)+ + \int\limits_t^{\nu_i(x,t)}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\left(\varphi_i(\tau;x,t),\tau\right)\psi_i(\tau;x,t),\tau)+ + \sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\times \times\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)-\nu e^{-\rho t}(y_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)- - z_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))d\tau,\ i\in I_{m_1},$$

$$\mathcal{B}_i[\psi](x,t)= = \int\limits_t^{+\infty}\sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\times \times\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)-\nu e^{-\rho t}(y_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)- - z_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))d\tau,\ i\in I_{m_2},$$

$$\mathcal{B}_i[\psi](x,t)=\sum_{j\notin I_{m_3}}\frac{\partial f_j^1(y(1,t),t)}{\partial y_i}- - \nu_3 e^{-\rho_3 t}(y_i(1,t)-z_i^3(t))+ + \int\limits_x^1\sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(s,t),s,t)\psi_j(s,t)-\nu e^{-\rho t}(y_i(s,t)- - z_i(s,t))ds,\ i\in I_{m_3}.$$

Для всіх $i\in I_0\cup I_1$, справедливі оцінки: $\nu_i(x,t)\geqslant t+(1-x)/\Lambda_{min}, i\in I_0$; $\nu_i(x,t)\geqslant t+x/\Lambda_{min}, i\in I_1$.

Враховуючи оцінку

$$\left|\mathfrak{D}_i[\psi^1](x,t)-\mathfrak{D}_i[\psi^2](x,t)\right|\beta_i(x,t;b,q,\omega)\leqslant \leqslant C\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\in I_1}}\frac{(m_1-m_0)\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(1,\nu_i(x,t);b,q,\omega)},\right. \left.\max_{\substack{i\in I_1,\\ j\in I_0}}\frac{m_1\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q,\omega)}\right\}\rho_\beta(\psi^1,\psi^2),$$

для оператора $\mathcal{B}$ одержимо

$$\left|\mathcal{B}_i[\psi^1](x,t)-\mathcal{B}_i[\psi^2](x,t)\right|\beta_i(x,t;b,q,\omega)\leqslant \leqslant\left(C\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\in I_1}}\frac{(m_1-m_0)\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(1,\nu_i(x,t);b,q,\omega)},\right.\right. \left.\max_{\substack{i\in I_1,\\ j\in I_0}}\frac{m_0\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q,\omega)}\right\}+ + nC\int\limits_x^1\left\{\max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\notin I_{m_3}}}\frac{\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(s,t;b,q,\omega)}+\right. \left.\max_{\substack{i\in I_{m_3},\\ j\in I_{m_3}}}\frac{\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(s,t;b,q,\omega)}\right\}ds+ + nC\int\limits_t^{\nu_i(x,t)}\max\left\{\max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\notin I_{m_3}}}\frac{\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(s,\sigma;b,q,\omega)},\right. \left.\left.\max_{\substack{i\notin I_{m_3},\\ j\in I_{m_3}}}\frac{\beta_i(x,t;b,q,\omega)}{\beta_j(s,\sigma;b,q,\omega)}\right\}d\sigma\right)\rho_\beta(\psi^1,\psi^2).$$

Вибір параметрів b, q та ω у функціях $\beta_i=\beta_i(x,t;b,q,\omega)$, дозволяє отримати оцінку

$$\rho_\beta(\mathcal{B}[\psi^1],\mathcal{B}[\psi^2])<\rho_\beta(\psi^1,\psi^2).$$

Отже оператор $\mathcal{B}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{W}$. Тому, за теоремою Банаха, існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{B}$ в просторі $\mathcal{W}$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (22)–(28). $\square$

6. Необхідні умови оптимальності. Опуклість множини $\mathcal{U}_{ad}$ є надзвичайно обтяжливою умовою, оскільки початкові та крайові умови в умовах погодження нульового порядку загалом є нелінійними функціями. Відмовившись від умови опуклості простору $\mathcal{U}_{ad}$, можна використати неопуклий підхід для побудови варіації керування. Тоді варіаційний аналіз досліджуваної задачі (9) буде заснований на використанні некласичних варіацій, які забезпечують гладкість допустимих керувань [3], тобто будемо розглядати підпростір $\mathcal{U}'_{ad}$ простору допустимих керувань $\mathcal{U}_{ad}$, де $\mathcal{U}'_{ad} = \left\{u \in \mathcal{U}_{ad} | u \in C^1\left([0,1]\times\mathbb{R}^3_+\right)\right\}$. Варіація керування, наприклад, для $u^{(0)} = u^{(0)}(x)$ будується за правилом

$$u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^0}(x) = u^{(0)}(x+\varepsilon\delta^{(0)}(x)),\quad x\in[0,1], \delta^{(0)}(0) = \delta^{(0)}(1) = 0, \quad (34)$$

де $\varepsilon \in [0,1)$ - параметр, який характеризує малість варіації, $\delta^{(0)}(x)$ - неперервно-диференційовна функція, яка задовольняє умову

$$0 \leqslant x + \delta^{(0)}(x) \leqslant 1,\ x\in[0,1]. \quad (35)$$

Відзначимо деякі властивості варіації (34). Насамперед, керування є гладким, а область значень функції $u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)$ визначена областю значень початкового керування $u^{(0)}(x)$. Тому, керування $u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)$ – допустиме. Крім того, має місце поточкова (і рівномірна) збіжність: $u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x) \to u^{(0)}(x)$ при $\varepsilon\to 0$ в кожній точці відрізку $[0,1]$ для будь-якого $\delta^{(0)}(x)$, що задовольняє нерівність (35). Остання властивість характеризує відповідну варіацію керування $\Delta u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x) = u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x) - u^{(0)}(x)$, як нестандартну слабку варіацію гладкої функції $u^{(0)}(x)$: рівномірно мала деформація відрізка $[0,1]$ "перемішує" значення початкового керування, зберігаючи рівномірну близькість до нуля функції $\Delta u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)$ та її похідної $\dfrac{d}{dx}\Delta u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)$.

Вибираючи варіацію керування за правилом (34) і використовуючи зображення

$$\Delta u^{(0)}(x) = \dot{u}^{(0)}(x)\varepsilon\delta^{(0)}(x) + o(\varepsilon),$$

$$\Delta u^{(k)}(t) = \dot{u}^{(k)}(t)\varepsilon\delta^{(k)}(t) + o(\varepsilon),\quad \delta^{(k)}(0) = 0,\ k\in\{1,2,3\},$$

перепишемо формулу приросту цільового функціоналу (29) так

$$\begin{aligned}\Delta J(u) &= \\ &= -\int_0^1 \sum_{i=1}^{r_0} \frac{\partial h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x\right)}{\partial u_i^{(0)}}\times \\ &\times \frac{du_i^{(0)}(x)}{dx}\varepsilon\delta^{(0)}(x)dx - \\ &-\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_1}\frac{\partial h^1\left(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t), t\right)}{\partial u_i^{(1)}}\times \\ &\times\frac{du_i^{(1)}(t)}{dt}\varepsilon\delta^{(1)}(t)dt + \\ &+\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_1}\frac{\partial h^2\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_1}, y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t), t\right)}{\partial u_i^{(2)}}\times \\ &\times\frac{du_i^{(2)}(t)}{dt}\varepsilon\delta^{(2)}(t)dt - \\ &-\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_3}\frac{\partial h^3\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_3}, y_j(1,t)_{j\in I_3}, u^{(3)}(t), t\right)}{\partial u_i^{(3)}}\times \\ &\times\frac{du_i^{(3)}(t)}{dt}\varepsilon\delta^{(3)}(t)dt + \\ &+\nu_{2_0}\int_0^1\sum_{i=1}^{r_0}(u_i^{(0)}(x) - v_i^{(0)}(x))\frac{du_i^{(0)}(x)}{dx}\varepsilon\delta^{(0)}(x)dx + \\ &+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_i}(u_j^{(i)}(t) - v_j^{(i)}(t))\frac{du_j^{(i)}(t)}{dt}\varepsilon\delta^{(i)}(t)dt + \\ &+\eta_1, \quad (36)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\eta_1 = \eta + o(\varepsilon)\Bigg(&\nu_{2_0}\int_0^1\sum_{i=1}^{r_0}(u_i^{(0)}(x) - v_i^{(0)}(x))dx + \\ &+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_i}(u_j^{(i)}(t) - v_j^{(i)}(t))dt - \\ &-\int_0^1\sum_{i=1}^{r_0}\frac{\partial h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x\right)}{\partial u_i^{(0)}}dx -\end{aligned}$$

$$-\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_1}\frac{\partial h^1\Big(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t),t\Big)}{\partial u_i^{(1)}}dt+$$

$$+\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_2}\frac{\partial h^2\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_1}, y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t),t\Big)}{\partial u_i^{(2)}}dt-$$

$$\left.-\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_3}\frac{\partial h^3\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_3}, y_k(1,t)_{k\in I_3}, u^{(3)}(t),t\Big)}{\partial u_i^{(3)}}dt\right).$$

Врахувавши справедливість оцінки (12)-(13) для (36), матимемо

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{J(u+\varepsilon\widetilde{\delta})-J(u)}{\varepsilon}=$$

$$=-\int_0^1\sum_{i=1}^{r_0}\frac{\partial h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x\right)}{\partial u_i^{(0)}}\times$$

$$\times\frac{du_i^{(0)}(x)}{dx}\delta^{(0)}(x)dx-$$

$$-\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_1}\frac{\partial h^1\Big(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t),t\Big)}{\partial u_i^{(1)}}dt\times$$

$$\times\frac{du_i^{(1)}(t)}{dt}\delta^{(1)}(t)dt+$$

$$+\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_2}\frac{\partial h^2\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_1}, y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t),t\Big)}{\partial u_i^{(2)}}dt\times$$

$$\times\frac{du_i^{(2)}(t)}{dt}\delta^{(2)}(t)dt-$$

$$-\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^{r_3}\frac{\partial h^3\Big(\psi_j(1,t)_{j\in I_3}, y_k(1,t)_{k\in I_3}, u^{(3)}(t),t\Big)}{\partial u_i^{(3)}}dt\times$$

$$\times\frac{du_i^{(3)}(t)}{dt}\delta^{(3)}(t)dt+$$

$$+\nu_{2_0}\int_0^1\sum_{i=1}^{r_0}(u_i^{(0)}(x)-v_i^{(0)}(x))\frac{du_i^{(0)}(x)}{dx}\delta^{(0)}(x)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\nu_{2_i}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{r_i}(u_j^{(i)}(t)-v_j^{(i)}(t))\frac{du_j^{(i)}(t)}{dt}\delta^{(i)}(t)dt,$$

оскільки решта доданків в (36) зображені у вигляді добутку величини порядку $o(\varepsilon)$ та рівномірно збіжного інтегралу.

Нехай виконуються усі зроблені вище припущення. Тоді, оскільки, $\delta^{(0)}=\delta^{(0)}(x)$, $\delta^{(j)}=\delta^{(j)}(t)$, $j\in\{1,2,3\}$ – довільні функції та використовуючи теорему Ферма [17, с. 55], можна сформулювати необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування (9) у вигляді теореми.

Теорема 6.1. *Якщо процес* $\{y,\ u^{(0)},\ u^{(1)},\ u^{(2)},\ u^{(3)}\}$ *є оптимальним в задачі* (9), *то виконуються умови*

$$\sum_{i=1}^{r_0}\left(\nu_{2_0}(u_i^{(0)}(x)-v_i^{(0)}(x))-\right.$$

$$\left.\frac{\partial h\left(\psi_j(x,0)_{j\notin I_{m_3}}, u^{(0)}(x), x\right)}{\partial u_i^{(0)}}\right)\times$$

$$\times\frac{du_i^{(0)}(x)}{dx}=0,\ x\in[0,l],$$

$$\sum_{i=1}^{r_1}\left(\nu_{2_1}(u_i^{(1)}(t)-v_i^{(1)}(t))-\right.$$

$$\left.\frac{\partial h^1\left(\psi_j(0,t)_{j\in I_0}, y_k(0,t)_{k\in I_1}, u^{(1)}(t), t\right)}{\partial u_i^{(1)}}\right)\times$$

$$\times\frac{du_i^{(1)}(t)}{dt}=0,\ t\in\mathbb{R}_+,$$

$$\sum_{i=1}^{r_2}\left(\nu_{2_2}(u_i^{(2)}(t)-v_i^{(2)}(t))-\right.$$

$$\left.\frac{\partial h^2\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_1}, y_k(1,t)_{k\in I_0}, u^{(2)}(t), t\right)}{\partial u_i^{(2)}}\right)\times$$

$$\times\frac{du_i^{(2)}(t)}{dt}=0,\ t\in\mathbb{R}_+,$$

$$\sum_{i=1}^{r_3}\left(\nu_{2_3}(u_i^{(3)}(t)-v_i^{(3)}(t))-\right.$$

$$\left.\frac{\partial h^3\left(\psi_j(1,t)_{j\in I_3}, y_k(1,t)_{k\in I_3}, u^{(3)}(t), t\right)}{\partial u_i^{(3)}}\right)\times$$

$$\times\frac{du_i^{(3)}(t)}{dt}=0,\ t\in\mathbb{R}_+,$$

де $y = y(x,t)$ *узагальнений розв'язок задачі* (1)–(7), $\psi = \psi(x,t)$ *- узагальнений розв'язок спряженої задачі* (22)–(28) *при* $y = y(x,t)$, $u^{(0)} = u^{(0)}(x)$, $u^{(j)} = u^{(j)}(t)$, $j \in \{1,2,3\}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 384 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
3. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами / А. В. Аргучинцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.
4. Hritonenko N., Yatsenko Y. Mathematical modeling in economics, ecology and the environment / N. Hritonenko , Y. Yatsenko – New York: Springer, 2013. – 296 p.
5. Turo J. Existence and uniqueness of solutions to a class of stochastic functional partial differential equations via integral contractors / J. Turo // Jornal of Analysis and its Aplications. – 1999. – V. 18. – N. 1. – P. 131–141.
6. Кирилич В. М. Обобщенная непреривная разрешимость задачи с неизвесными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В. М. Кирилич, А. М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – N. 1. – С. 42–60.
7. Асеев С. М. Об одном класе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике / С. М. Асеев, А. В. Кряжимский // Тр. матем. и-та им. В. А. Стеклова. – 2008. – Т. 262. – С. 13-31.
8. *Florescu D.* Asupra existentei solutiior unor sisteme hiperbolice de tip special / D. Florescu // Studii si cerc. Mat. – 1978. – T. 30. – N 3. – P. 279 – 285.
9. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения /А. М. Нахушев // Диференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – N 1. – С. 86 – 91.
10. *Кирилич В. М.* Нелокальна задача для навантаженої гіперболічної системи рівнянь першого порядку на прямій / В. М. Кирилич, І. Б. Киричинська // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 5–8.
11. *Дженалиев М. Т.* Краевые задачи и задачи оптимального управление для линейних нагруженных уравнений гиперболического типа / М. Т. Джаналиев// Диференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – N 2. – С. 232 – 241.
12. *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейних уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко – М.: Наука, 1978. – 592 с.
13. Andrusyak R. V. Global classical solvability of a problem with nonlocal conditions for degenerate hyperbolic system of the first order equations / R. V. Andrusyak, V. M. Kyrylych, O. V. Peliushkevuch // Mat. Stud. – 2012. – Vol. 38. – N. 1. – P. 80–92.
14. *Натасон И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натасон– М.: ГИТТЛ, 1957. – 552 с.
15. *Матвеев Г. И.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи / Г. И. Матвеев, В. А. Якубович – С.-Петербург: Изд-во С.-Петербург, 2003. – 540 с.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – Т. II. – 800 с.
17. *Моклячук М. П.* Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К:. ТВІМС, 2004. – 384 с.