УДК 519.6

©2015 р. О.С. Ярошко*, Б.М. Подлевський**, В.В. Хлобистов***

*Львівський національний університет імені Івана Франка
**Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України імені Я. С. Підстригача
***Інститут математики НАН України

ЛІНІЙНА БАГАТОПАРАМЕТРИЧНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ТА ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Застосовано варіаційний підхід для розв'язання багатопараметричної задачі на власні значення. Доведено еквівалентність спектральної задачі та відповідної варіаційної задачі. Побудовано чисельний метод для відшукання розв'язку варіаційної задачі та доведено локальну збіжність цього методу. Крім того, проведено та проаналізовано ряд числових експериментів, що ілюструють роботу методу.

A multiparameter eigenvalue problem is solved by using the variation approach. The equivalence between the spectral problem and the corresponding variation problem is proved. A numerical method for the solution of the variation problem is proposed and its local convergence is proved. Finally, numerical experiments for the proposed method are examined.

Вступ

Дослідження існування розв'язку операторних рівнянь вигляду

$$T(\lambda)x \;=\; f$$

з операторною функцією

$$T(\lambda):\; E^m \to X(H)$$

($X(H)$ – множина лінійних операторів у Гільбертовому просторі, зокрема в дійсному Евклідовому просторі E^n), яка лінійно або нелінійно залежить від кількох спектральних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \;\dots\;, \lambda_m$, призводить до дослідження задачі знаходження таких значень параметрів

$$\lambda_i, i = 1, 2, \;\dots\;, \; m,$$

при яких існує нетривіальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$T(\lambda)x \;=\; 0.$$

Такі задачі виникають у багатьох сферах аналізу та математичної фізики. Різноманітні формулювання задач такого типу, відповідна спектральна теорія, практичне застосування та ряд чисельних методів для відшукання розв'язку даних задач широко досліджено у літературі (див. [1] - [12]).

У цій статті розглянемо наступну багатопараметричну задачу на власні значення:

$$T\left(\lambda\right)x \equiv Ax - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i x = 0, \qquad (1)$$

у дійсному евклідовому просторі E^n, де всі скалярні параметри

$$\lambda_1, \lambda_2, \;\dots\;, \lambda_m \in E^m$$

є спектральними.

Для розв'язання цієї задачі пропонуємо підхід, який полягає заміну багатопараметричної задачі (1) на еквівалентну варіаційну задачу мінімізації деякого функціоналу.

Зауважимо, що даний підхід відрізнятиметься від уже запропонованих у [3], [4], [6], [8].

За основу чисельного методу мінімізації функціонала використовуватимемо градієнтну процедуру у розширеному просторі, що є сумою Евклідових просторів E^n та E^m. В результаті отримаємо алгоритм одночасного обчислення власного вектора та множини власних значень.

На завершення проілюструємо практичну застосовність алгоритму кількома прикладами.

1. Власні вектори та власні значення як точки мінімуму

Нехай E^n – дійсний евклідовий простір з визначеними скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{E^n}$ та нормою $\|\ \cdot\ \|_{E^n}$.

Нехай також

$$A,\ B_i\ :\ E^n \to E^n, i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ m$$

– квадратні матриці розміру $n \times n$.

Багатопараметрична задача на власні значення полягає у відшуканні такого набору спектральних параметрів

$$\lambda = \{\lambda_1,\ \dots\ ,\lambda_m\} \in E^m,$$

при якому існує нетривіальний розв'язок $x \neq 0$ рівняння (1).

Набір спектральних параметрів

$$\lambda = \{\lambda_1,\ \dots\ ,\lambda_m\}$$

називатимемо узагальненим власним значенням, відповідний вектор x – узагальненим власним вектором задачі (1).

Усі можливі набори

$$\lambda = \{\lambda_1,\ \dots\ ,\lambda_m\}$$

m-вимірного векторного простору E^m утворюють так звану поверхню власних значень а у випадку $m = 2$ – криву власних значень. Для m = 1 отримуємо класичну задачу на власні значення вигляду

$$Ax = \lambda B_1 x$$

Поруч із задачею (1) розглянемо задачу відшукання такого набору параметрів

$$\lambda = \{\lambda_1,\ \dots\ ,\lambda_m\}$$

і такого вектора x при яких функціонал

$$F(u) = \frac{1}{2}\|\,T(\lambda)x\,\|^2, \qquad (2)$$

$$\forall\, u = \{x, \lambda\}\ \in H = E^n \oplus E^m,\ \ x \neq 0$$

досягає свого мінімального значення, тобто

$$F(u) \to \min_u, \quad u \in U \subset H, \quad (u \neq 0)\,, \qquad (3)$$

де U – це множина, що містить точки $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, які задовольняють рівняння (1), H – це Гільбертів простір, у якому скалярний добуток та норма визначаються наступним чином:

$$(u, v)_H = (u_1, u_2)_{E^n} + (v_1, v_2)_{E^m},$$

$$\|u\|_H = \sqrt{\|u_1\|^2_{E^n} + \|v_1\|^2_{E^m}},$$

$$u = \{u_1, v_1\}, v = \{u_2, v_2\},$$

$$u_1, u_2 \in E^n, v_1, v_2 \in E^m.$$

Підмножину точок мінімуму функціонала $F(u)$ в U позначимо як

$$U_* = \{u:\ u \in U, \quad F(u) = 0\}\,.$$

Тепер покажемо еквівалентність задач (1) та (3).

Теорема 1. *Кожний власний вектор x^*, що відповідає набору власних значень λ^*, $\lambda^* = (\lambda_1^*,\ \dots\ ,\lambda_m^*)$ задачі (1) є стаціонарною точкою $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ функціонала (2) і навпаки – кожна стаціонарна точка $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ функціонала (2) відповідає власній парі x^*, λ^* задачі (1).*

Доведення. Розглянемо приріст функціонала

$$F(u + \Delta u) - F(u) = F(x + h, \lambda + q) - F(x, \lambda)$$

для довільних $u,\ u + \Delta u\ \in U$, де $\Delta u = \{h, q\} \in U$.

Задля спрощення запису використовуватимемо накі позначення для скалярного добутку:

$$(\cdot,\cdot)_{E^n} \equiv (\cdot,\cdot)_n, (\cdot,\cdot)_{E^m} \equiv (\cdot,\cdot)_m.$$

Отже, після ряду перетворень отримуємо:

$$F(u+\Delta u)-F(u) = F(x+h,\lambda+q)-F(x,\lambda) =$$
$$= (T(\lambda)x, T(\lambda)h)_n - (T(\lambda)x, \sum_{i=1}^{m} B_i x q_i)_n +$$
$$+\frac{1}{2}(T(\lambda)h,\ T(\lambda)h\,)_n - (T(\lambda)h,\ \sum_{i=1}^{m} B_i x q_i)_n -$$
$$-(T(\lambda)x,\ \sum_{i=1}^{m} B_i h q_i)_n + (\sum_{i=1}^{m} B_i x q_i, \sum_{i=1}^{m} B_i x q_i)_n +$$
$$+\ o(\|\Delta u\|_H^2).$$

Таким чином, перший диференціал від $F(u)$ запишеться у вигляді

$$d\{F(x,\lambda);(h,q)\} = (\ T(\lambda)x\ ,\ T(\lambda)h\,)_n -$$
$$-\sum_{i=1}^{m}(T(\lambda)x\ ,\ B_i x\,)_n q_i =$$
$$= (\ T*(\lambda)\,T(\lambda)x\ ,\ h\,)_n + (f(\lambda,x)\ ,\ q\,)_m =$$
$$= (u_g, \Delta u)_H,$$

де

$$f\,(\lambda,x) = (f_1(\lambda,x), f_2(\lambda,x), ..., f_m(\lambda,x)),$$

$$f_i(\lambda,x) = -(T(\lambda)x, B_i x)_n, i = 1,\ 2,\ \dots,\ m.$$

Звідси отримуємо також формулу градієнта функціонала (2):

$$\nabla F(u) \equiv u_g = \{(T^*Tx, e_1),\ \dots\ (T^*Tx, e_n), f_1(\lambda,x), f_2(\lambda,x), ...,\ f_m(\lambda,x)\}^T, \tag{4}$$

де $T^* \equiv T(\lambda)$, $T \equiv T(\lambda)$, $e_i \in E^n$ – вектор, i-та координата якого дорівнює 1, решта – рівна нулю.

Нехай $T(\lambda)x = 0,\ x \neq 0$. Тоді, зі співвідношення (4) слідує, що $\nabla F(u) = 0$.

Нехай $\nabla F(u) = 0$. Тоді, з (4) отримуємо також

$$T*(\lambda)T(\lambda)x = 0 \Rightarrow (T*(\lambda)T(\lambda)x, x) = 0$$
$$\Rightarrow (T(\lambda)x, T(\lambda)x) = 0 \Rightarrow T(\lambda)x = 0,$$

що доводить твердження теореми.

Зауваження. В силу того, що $F(u) \geq 0$, $F(u*) = 0$, $u, u* \in U$, кожна стаціонарна точка $u*$ функціонала $F(u)$ є точкою його локального (і глобального) мінімуму.

Отже, ми показали, що спектральна задача (1) і задача (3) відшукання стаціонарних точок функціонала $F(u)$ є еквівалентними.

2. Чисельний алгоритм та його збіжність

Результат, отриманий у попередньому параграфі дозволяє побудувати градієнтну процедуру для відшукання чисельного розв'язку задачі (3) а, отже, задачі (1). Градієнтна процедура описується наступною формулою:

$$u_{k+1} = u_k - \gamma(u_k)\nabla F(u_k)\ , \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{5}$$

Для співвідношень типу (5) визначено цілий клас методів, що відрізняються лише вибором кроку $\gamma(u_k)$.

У цій статті ми пропонуємо обчислювати величину $\gamma_k = \gamma(u_k)$ на кожному кроці, використовуючи наступне співвідношення (див. [14]):

$$\gamma_k = \frac{F(u_k)}{||\nabla F(u_k)||_H^2}. \tag{6}$$

Зауважимо, що надалі упускатимемо індекс H в позначеннях скалярного добутку та норми для спрощення запису. Отже, ітераційний процес запишеться наступним чином:

$$u_{k+1} = u_k - \tfrac{F(u_k)}{\|\nabla F(u_k)\|^2}\nabla F\,(u_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{7}$$

При виборі початкового наближення, яке є у певному сенсі близьке до власного вектора та набору власних значень, ітераційний процес (7) збігається до стаціонарної точки функціонала (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$, у якій досягається його мінімум, і, як наслідок, до власного вектора x^* та множини власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ задачі (1).

Отже, для наведеного ітераційного процесу виконується наступна теорема локальної збіжності.

Теорема 2. *Нехай матриця $T(\lambda)$ спектральної задачі (1) така, що градієнт функціонала (2) задовольняє умову Ліпшиця*

$$\|\nabla F(u) - \nabla F(z)\| \leq L\|u - z\|, \quad \forall u, z \in U, \quad L > 0, \tag{8}$$

де U – це деяка замкнута опукла сножина, що містить розв'язок u^*.

Якщо для деякого початкового наближення $u_0 = (x_0, \lambda^{(0)}) \in U$ виконується умова

$$0 < \gamma_0 \equiv \gamma(u_0) \leq 1/2L, \tag{9}$$

тоді ітераційний процес (7) збігається до точки мінімуму функціонала (2)

$$u^* = \{x^*, \lambda^*\}$$

а, отже, і до власного вектора x^* та набору власних значень

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$$

задачі (1).

Іншими словами, виконуються наступні рівності:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = \lim_{k\to\infty} \rho(u_k, u^*) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} F(u_k) = F(u^*) = 0 \tag{10}$$

Крім того, справджується оцінка

$$F(u_k) \leq 2^{-2k} F(u_0), \quad k = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Доведення. За умовою теореми градієнт функціонала задовольняє умову Ліпшиця (8), отже, виконується наступна нерівність:

$$||F(u) - F(z) - (\nabla F(z), u - z)|| \leq \leq L\|u - z\|^2/2. \tag{12}$$

Далі, якщо для деякого $k \geq 0$ справджується $\nabla F(x_k) = 0$, тоді з (7) формально ми отримуємо, що

$$u_k = u_{k+1} = \dots$$

і твердження теореми виконуються.

Тому припустимо, що $\nabla F(u_k) \neq 0$ для $k = 0, 1, \dots$, і застосуємо метод математичної індукції для доведення теореми.

Вважатимемо, що для $k = 0$ виконується

$$F(u_0) - F(u_1) = = F(u_0) - F(u_0 - \gamma_0 \nabla F(u_0)). \tag{13}$$

Взявши до уваги нерівність (12) для

$$z = u_0, u = u_1 = u_0 - \gamma_0 \nabla F(u_0),$$

отримаємо таку нерівність:

$$F(u_0) - F(u_1) \geq \gamma_0(1 - L\gamma_0/2)\|\nabla F(u_0)\|^2.$$

Як наслідок, за умови (9), отримуємо

$$F(u_0) - F(u_1) \geq \frac{3}{4}\gamma_0 ||\nabla F(u_0)||^2 =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{F(u_0)}{||\nabla F(u_0)||^2} ||\nabla F(u_0)||^2.$$

Звідси

$$\frac{1}{4} F(u_0) \geq F(u_1), \tag{14}$$

або

$$F(u_1) < F(u_0). \tag{15}$$

Тепер покажемо, що $\gamma_1 < \gamma_0$.

Для цього поділимо обидві частини нерівності (14) на величину $||\nabla F(u_1)||^2 \geq 0$. Отримаємо:

$$\frac{F(u_1)}{||\nabla F(u_1)||^2} \leq \frac{1}{4} \frac{F(u_0)}{||\nabla F(u_1)||^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{F(u_0)}{||\nabla F(u_1)||^2} \cdot \frac{||\nabla F(u_0)||^2}{||\nabla F(u_0)||^2},$$

тобто

$$\gamma_1 \leq \frac{1}{4}\gamma_0 \cdot \frac{||\nabla F(u_0)||^2}{||\nabla F(u_1)||^2} \tag{16}$$

Далі, з умови Ліпшиця (8) маємо

$$\nabla F(u_0) - \nabla F(u_1) \leq L(u_0 - u_1).$$

Використовуючи співвідношення (7), можемо отримати

$$\nabla F(u_0) - \nabla F(u_1) \le L\gamma_0 \nabla F(u_0).$$

Тепер, враховуючи (9), можемо записати, що

$$\nabla F(u_0) - \nabla F(u_1) \le \frac{1}{2}\nabla F(u_0),$$

або

$$\frac{1}{2}\nabla F(u_0) \le \nabla F(u_1),$$

тобто

$$\frac{1}{2}\frac{\nabla F(u_0)}{\nabla F(u_1)} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nabla F(u_0)}{\nabla F(u_1)} \le 2.$$

Нарешті, враховуючи останню нерівність, зі співвідношення (16) отримуємо необхідне:

$$\gamma_1 < \gamma_0.$$

Нехай тепер (15) виконується для $k = m$, тобто $F(u_m) < F(u_{m-1})$ і $\gamma_m < \gamma_{m-1}$. Покажемо, що (15) виконується також і для $k = m + 1$, тобто, що справджуються наступні співвідношення:

$$F(u_{m+1}) < F(u_m), \ \ \gamma_{m+1} < \gamma_m. \qquad (17)$$

Аналогічно, як і для довільного $k = m$, співвідношення (13) можна переписати у вигляді

$$F(u_m) - F(u_{m+1}) = F(u_m) - F(u_m - \gamma_m \nabla F(u_m)).$$

Звідси, знаходимо

$$F(u_m) - F(u_{m+1}) \ge \gamma_m(1 - L\gamma_m/2)\|\nabla F(u_m)\|^2.$$

Якщо

$$0 < \gamma_m < \gamma_{m-1} < \ \dots \ < \gamma_0 \le 1/2L, \qquad (18)$$

тоді

$$F(u_m) - F(u_{m+1}) \ge \frac{3}{4}\gamma_m \|\nabla F(u_m)\|^2 > 0 \qquad (19)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{4}F(u_m) \ge F(u_{m+1}). \qquad (20)$$

Тобто $F(u_m) \ge F(u_{m+1})$ і першу нерівність з (17) доведено.

Так само, як було показано раніше, отримаємо, що нерівність $\gamma_{m+1} < \gamma_m$ виконується, тобто друга нерівність з (17) зберігається. Крім того, враховуючи (18), ми отримуємо

$$0 < \gamma_{m+1} < \gamma_m < \ \dots \ < \gamma_0 \le 1/2L \qquad (21)$$

Отже, послідовність $F(u_k)$ є монотонно спадна і обмежена знизу а отже, існує границя

$$\lim_{k\to\infty} F(u_k) \ \ge 0.$$

Таким чином

$$\lim_{k\to\infty} \left(F(u_k) - F(u_{k+1})\right) \ = 0$$

і з (19) слідує

$$\lim_{k\to\infty} ||\nabla F(u_k)|| \ = 0. \qquad (22)$$

Тепер, використовуючи формулу ітераційного процесу (7), отримуємо

$$||u_{k+1} - u_k|| = \gamma_m \cdot ||\nabla F(u_k)||.$$

Далі, з врахуванням оцінок (21), ми маємо

$$||u_{k+1} - u_k|| \le \gamma_0 \cdot ||\nabla F(u_k)|| \le \frac{1}{2L}||\nabla F(u_k)||.$$

Якщо взяти до уваги границю (22), бачимо, що виконується

$$||u_{k+1} - u_k|| \underset{k\to\infty}{\to} 0. \qquad (23)$$

Зауважимо, що для довільного додатнього цілого p можна записати

$$\|u_{k+p} - u_k\| \ =$$
$$= \|u_{k+p} - u_{k+p-1} + \dots + u_{k+1} - u_k\| \ \le$$
$$\le \ \|u_{k+p} - u_{k+p-1}\| + \ \dots \ + \|u_{k+1} - u_k\| \, .$$

Якщо виконується співвідношення (23), тоді

$$||u_{k+p} - u_k|| \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Це означає, що послідовність $\{u_k\}$ – це фундаментальна послідовність.

Оскільки Евклідовий простір є також і Банаховим простором, послідовність $\{u_k\}$ прямує до своєї границі, наприклад, до у. Але з (22) нам відомо, що

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla F(u_k)\| = \left\|\lim_{k\to\infty} \nabla F(u_k)\right\| = \\ = \|\nabla F(y)\| = 0.$$

Це означає, що $y = u^*$ є стаціонарною точкою функціонала $F(u)$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u^* \in U_* \tag{24}$$

Оскільки функціонал неперервний, то

$$\lim_{k\to\infty} F(u_k) \ = F(u^*) = 0$$

Оцінка (11) напряму слідує з нерівності (20). Теорему доведено.

Зауважимо, що якщо функціонал є сильно опуклим, тобто існує така константа δ, при якій справджується така нерівність:

$$F(u) - F(v) \geq (\nabla F(v), u - v) + \\ +\delta \|u - v\|^2, \quad u, v \in U, \tag{25}$$

то в такому випадку справедливим є наступне припущення.

Теорема 3. *Нехай матриця $T(\lambda)$ спектральної задачі (1) така, що функціонал (2) є строго опуклим і його градієнт задовольняє умову Ліпшиця*

$$\|\nabla F(u) - \nabla F(z)\| \leq L \|u - z\|,$$

$$\forall u, z \in U, \ \ L > 0,$$

де U – деяка замкнута опукла множина, що містить розв'язок u^*.

Якщо для деякого початкового наближення

$$u_0 = (x_0, \lambda^{(0)}) \in U$$

виконується умова

$$0 < \gamma_0 \equiv \gamma(u_0) \leq 1/2L,$$

Тоді ітераційний процес (7) збігається до точки мінімуму функціонала (2) $u^* = \{x^*, \lambda^*\}$ і, отже, до власного вектора x^* та набору власних значень $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ \dots\ , \lambda_m^*)$ задачі (1), що означає, що справджуються співвідношення (10), (11) та оцінка

$$\|u_k - u^*\|^2 \leq F(u_0) \cdot 2^{-2k}/\delta, \\ k = 0, 1, \ \dots, \tag{26}$$

де δ – це константа з нерівності (25).

Доведення. Співвідношення (10) та (11) випливають з Теореми 2. Доведемо оцінку (26).

З нерівності (25) для $u = u_k$, $v = u^*$, отримаємо

$$F(u_k) \geq (\nabla F(u^*), u_k - v^*) + \delta \|u_k - u^*\|^2 =$$

$$= \delta \|u_k - u^*\|^2, \quad k = 0, 1, \ \dots$$

Отже, зважаючи на (27), отримуємо оцінку (26). Теорему доведено.

3. Числові результати

Перевіримо роботу запропонованого алгоритму на кількох прикладах двопараметричної задачі на власні значення.

Зауважимо, що задача (1) в дійсному Евклідовому просторі E^n є частковим випадком задачі

$$Ax = \lambda Bx \tag{27}$$

з комплексними матрицями та , яка є широко досліджена в літературі.

Щоб виконувати обчислення в дійсному просторі, переформулюємо задачу (27). Нехай

$$A = A_R + iA_I, B = B_R + iB_I,$$

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, x = x_R + ix_I, i^2 = -1.$$

Легко бачити, що задача (27) є еквівалентна до дійсної дво-параметричної задачі на власні значення:

$$\mathbf{Ax} \ = \ \lambda_1 \mathbf{B_1 x} + \lambda_2 \mathbf{B_2 x},$$

$$\mathbf{x} \ = \ (x_R, \, x_I) \in \mathbf{E} = E^n \oplus E^n,$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_R & -A_I \\ A_I & A_R \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} B_R & -B_I \\ B_I & B_R \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} -B_I & -B_R \\ B_R & -B_I \end{pmatrix}.$$

Якщо A, B дійсні: $A = A_R$, $B = B_R$, тоді

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ 0 & A_R \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} B_R & 0 \\ 0 & B_R \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & -B_R \\ B_R & 0 \end{pmatrix}.$$

Наведені нижче результати обчислень дають уявлення про кількість ітерацій та збіжність алгоритму.

Приклад 1. Нехай A – матриця з комплексними коефіцієнтами, B – одинична матриця:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ -3+i & 3+i \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори та власні значення відомі і дорівнюють:

а) $\lambda = 1+i, \quad x = (x^1, x^2) = (1, i);$

б) $\lambda = 0.5(1-i), \quad x = (x^1, x^2) = (1, -i).$

Результати наведені у Таблиці 1 та Таблиці 2. Умовою зупинки ітераційного процесу є нерівність

$$||u_{k+1} - u_k|| \le \varepsilon, \varepsilon = 10^{-6}.$$

Зауважимо, що вектор u має таку структуру:

$$u = (\mathbf{x}, \lambda) = ((x_R, x_I), (\lambda_1, \lambda_2)) =$$
$$= (x_R^1, x_R^2, x_I^1, x_I^2, \lambda_1, \lambda_2).$$

	Поч. u_0	Наближ.u^*	Точн.u
	1.5	1.0000000	1
	0.5	0.0000000	0
	0.5	0.0000000	0
	1.5	1.0000000	1
	1.2	1.0000003	1
	1.2	0.9999999	1
$F(u)$		6.17139333e-013	0
N ітер.		20	

Табл. 1: Числові результати для Прикладу 1, а)

	Поч. u_0	Наближ.u^*	Точн.u
	1.7	1.00000000	1
	0.2	0.00000000	0
	-0.2	0.00000000	0
	-1.5	-1.00000000	-1
	0.9	0.50000014	0.5
	-0.7	-0.50000011	-0.5
$F(u)$		3.00133411e-013	0
N ітер.		22	

Табл. 2: Числові результати для Прикладу 1, б)

Приклад 2. Нехай A – несиметрична матриця з дійсними коефіцієнтами, B – одинична матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 18 & -5 & -7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення та власні вектори відомі і дорівнюють:

а) $\lambda = 2+4i, \quad x = (1-i, 2, -2i),$

б) $\lambda = 2-4i, \quad x = (1+i, 2, 2i);$

в) $\lambda = 1, \quad x = (1, 2, 1).$

Результати наведені у Таблиці 3, Таблиці 4 та Таблиці 5. Умова зупинки ітераційного процесу та структура вектора u такі самі, як і в попередньому прикладі.

	Поч. u_0	Наближ.u^*	Точн.u
	1	1.0000000	1
	2	2.0000000	2
	3	0.0000000	0
	2	-1.0000000	-1
	1	0.0000000	0
	2	-1.9999999	-2
	-0.695	2.0000000	2
	3.739	3.9999999	4
$F(u)$		5.112161e-15	0
N ітер.		972	

Табл. 3: Числові результати для Прикладу 2, а)

	Поч. u_0	Наближ.u^*	Точн.u
	1	0.9999999	1
	1	2	2
	1	0.9999999	1
	-1	0	0
	-1	0	0
	2	0	0
	0	1.0000000	1
		0	0
$F(u)$		3.69045e-015	0
N ітер.		889	

Табл. 5: Числові результати для Прикладу 2, в)

	Поч. u_0	Наближ.u^*	Точн.u
	0	0.9999999	1
	0	2.0000000	2
	-1	0.0000000	0
	1	1.0000000	1
	0	0.0000000	0
	-1	2.0000000	2
	2.334	2.0000000	2
	-7.667	-4.0000000	-4
$F(u)$		5.112161e-15	0
N ітер.		527	

Табл. 4: Числові результати для Прикладу 2, б)

Висновки

У роботі [10] було запропоновано подібний підхід до побудови чисельного методу, де величина γ_k визначається зі співвідношення

$$\gamma_k = F(u_k)/||\nabla F(u_0)||^2.$$

Проте, вибір γ_k за формулою (6) так, як це запропоновано у даній статті, значно покращує збіжність градієнтного методу (7).

Зауважимо також, що відмінність між цим методом та подібними алгоритмами, розглянутими у [3], [4], [6], [8], полягає не лише у способі обчислення γ_k, а й у тому, що градієнтна процедура застосовується до розширеної задачі в просторі, що є прямою сумою Евклідових просторів. Це дає змогу одночасно знайти власний вектор та набір власних значень, а не окремо, як це зроблено у [3], [4], [6], [8]. Проте, такий алгоритм вимагає вибору початкового наближення як для власного вектора, так і для набору власних значень тоді, як для інших згаданих методів достатньо початкового наближення лише для власного вектора. Таку незручність легко обійти, якщо на першому кроці для заданного наближення x_0 розв'язати систему лінійних рівнянь з формули (4) відносно невідомих

$$\lambda = \{\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_m\} :$$

$$f_i(\lambda, x_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ m.$$

Знайдені таким чином

$$\lambda = \{\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_m\}$$

послугують за початкове наближення

$$\lambda^0 = \{\lambda_1^0, \ \dots \ , \lambda_m^0\}$$

для набору власних значень.

Практичну застосовність запропонованого алгоритму було досліджено на багатьох тестових прикладах, зокрема представлених у цій роботі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Abramov A., Ul'yanova V., Yukhno L.* A method for solving the multipara-meter eigenvalue problem for certain systems of differential equations // Coput. Math. Meth. Phys. – 2000. – **40**, N1. – P. 18-26.

2. *Atkinson F* Multiparameter Eigenvalue Problems. Matrices and Compact Operators. // Academic Press New York, London – 1972. – **1**.

3. *Blum E. K., Curtis A. R.* A Convergent Gradient Method for Matrix Eigenvector-Eigentuple Problems // Numer. Math. – 1987. – **31** – P. 247-263.

4. *Browne P. J., Sleeman B. D.* A numerical technique for multiparameter eigenvalue problems // IMA J. Numer Anal. – 1982. – **2**, N4. – P. 451-457.

5. *Khlobystov V. V., Podlevskyi B. M.* Numerical method of finding bifurcation points of linear two-parameter eigenvalue problems // Comput. Meth. Appl. Math. – 2009. – **9**, N4. – P. 332-338.

6. *Khlobystov V. V., Podlevskyi B. M.* Variation-gradient method of the solution of one class of nonlinear multiparameter eigenvalue problems // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – **1**, N97. – P. 70-78.

7. *M?ller R. E.* Numerical Solution of Multiparameter Eigenvalue Problems // ZAMM. – 1982. – **62** – P. 681-686.

8. *Podlevskyi B. M.* A variational approach for solving the linear multiparameter eigenvalue problems // Ukrainian Math. Journal. – 2009. – **61** – P. 1247-1256.

9. *Podlevskyi B. M.* On some nonlinear two-parameter spectral problems of mathematical physics // Mathematical modeling. – 2010. – **22**, N5. – P. 131-145.

10. *Podlevskyi B. M., Khlobystov V. V.* A gradient method for solving the nonlinear multiparameter spectral problems // Reports NAS of Ukraine. – 2012. – **8** – P. 22-27.

11. *Podlevskyi B. M., Khlobystov V. V.* On one approach to finding eigenvalue curves of linear two-parameter spectral problems // J. Mathematical Sciences. – 2010. – **167**, N1 – P. 96-106.

12. *Sleeman B. D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space // Pitnam Press, London, San Francisco, Melbourne. – 1978.