УДК 517.51

©2015 р. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет

РЕГУЛЯРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРІВ І СУКУПНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доведено, що гаусдорфові індуктивні границі регулярних послідовностей нормованих просторів Ж. Себаштьяна-і-Сільви є супер-σ-метризовними просторами і як наслідок отримано теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в таких просторах.

It is proved that Hausdorff inductive limits of J. Sebastian-e-Silva's regular sequences of normed spaces are super - σ -metrizable and theorems on joint continuity of separately continuous mappings with values in such spaces are obtained as corollary.

1. Вступ. Стара задача про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень, яка вперше ґрунтовно була досліджена в дисертації Р. Бера [1], і досі привертає увагу математиків. Оскільки для метризовного простору значень вона досить добре вивчена в XX столітті (див. дисертації [2-4] і вказану там літературу), то останнім часом активізувалася робота, в якій просторами значень є представники різних класів просторів, близьких до метризовних, зокрема, і тих, що розглянуті в огляді [5]. Таким дослідженням присвячено один розділ дисертації [2] і дві новіші дисертації [6, 7], див. також праці [8-10]. В них вивчалася величина множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в строгих індуктивних границях, σ-метризовних і сильно σ-метризовних просторах, просторах Мура, вичерпних і напіввичерпних просторах та в різних конкретних неметризовних просторах, як-от: площини Немицького, Бінґа, Сідра, пряма Зорґенфрея, простір $C_p[0,1]$.

При розгляді строгих індуктивних границь як просторів значень важливу роль відіграє теорема Д'єдонне-Шварца про обмежені множини в таких границях [11, с. 54], відштовхуючись від якої в подальших дослідженнях був введений клас сильно σ-метризовних просторів, з якими пов'язано чи не найбільше число результатів на цю тему.

Ж. Себаштьян-і-Сільва [12] розглянув ще один клас індуктивних границь, для яких виконується аналог теореми Д'єдонне-Шварца. Зростаючу послідовність нормованих просторів $(Z_n, \|\cdot\|_n)$, які є лінійними підпросторами векторного простору $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$, він назвав *регулярною*, якщо всі тотожні вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ є компактними, тобто довільна обмежена в просторі Z_n множина буде відносно компактною у просторі Z_{n+1}. У праці [12] були вивчені індуктивні границі $Z = \lim\operatorname{ind} Z_n$ регулярних послідовностей нормованих просторів Z_n, зокрема, встановлено [12, теорема 2], що кожна обмежена множина в такій індуктивній границі міститься в якомусь дограничному просторі Z_n і обмежена там. Постає природне питання: як пов'язані індуктивні границі Себаштьяна-і-Сільви з іншими класами просторів, близьких до метризовних? Тут ми з'ясовуємо, що такі границі в разі їх гаусдорфовості є супер-σ-метризовними просторами, і тому всі теореми про множину $C(f)$ для нарізно неперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних і сильно σ-метризовних просторах мають місце і в тому випадку, коли простір значень є гаусдорфовою індуктивною границею регулярної послідовності нормованих просторів.

2. Леми про індуктивні границі регулярних послідовностей нормованих просторів. Нехай $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ – регулярна послідовність нормованих просторів $(Z_n, \|\cdot\|_n)$. Для довільних номерів n і m покладемо

$$B_{n,m} = \{z \in Z_n : \|z\|_n \leq m\}.$$

Ясно, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{n,m} = Z_n$ для кожного n. Символом $[A]_X$ ми позначатимемо замикання множини A у просторі X.

Лема 1. *Нехай $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ – регулярна послідовність нормованих просторів, причому її індуктивна границя $Z = \lim\operatorname{ind} Z_n$ – це гаусдорфовий простір. Тоді множини*

$$K_{n,m} = [B_{n,m}]_{Z_{n+1}}$$

– це компактні метризовні підпростори простору Z.

Доведення. Оскільки тотожні вкладення $J_n : Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ компактні, кулі $B_{n,m}$ обмежені у просторі Z_n і $B_{n,m} = J_n(B_{n,m})$, то кулі $B_{n,m}$ будуть відносно компактними множинами в просторі Z_{n+1}, тобто їх замикання $K_{n,m}$ – це компактні множини в просторі Z_{n+1}. Розглянемо тотожне вкладення $I_{n+1} : Z_{n+1} \hookrightarrow Z$. З означення індуктивної границі [11, с. 42, 46] випливає, що відображення I_{n+1} неперервне. Оскільки образ компактної множини при неперерервному відображенні залишається компактним [11, с. 15], то множина $K = K_{n,m} = I_{n+1}(K_{n,m})$ є компактною і в просторі Z. Нехай $\mathcal{T}_{n+1}$ – топологія простору Z_{n+1} і $\mathcal{T}$ – топологія простору Z, а $\mathcal{T}_{n+1}|_K$ і $\mathcal{T}|_K$ – звуження цих топологій на множину K. Тотожне відображення $I : (K, \mathcal{T}_{n+1}|_K) \to (K, \mathcal{T}|_K)$ – це неперервна бієкція, при цьому простір $X = (K, \mathcal{T}_{n+1}|_K)$ компактний, а простір $Y = (K, \mathcal{T}|_K)$ гаусдорфовий, бо Z вважається гаусдорфовим простором. Тому [11, с. 16] відображення I – це гомеоморфізм, звідки випливає, що $\mathcal{T}|_K = \mathcal{T}_{n+1}|_K$. Оскільки топологія $\mathcal{T}_{n+1}$ метризовна як топологія нормованого простору, то такою ж буде і топологія $\mathcal{T}_{n+1}|_K$, а значить, і $\mathcal{T}|_K$. $\Box$

В наступній лемі ми використовуємо позначення леми 1.

Лема 2. *Для довільних номерів n_1, m_1, n_2, m_2 існують такі номери n і m, що*

$$K_{n_1,m_1} \cup K_{n_2,m_2} \subseteq K_{n,m}.$$

Доведення. Нехай $n = \max\{n_1, n_2\}$. Як легко пояснити, тотожні вкладення $J_{n_i,n} : Z_{n_i} \hookrightarrow Z_n$ при $i = 1, 2$ неперервні, отже, кулі $B_{n_i,m_i} = J_{n_i,n}(B_{n_i,m_i})$ при $i = 1, 2$ будуть обмеженими підмножинами нормованого простору Z_n. Тоді і їхнє об'єднання $S = B_{n_1,m_1} \cup B_{n_2,m_2}$ – це обмежена підмножина в Z_n, отже, існує такий номер m, що $S \subseteq B_{n,m}$. В такому разі з неперервності вкладень $J_{n_i+1,n+1} : Z_{n_i+1} \hookrightarrow Z_{n+1}$ при $i = 1, 2$ негайно випливає, що

$$K_{n_1,m_1} \cup K_{n_2,m_2} = [B_{n_1,m_1}]_{Z_{n_1+1}} \cup [B_{n_2,m_2}]_{Z_{n_2+1}}$$
$$\subseteq J_{n_1+1,n+1}([B_{n_1,m_1}]_{Z_{n_1+1}}) \cup$$
$$\cup J_{n_2+1,n+1}([B_{n_2,m_2}]_{Z_{n_2+1}}) \subseteq$$
$$\subseteq [J_{n_1+1,n+1}(B_{n_1,m_1})]_{Z_{n+1}} \cup$$
$$\cup [J_{n_2+1,n+1}(B_{n_2,m_2})]_{Z_{n+1}} =$$
$$= [B_{n_1,m_1} \cup B_{n_2,m_2}]_{Z_{n+1}} = [S]_{Z_{n+1}} \subseteq$$
$$\subseteq [B_{n,m}]_{Z_{n+1}} = K_{n,m}. \Box$$

3. Різні класи просторів, близьких до метризовних та основний результат. Нагадаємо, що топологічний простір Z називається *σ-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_n, при цьому послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням простору Z*. Якщо σ-метризовний простір Z має таке вичерпування $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$, що для кожної збіжної в Z послідовності $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ існує номер m, для якого $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_m$, то він називається *сильно σ-метризовним*, а якщо кожна компактна в Z множина K міститься у деякому дограничному просторі Z_m, то Z називається *супер-σ-метризовним.* Зрозуміло, що кожен супер-σ-метризовний простір є сильно σ-метризовним, а цей, у свою чергу, є σ-метризовним. Крім того, гаусдорфовий сильно σ-метризовний простір є супер-σ-метризовним [6, теорема 2.1.3, с.39].

Теорема 1. *Нехай $Z = \lim\operatorname{ind} Z_n$ – індуктивна границя регулярної послідовності нормованих просторів $(Z_n, \|\cdot\|_n)$, яка є гаусдорфовим простором. Тоді Z – це супер-σ-метризовний простір.*

Доведення. Розглянемо кулі $B_{n,m} = \{z \in Z_n : \|z\|_n \le m\}$ і їх замикання $K_{n,m} = [B_{n,m}]_{Z_{n+1}}$. За доведеним у лемі 1 підпростори $K_{n,m}$ простору Z є метризовними компактами. Перенумеруємо подвійну послідовність $(K_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ у звичайну послідовність $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Для кожного номера k покладемо $P_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} K_j$. Зрозуміло, що P_k – це компактний підпростір гаусдорфового простору Z, а значить, і замкнений у Z. Для кожного $j = 1, ..., k$ існують такі пари $(n_j, m_j) \in \mathbb{N}^2$, що $K_j = K_{n_j,m_j}$. Згідно з лемою 2 існує така пара $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, що

$$P_k = \bigcup_{j=1}^{k} K_{n_j,m_j} \subseteq K_{n,m}.$$

Таким чином, P_k є підпростором метризовного компакту $K_{n,m}$, а отже, і P_k є метризовним.

Оскільки $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{n,m} = Z_n$ для кожного n і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n = Z_n$, то $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} = Z$ і тим більше

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} K_{n,m} = Z.$$

Таким чином, простір Z є σ-метризовним і $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ є його вичерпуванням.

Залишилося довести, що для кожної компактної множини K в Z існує такий номер l, що $K \subseteq P_l$. Компактна множина K простору Z, очевидно, є обмеженою в Z і тому за теоремою Себаштьяна-і-Сільви [12] вона міститься у деякому допграничному просторі Z_n і є там обмеженою. В такому разі існує таке m, що $K \subseteq B_{n,m}$. Оскільки $B_{n,m} \subseteq K_{n,m} = K_l$ для деякого $l \in \mathbb{N}$ і $K_l \subseteq P_l$, то $K \subseteq P_l$, що і треба було довести. $\square$

4. Простори l_p з вагою. Нехай $1 \le p < +\infty$ і

$$l_p = \{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p =$$

$$= (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}$$

– банаховий простір послідовностей скалярів, сумовних з p-тим степенем. Розглянемо покоординатне множення $xy = (\xi_k \eta_k)_{k=1}^{\infty}$ числових послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ і $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$. Для кожної послідовності $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ розглянемо простір $l_p(a)$ з вагою a, що визначається рівністю

$$l_p(a) = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : xa \in l_p\}.$$

Якщо $\alpha_k \neq 0$ для кожного k, то відображення

$$T_a : l_p(a) \to l_p, \quad T_a x = xa,$$

є алгебраїчним ізоморфізмом, і формулою $\|x\|_{p,a} = \|ax\|_p$ визначається норма на $l_p(a)$, відносно якої $l_p(a)$ є банаховим простором, а відображення $T_a : l_p(a) \to l_p$ – ізометрією.

Лема 3. *Нехай $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ і $b = (\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ – числові послідовності, для яких $\alpha_k \neq 0$ і $\beta_k \neq 0$ для кожного k. Тоді:*

а). $l_p(a) \subseteq l_p(b)$ тоді і тільки тоді, коли існує така константа $\gamma > 0$, що

$$|\beta_k| \le \gamma |\alpha_k|$$

для кожного k; при цьому тотожне вкладення $J : l_p(a) \hookrightarrow l_p(b)$ неперервне;

б). Тотожне вкладення $J : l_p(a) \hookrightarrow l_p(b)$ буде компактним тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} = 0.$$

Доведення. а). Припустимо, що існує така константа $\gamma > 0$, що $|\beta_k| \le \gamma|\alpha_k|$ для кожного номера k. Нехай $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p(a)$. Тоді $xa = (\xi_k \alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$, тобто ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k|^p$ збігається. Оскільки

$$|\beta_k \xi_k|^p = \frac{|\beta_k|^p}{|\alpha_k|^p} \cdot |\alpha_k \xi_k|^p \le \gamma^p |\alpha_k \xi_k|^p$$

для кожного k, то за першою ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\beta_k\xi_k|^p$ збігається, причому

$$\|x\|_{p,b}=(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\gamma(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}=\gamma\|x\|_{p,a}.$$

Це доводить, що $x\in l_p(b)$, отже, $l_p(a)\subseteq l_p(b)$, причому тотожне вкладення $J:l_p(a)\hookrightarrow l_p(b)$ неперервне.

Нехай, навпаки, $l_p(a)\subseteq l_p(b)$, і $J:l_p(a)\hookrightarrow l_p(b)$ – тотожне вкладення. Легко перевірити, що лінійний оператор J має замкнений графік. Справді, нехай $x_n=(\xi_{n,k})_{k=1}^{\infty}\in l_p(a)$, $x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\in l_p(a)$, $y=(\eta_k)_{k=1}^{\infty}\in l_p(b)$, $x_n\to x$ в $l_p(a)$ і $y_n=Jx_n=x_n\to y$ в $l_p(b)$. Доведемо, що $y=Jx=x$. Оскільки $|\xi_{n,k}-\xi_k|=\frac{1}{|\alpha_k|}|\alpha_k(\xi_{n,k}-\xi_k)|\leq\frac{1}{|\alpha_k|}\|x_n-x\|_{p,a}$ і так само $|\xi_{n,k}-\eta_k|\leq\frac{1}{|\beta_k|}\|x_n-y\|_{p,b}$, то $\xi_{n,k}\to\xi_k$ і $\xi_{n,k}\to\eta_k$ при $n\to\infty$, отже, $\xi_k=\eta_k$ для кожного k, тобто $y=x$. За теоремою про замкнений графік [14, с. 148] оператор J буде неперервним, адже $l_p(a)$ і $l_p(b)$ – це банахові простори. Тому існує така константа $\gamma>0$, що $\|x\|_{p,b}\leq\gamma\|x\|_{p,a}$ для кожного $x\in l_p(a)$. Якщо взяти $x=e_k=(\delta_{k,j})_{j=1}^{\infty}$, де $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера, то ми отримаємо

$$|\beta_k|=\|e_k\|_{p,b}\leq\gamma\|e_k\|_{p,a}=\gamma|\alpha_k|,$$

що і треба було довести.

б). Нехай $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}=0$. Зрозуміло, що тоді існує така константа $\gamma>0$, що $|\beta_k|\leq\gamma|\alpha_k|$ для кожного k, адже кожна збіжна числова послідовність є обмеженою. Тому $l_p(a)\subseteq l_p(b)$ і тотожне вкладення $J:l_p(a)\hookrightarrow l_p(b)$ – це лінійний неперервний оператор.Розглянемо послідовність скінченновимірних операторів $J_n:l_p(a)\to l_p(b)$, $J_nx=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$, де $x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\in l_p(a)$. Оскільки

$$\|(J-J_n)x\|_{p,b}=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\beta_k|^p|\alpha_k|^p)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\frac{\beta_k}{\alpha_k}|^p|\alpha_k\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}\leq\sup_{k>n}|\frac{\beta_k}{\alpha_k}|\|x\|_{p,a}$$

для кожного $x\in l_p(a)$, то $\|J_n-J\|\leq\gamma_n=\sup\limits_{k>n}|\frac{\beta_k}{\alpha_k}|$. А за умовою $\frac{\beta_k}{\alpha_k}\to0$ при $k\to\infty$, отже, і $\gamma_n\to0$ при $n\to\infty$, таким чином, $J_n\to J$ у просторі $L(l_p(a),l_p(b))$ всіх лінійних неперервних операторів з операторною нормою. Оскільки всі оператори J_n компактні як скінченновимірні, то таким буде і оператор J [15, с. 332].

Припустимо, що $\frac{\beta_k}{\alpha_k}\not\to0$ при $k\to\infty$. Тоді існують $\varepsilon>0$ і строго зростаюча послідовність номерів k_j, такі, що $|\frac{\beta_k}{\alpha_k}|\geq\varepsilon$ для кожного j. Розглянемо послідовність точок $x_j=\frac{1}{|\alpha_{k_j}|}e_{k_j}$ з простору $l_p(a)$. Оскільки

$$\|x_j\|_{p,a}=\frac{1}{|\alpha_{k_j}|}|\alpha_{k_j}|=1$$

для кожного j, то послідовність $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ буде обмежена в $l_p(a)$. Але для довільних різних номерів i та j будемо мати

$$\|x_i-x_j\|_{p,b}=\left(\left|\frac{\beta_{k_i}}{\alpha_{k_j}}\right|^p+\left|\frac{\beta_{k_j}}{\alpha_{k_j}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq2^{\frac{1}{p}}\varepsilon.$$

Ця нерівність показує, що з послідовності точок $x_j=Jx_j$ у просторі $l_p(b)$ не можна виділити збіжної в $l_p(b)$ послідовності, бо така підпослідовність не буде фундаментальною. Таким чином, оператор вкладення $J:l_p(a)\hookrightarrow l_p(b)$ не буде компактним. $\Box$

5. Вагові простори Кете. Розглянемо послідовність $\mathbf{r}=(r_n)_{n=1}^{\infty}$, де $r_n=(\rho_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ і $\rho_{n,k}>0$ для довільних номерів n і k. Припустимо, що всі послідовності

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\left(\frac{\rho_{n+1,k}}{\rho_{n,k}}\right)_{k=1}^{\infty}$$

обмежені. Тоді $l_p(r_n)\subseteq l_p(r_{n+1})$ для кожного n, причому всі тотожні вкладення $l_p(r_n)\hookrightarrow l_p(r_{n+1})$ неперервні. Тому ми можемо розглянути простір

$$l_p[\mathbf{r}]=\bigcup_{n=1}^{\infty}l_p(r_n)=\lim\mathrm{ind}l_p(r_n),$$

який називається *ваговим простором Кете з показником* p. З леми 3б негайно випливає, що коли $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\rho_{n+1,k}}{\rho_{n,k}}=0$ для кожного n, то послідовність банахових просторів $l_p(r_n)$ буде регулярною. Крім того, ваговий простір $l_p[\mathbf{r}]$ буде гаусдорфовим, адже його топологія мажорує топологію покоординатної збіжності на $l_p[\mathbf{r}]$, яка є гаусдорфовою. Таким чином, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\rho_{n+1,k}}{\rho_{n,k}} = 0$ для кожного n, то $l_p[\mathbf{r}]$ – це супер-σ-метризовний простір на основі теореми 1. У випадку степеневих ваг $\rho_{n,k} = \rho_n^k$, де $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ – строго спадна послідовність додатних чисел, яка прямує до числа R, ми будемо мати, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\rho_{n+1,k}}{\rho_{n,k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)^k = 0,$$

адже $0 < \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} < 1$ для кожного n. Тому послідовність банахових просторів $l_p(r_n)$ у цьому випадку є регулярною. Крім того, простір $l_p[\mathbf{r}]$ збігається з простором $\overline{\mathfrak{A}}_R$ всіх послідовностей тейлорівських коефіцієнтів аналітичних у замкненому крузі $|z| \leq R$ функцій з його топологією. Отже, $\overline{\mathfrak{A}}_R$ – це супер-σ-метризовний простір.

6. Застосування до нарізно неперервних відображень. З теореми 1 випливає, що результати про неперервність відображень зі значеннями в супер-σ-метризовних просторах і сильно σ-метризовних просторах (див. дисертацію [6] і вказану там літературу та статтю [13]) можуть бути перенесені на той випадок, коли простір значень – це гаусдорфова індуктивна границя регулярної послідовності нормованих просторів, зокрема, на простір $\overline{\mathfrak{A}}_R$. Сформулюємо для прикладу два такі результати.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – гаусдорфова індуктивна границя регулярної послідовності нормованих просторів і $F : X \to Y$ – неперервне знизу компактнозначне відображення. Тоді множина тих точок з X, в яких F неперервне зверху, є залишковою в X.*

Теорема 3. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – гаусдорфова індуктивна границя регулярної послідовності нормованих просторів і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення. Тоді:*

а) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ є залишковою в X;

б) якщо Y – метризовний компакт, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 3. – 1899. – **3**. – P. 1-123.
2. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: дис. ... доктора фіз.-мат. наук : 01.01.01. – Чернівці, 1999. – 345 с.
3. *Михайлюк В.В.* Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень: дис. ... доктора фіз.-мат. наук : 01.01.01. – Чернівці, 2008. – 333 с.
4. *Маслюченко О.В.* Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів : дис. ... доктора фіз.-мат. наук : 01.01.01; Чернів. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича. – Чернівці, 2012. – 300 с.
5. *Gruenhage G.* Generalized metric spaces // Handbook of Set-Theoretic Topology. – Amsterdam : North-Holland, 1984. – P. 423-501.
6. *Філіпчук О.І.* Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01; Чернів. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича. – Чернівці, 2010. – 124 с.
7. *Мироник О.Д.* Вичерпні, напіввичерпні простори та нарізно неперервні відображення : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01; Чернів. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича. – Чернівці, 2015. – 159 с.
8. *Piotrowski Z.* Mibu-type theorems // Proceedings of the 7th International Symposium, 20-26 September 1993, Poland. – P. 141-147.
9. *Piotrowski Z.* On the theorems of Y. Mibu and G. Debs on separate continuity // Internat. J. Math. Math. Sci. – 1996. – **19**, №3. – P. 495-500.
10. *Hola L., Piotrowski Z.* Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **42**. – P. 149–160.
11. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці : Рута, 2002. – 72 с.
12. *Ж. Себаштьян-и-Сильва.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. – 1957.– **I**, №1. – С.60–77.
13. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теорем Дебса про многозначні відображення // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 191-192. Математика. – Чернівці : Рута, 2004. – С. 61-66.
14. *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.2.Лінійні оператори і функціонали. – Чернівці : ЧНУ, 2010. – 192 с.
15. *Кадець В.М.* Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів : Чижиков І. Е., 2012. – 589 с.