УДК 517.51

©2015 р. **М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва**

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З Δ^{μ}-ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

У роботі вивчаються функції з фрактальними властивостями, які визначені у термінах Δ^{μ}-зображення числа з нескінченним алфавітом $A = \mathbb{N}$:

$$(0;1] \ni x = \sum_n (B_n - B'_n) \equiv \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},$$

де $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$, ${B_n}' = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}$, $(0;1) \ni \mu$ — фіксований параметр, (a_n) — послідовність натуральних чисел, залежна від числа x. Це функції:

$$f\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_2 a_1 a_4 a_3 \ldots},\ \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_3 a_4]\ldots},\ \gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_2 a_3]\ldots}.$$

Досліджуються структурні властивості самої функції і фрактальні (самоподібні, самоафінні тощо) властивості суттєвих для неї множин.

In the paper, we consider functions with fractal properties defined in terms of Δ^{μ}-representation of a number with infinite alphabet $A = \mathbb{N}$:

$$(0;1] \ni x = \sum_n (B_n - B'_n) \equiv \Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},$$

where $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$, ${B_n}' = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}$, $(0;1) \ni \mu$ is a fixed parameter, and (a_n) is a sequence of positive integers depending on a number x. Functions

$$f\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{a_2 a_1 a_4 a_3 \ldots},\ \varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_3 a_4]\ldots},\ \gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\right) = \Delta^{\mu}_{[a_1 a_2][a_2 a_3]\ldots}$$

are among them. Structural properties of the function and fractal (self-similar, self-affine, etc.) properties of essential sets for this function are studied.

Вступ. Фрактальні властивості функцій досліджуються в різних аспектах [1, 2, 7-10, 12-18, 20-25]. Вивчаються фрактальні властивості їх рівнів [10, 18], графіків [24], множин особливостей [8, 12], атракторів одновимірних динамічних систем [2], породжених функцією, деформації фрактальних властивостей множин під дією функції [8] тощо. При цьому розв'язуються задачі конструктивної та загальної теорії функцій. Особлива увага приділяється неперервним функціям [1, 10, 15, 16, 18, 25], для яких необхідною умовою фрактальності їх графіка (як множини простору $\mathbb{R}^2$) є глобальна або локальна ніде не монотонність, або навіть звивистість [16, 18], та існування принаймні одного континуального рівня.

Однією з достатньо плідних ідей теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу [17]) є ідея автомодельності [1] (самоподібності, самоафінності тощо). Серед неперервних на $[0;1]$ функцій, які мають складні локальні властивості, саме такі складають в деякій мірі найпростіший клас. Локально-неоднорідні структурні та тополого-метричні властивості суттєвих для таких функцій множин є ознакою їх фрактальних властивостей.

Серед сучасних прийомів моделювання і дослідження функцій зі складними локальними властивостями є різні системи зображення (кодування) чисел, зокрема такі, що використовують нескінченний алфавіт [12-14,19]. Саме таке кодування дійсних чисел, що породжене однопараметричним узагальненням φ_{μ} відомої сингулярної строго зростаючої функції ? Мінковського $[5, 11, 3, 4, 6]$, запропоноване в роботах $[20, 21]$, використовується у даній роботі для конструювання фрактальних функцій, яке обґрунтовує наступна теорема.

Твердження А ([19]). *Нехай μ — фіксоване число з інтервалу $(0, 1)$. Для будь-якого $x \in (0, 1]$ існує скінченний набір $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ або послідовність натуральних чисел (a_n) такі, що*

$$x = \sum_n (B_n - B'_n),$$

де $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}}$, $B_n{}' = (1-\mu)^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}-1}\mu^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}$.

Подання числа x у формі наведеного знакозмінного ряду ми називаємо Δ^μ-*представленням* числа, а його символічний запис $\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_n(\varnothing)}$ у випадку скінченного розкладу числа x та $\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ у випадку нескінченної суми — Δ^μ-*зображенням.*

Існує зліченна всюди щільна множина чисел, які мають два Δ^μ-зображення. Це числа виду:

$$\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots[a_{2k-1}+1](\varnothing)} = \Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}1(\varnothing)}.$$

Зазначимо, що одне з таких зображень має парну кількість цифр, а інше — непарну.

Множину всіх чисел, що мають єдине (тобто нескінченне) Δ^μ-зображення позначатимемо через H, а множину тих чисел, що мають скінченне Δ^μ-зображення, — через S.

Зауважимо, що при раціональному μ зображення називається *раціональним* Δ^μ-*зображенням.* Для нього ірраціональні числа мають нескінченне неперіодичне Δ^μ-зображення, а раціональні — можуть мати скінченне, нескінченне періодичне, а також нескінченне неперіодичне Δ^μ-зображення [19].

У задачах метричної теорії чисел, яка займається задачами про міру Лебега множин чисел, визначених умовами на їх зображення, можна нехтувати множинами нульової міри (нуль-множинами), до яких зокрема відносяться всі зліченні множини. Що ми далі і робимо.

Дана робота присвячена дослідженню фрактальних властивостей функцій, пов'язаних з Δ^μ-зображенням, визначених на множині H рівностями:

1) $f\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^\mu_{a_2a_1a_4a_3\ldots}$;

2) $\varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^\mu_{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots}$;

3) $\gamma\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^\mu_{[a_1a_2][a_2a_3]\ldots}$.

Відповідність, визначена в такий спосіб, є коректно означеною функцією, якщо двом різним Δ^μ-зображенням аргумента вона приписує однакові значення. Функції, що досліджуються у роботі, є коректно визначеними на множині H. Їх можна коректно довизначити і на множині S, якщо домовитись вживати лише одне з двох існуючих зображень Δ^μ-скінченних чисел.

1. Функція $f(x)$ та її властивості.

Розглядається функція f, яка на множині H визначається рівністю:

$$y = f\left(\Delta^\mu_{a_1a_2a_3a_4\ldots}\right) = \Delta^\mu_{a_2a_1a_4a_3\ldots}. \qquad (1)$$

Легко бачити, що для будь-якого $x \in (0; 1)$ має місце рівність $f(f(x)) = x$. З цього випливає, що графік функції f симетричний відносно прямої $y = x$.

Теорема 1. *Функція f володіє наступними властивостями:*
1) *вона є бієктивним відображенням;*
2) *має зліченну всюди щільну множину точок розриву першого роду, а саме:*
у точках виду $\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$ *зі стрибком*

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}}\mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}}\left(1-\mu^i\right),$$

у точках виду $\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ *зі стрибком*

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k-2}+i-1}\times$$
$$\times\mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-3}+1}\left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right),$$

у точках, що мають нескінченне Δ^μ-зображення, функція має усувний розрив;
3) *частина*

$$\Gamma^i_f \equiv \{(x; y):\ \ x \in \Delta^\mu_{ii},\ i \in \mathbb{N},\ \ y = f(x)\}$$

графіка Γ_f функції f подібна всьому графіку з коефіцієнтом подібності $k = (1-\mu)^i\mu^i$, причому $\Gamma^i_f = \psi_i(\Gamma_f)$, де

$$\psi_i : \begin{cases} x' &= (1-\mu)^i\mu^i \cdot x + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i), \\ y' &= (1-\mu)^i\mu^i \cdot y + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i). \end{cases}$$

Графік функції f є N-самоафінною множиною, причому $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \psi_i(\Gamma_f)$, де

$$\psi_i : \begin{cases} x' &= \Delta^{\mu}_{ija_1(x)a_2(x)\ldots}, \\ y' &= \Delta^{\mu}_{jia_2(x)a_1(x)\ldots} \end{cases}$$

з N-самоподібною розмірністю

$$x = -\frac{1}{\log_2(1-\mu)\mu};$$

4) *перетворення f зберігає частоти цифр Δ^{μ}-зображення.*

Доведення. 1) Бієктивність (ін'єктивність та сюр'єктивність) відображення f випливає з єдиності Δ^{μ}-зображення чисел з множини H і означення функції.

2.1) Дослідимо поведінку функції f в правому і лівому ε-півоколах точки

$$x_0 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}.$$

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j \to \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} D_1 &= \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{j\to\infty} f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(\varnothing)}\right) = \\ &= \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}1ij(\varnothing)} = \\ &= \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}1i(\varnothing)}. \end{aligned}$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$\begin{aligned} D_2 &= \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{j\to\infty} f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(\varnothing)}\right) = \\ &= \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}j[i+1](\varnothing)} = \\ &= \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots a_{2k}a_{2k-1}(\varnothing)}. \end{aligned}$$

Величина стрибка функції f у точці x_0 дорівнює різниці $|D_1 - D_2|$:

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}} \mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1}} \left(1-\mu^i\right).$$

2.2) Дослідимо тепер поведінку функції f в правому і лівому ε-півоколах точки

$$x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}.$$

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j}$, де $j \to \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} D_3 &= \lim_{x\to x_1+0} f(x) = \lim_{j\to\infty} f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j(\varnothing)}\right) = \\ &= \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots[i+1]a_{2k-1}j(\varnothing)} = \\ &= \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots[i+1]a_{2k-1}(\varnothing)}. \end{aligned}$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j}$, де $j \to \infty$, то

$$\begin{aligned} D_4 &= \lim_{x\to x_1-0} f(x) = \lim_{j\to\infty} f\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j(\varnothing)}\right) = \\ &= \lim_{j\to\infty} \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots ia_{2k-1}j1(\varnothing)} = \\ &= \Delta^{\mu}_{a_2a_1\ldots ia_{2k-1}(\varnothing)}. \end{aligned}$$

Величина стрибка функції f у точці x_1 дорівнює різниці $|D_3 - D_4|$:

$$(1-\mu)^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k-2}+i-1} \times$$
$$\times \mu^{a_1+a_3+\ldots+a_{2k-3}+1} \left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right).$$

3) Справді, якщо $(x; y) \in \Gamma_f$ і

$$\begin{cases} x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2a_3a_4\ldots}, \\ y = \Delta^{\mu}_{a_2a_1a_4a_3\ldots}, \end{cases}$$

то точка $(x'; y')$, отримана в результаті перетворення подібності

$$\begin{cases} x' &= (1-\mu)^i \mu^i \cdot x + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i) = \\ &= \Delta^{\mu}_{iia_1a_2\ldots}, \\ y' &= (1-\mu)^i \mu^i \cdot y + (1-\mu)^{i-1}(1-\mu^i) = \\ &= \Delta^{\mu}_{iia_2a_1\ldots}, \end{cases}$$

теж належить графіку Γ_f, причому образом Γ_f є множина Γ^i_f. Більше того,

$$\psi(\Gamma_f) = \Gamma^i_f \quad \text{і} \quad \Gamma_f = \bigcup_{i=1}^{\infty} \psi_i(\Gamma_f).$$

Оскільки $\Gamma_f \overset{((1-\mu)\mu)^i}{\sim} \Gamma^i_f$, то її N-самоподібна розмірність є розв'язком рівняння

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((1-\mu)\mu)^{kx} = 1,$$

звідки $x = -\dfrac{1}{\log_2(1-\mu)\mu}$.

4) Нехай $N_i(x, k)$ — кількість символів «i» в Δ^{μ}–зображенні числа x до k-го місця

включно. Нагадаємо, що границя (якщо вона існує)

$$\nu_i\left(x, \Delta^\mu\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$$

називається *частотою цифри «i»* в Δ^μ−зображенні числа x.

Кажуть, що перетворення f зберігає частоти цифр Δ^μ−зображення, якщо

$$\nu_i\left(f(x), \Delta^\mu\right) = \nu_i\left(x, \Delta^\mu\right).$$

Оскільки для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$N_i(y, 2k) = N_i(x, 2k),$$

$$N_i(y, 2k+1) = N_i(x, 2k) + \varepsilon_i(x),$$

де $\varepsilon_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad a_{2k+1}(x) \neq i, \\ 1, & \text{якщо} \quad a_{2k+1}(x) = i, \end{cases}$
тому має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(y,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} + 0$$

у випадку існування останньої границі або ж обидві границі не існують одночасно. Теорему 1 доведено.

2. Функція $\varphi(x)$ та її властивості.

Розглядається функція, яка на множині H визначена рівністю:

$$y = \varphi\left(\Delta^\mu_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}\ldots}\right) = \Delta^\mu_{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots}, \quad (2)$$

першою цифрою Δ^μ-зображення якої є добуток a_1a_2 перших двох цифр аргумента, другою — добуток a_3a_4 і т.д.

Теорема 2. *Функція φ володіє наступними властивостями:*
1) *відображення φ є сюр'єктивним, але не є ін'єктивним;*
2) *має зліченну всюди щільну множину точок розриву першого роду, а саме*
у точках виду $\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i-1} \cdot \mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}},$$
якщо k — парне,
$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1} \cdot \mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i},$$
якщо k — непарне;

у точках виду $\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times \\ \times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}i}\left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right),$$
якщо k — парне,
$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}i-1}\times \\ \times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}\left(1-(1-\mu)^{a_{2k-1}}\right),$$
якщо k — непарне;

у точках, що мають нескінченне Δ^μ-зображення, функція має усувний розрив;
3) *є ніде не монотонною функцією;*
4) *якщо в Δ^μ-зображенні числа $y_0 \in H$ міститься нескінченна кількість цифр, відмінних від 1, то рівень $\varphi^{-1}(y_0)$ функції φ є континуальним; рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^\mu_{c_1\ldots c_m(1)}\right)$ є скінченним, причому $\varphi^{-1}\left(\Delta^\mu_{(1)}\right) = \Delta^\mu_{(1)}$.*

Доведення. 1) Оскільки функція φ визначена на множині H, то множиною значень функції буде також множина H. Тому сюр'єктивність відображення φ очевидна.

Для різних значень аргумента, наприклад, для

$$x = \Delta^\mu_{a_1a_2(1)} \neq \Delta^\mu_{a_2a_1(1)} = x'$$

значення функції φ співпадають

$$y = \varphi(x) = \varphi(\Delta^\mu_{a_1a_2(1)}) = \Delta^\mu_{[a_1a_2](1)} =$$
$$= \Delta^\mu_{[a_2a_1](1)} = \varphi(\Delta^\mu_{a_2a_1(1)}) = \varphi(x').$$

Отже, відображення φ не є ін'єктивним.

2.1) Дослідимо поведінку функції $\varphi(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки

$$x_0 = \Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}.$$

Можливі випадки: k — парне, k — непарне число.

a) Нехай k — парне число.

Умова $x \to \Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_1 = \lim_{x\to x_0+0} \varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\Delta^\mu_{a_1\ldots a_{2k}i1j(1)}\right) = \\ = \lim_{j\to\infty} \Delta^\mu_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[i\cdot1][j\cdot1](1)} = \\ = (1-\mu)^{a_1a_2-1} - (1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4} + \ldots - \\ -(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$

$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$D_2 = \lim_{x\to x_0-0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\Big(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(1)}\Big) = = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[(i+1)j](1)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}.$$

Величина стрибка у точці x_0, коли k — парне число, дорівнює різниці $|D_1-D_2|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}.$$

b) Нехай k — непарне число.

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_3 = \lim_{x\to x_0+0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(1)}\right) = = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[i\cdot 1][j\cdot 1](1)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$D_4 = \lim_{x\to x_0-0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(1)}\right) = = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[(i+1)j](1)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}.$$

Величина стрибка у точці x_0, коли k — непарне число, дорівнює різниці $|D_3-D_4|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}.$$

2.2) Дослідимо тепер поведінку функції $\varphi(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки $x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$. Також можливі випадки: k — парне, k — непарне число.

a) Нехай k — парне число.

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_5 = \lim_{x\to x_1+0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\Big(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j(1)}\Big) = = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}(i+1)]}_{\text{парне}}[j\cdot 1](1)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}i+a_{2k-1}}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j}$, де $j\to\infty$, то

$$D_6 = \lim_{x\to x_1-0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j(1)}\right) = = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-3}a_{2k-2}][a_{2k-1}i]}_{\text{парне}}[1\cdot j](1)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}i}.$$

Величина стрибка у точці x_1, коли k — парне число, дорівнює різниці $|D_5-D_6|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}i}\left(1-\mu^{a_{2k-1}}\right).$$

b) Нехай k — непарне число.

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_7 = \lim_{x\to x_1+0}\varphi(x) = \lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j(1)}\right) = = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}(i+1)]}_{\text{непарне}}[j\cdot 1](1)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}i+a_{2k-1}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}.$$

Оскільки умова $x\to\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x\in\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j}$, де $j\to\infty$, то

$$D_8=\lim_{x\to x_1-0}\varphi(x)=\lim_{j\to\infty}\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j(1)}\right)=$$
$$=\lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-3}a_{2k-2}][a_{2k-1}i]}_{\text{непарне}}[1\cdot j](1)}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}i-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}.$$

Величина стрибка у точці x_1, коли k — непарне число, дорівнює різниці $|D_7-D_8|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}i-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}\left(1-(1-\mu)^{a_{2k-1}}\right).$$

3) Для доведення ніде не монотонності покажемо, що для будь-якого циліндра рангу $2k$ знайдеться циліндр рангу $2k+2$ такий, що прирости

$$\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right)\quad\text{і}\quad\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}ij}\right)$$

набувають різних знаків.

Позначимо кінці циліндра $\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}$ через

$$x_1=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}[a_{2k-1}+1](\varnothing)}\quad\text{і}$$
$$x_2=\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}[a_{2k}+1](\varnothing)}.$$

Приріст на цьому циліндрі

$$\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right)=\varphi(x_2)-\varphi(x_1).$$

Можливі випадки:

$$1.\,\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right)=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=$$
$$=\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}[a_{2k}+1](\varnothing)}\right)-$$
$$-\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}[a_{2k-1}+1](\varnothing)}\right)=$$
$$=\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}(a_{2k}+1)]}_{\text{парне}}(\varnothing)}-$$
$$-\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-3}a_{2k-2}][a_{2k-1}+1]}_{\text{непарне}}(\varnothing)}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}}-$$
$$-((1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}+1})=$$
$$=-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}+1}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}+1}\times$$
$$\times\left(1-\mu^{a_{2k-1}a_{2k}-1}\right)\geq 0.$$

$$\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}ij}\right)=\varphi(x_2')-\varphi(x_1')=$$
$$=\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}i[j+1](\varnothing)}\right)-$$
$$-\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}\right)=$$
$$=\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[i(j+1)](\varnothing)}-$$
$$-\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{парне}}[i+1](\varnothing)}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i(j+1)-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}-$$
$$-((1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}\times$$
$$\times\,\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}})=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+ij+i-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}}\times$$
$$\times\left((1-\mu)^{ij-1}-1\right)\leq 0.$$

$$2.\,\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}}\right)=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=$$
$$=\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-1}[a_{2k}+1](\varnothing)}\right)-$$
$$-\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}[a_{2k-1}+1](\varnothing)}\right)=$$

$$= \Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}(a_{2k}+1)]}_{\text{непарне}}(\varnothing)} -$$
$$-\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-3}a_{2k-2}][a_{2k-1}+1]}_{\text{парне}}(\varnothing)} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-((1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}) =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+a_{2k-1}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}} =$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-5}a_{2k-4}+a_{2k-1}}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}\times$$
$$\times((1-\mu)^{a_{2k-1}a_{2k}-1}-1)\leq 0.$$

$$\delta_{\varphi}=\delta\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}ij}\right)=\varphi(x_2')-\varphi(x_1')=$$
$$=\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}i[j+1](\varnothing)}\right)-$$
$$-\varphi\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}\right)=$$
$$=\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[i(j+1)](\varnothing)}-$$
$$-\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]}_{\text{непарне}}[i+1](\varnothing)}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+ij+i}-$$
$$-((1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_3a_4}+\ldots+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}}-$$
$$-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i+1})=$$
$$=-(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+ij+i}+$$
$$+(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i+1}=$$
$$=(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times$$
$$\times\mu^{a_3a_4+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+i+1}\left(1-\mu^{ij-1}\right)\geq 0.$$

4) *Множиною рівня* y_0 функції φ називається множина

$$\varphi^{-1}(y_0)=\{x:\ \varphi(x)=y_0\}\,.$$

Нехай $a_{n_k}(y_0)=b_k\neq 1$, $k\in\mathbb{N}$ і $a_j(y_0)=1$ при $j\in\mathbb{N}\backslash(n_k)$. Тоді образом кожного числа x такого, що

$$\begin{cases}\begin{cases}a_{2n_k-1}(x)=b_k,\\ a_{2n_k}(x)=1,\end{cases}\\ a_{2j-1}(x)=a_{2j}(x)=1\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\begin{cases}a_{2n_k-1}(x)=1,\\ a_{2n_k}(x)=b_k,\end{cases}\\ a_{2j-1}(x)=a_{2j}(x)=1\end{cases}$$

є число y_0. Оскільки таких чисел континуальна множина (що легко доводится встановленням бієктивного відображення з відрізком $[0;1]$ за допомогою класичного двійкового зображення), то рівень $\varphi^{-1}(y_0)$ функції φ є континуальним.

Нехай b_j — кількість різних розкладів числа c_j з зображення $\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m(1)}$ числа y_0 на два множники ($j=\overline{1,m}$). Тоді рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{c_1\ldots c_m(1)}\right)$ функції φ є скінченним і містить $\prod\limits_{j=1}^{m}2{\cdot}b_j$ точок. Зокрема, рівень $\varphi^{-1}\left(\Delta^{\mu}_{(1)}\right)$ містить єдину точку. Теорему 2 доведено.

3. Функція $\gamma(x)$ та її властивості.

Розглядається функція, яка на множині H визначена рівністю:

$$y=\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2n-1}a_{2n}\ldots}\right)=\Delta^{\mu}_{[a_1a_2][a_2a_3]\ldots}.\quad(3)$$

Лема 1. *Множина* $C\equiv C\left[\Delta^{\mu},\overline{abcd}\right]$ *є ніде не щільною множиною нульової міри Лебга.*

Доведення. 1. Скористаємось означенням ніде не щільної множини. Нехай $(u;v)$ довільний підінтервал з інтервалу $(0;1)$. $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$ — циліндр, що повністю належить $(u;v)$. Тоді циліндричний інтервал $\nabla^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_mabcd}$, який належить циліндру $\Delta^{\mu}_{c_1c_2\ldots c_m}$ точок множини C не містить. Отже, множина C є ніде не щільною.

2. Нехай $F_0 = (0;1]$. Введемо позначення F_{2k-2} — замикання об'єднання циліндрів рангу $2k-2$, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, тобто

$$F_{2k-2} = \underbrace{\bigcup\bigcup\ldots\bigcup}_{\overline{a_{i-2}a_{i-1}a_ia_{i+2}}\neq\overline{abcd}} \Delta^{\mu}_{a_1a_2\ldots a_{2k-2}}.$$

А множину $\overline{F}_{2k+2}$ означимо рівністю

$$\overline{F}_{2k+2} = F_{2k-2} \setminus F_{2k+2}.$$

Тоді $\lambda(\overline{F}_{2k+2}) = \lambda(F_{2k-2}) - \lambda(F_{2k+2})$ або

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = 1 - \frac{\lambda(F_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})}.$$

З означення множин C, F_{2k+2} і $\overline{F}_{2k+2}$ і неперервності міри Лебега λ маємо:

$$\lambda(C) \leq \lambda(F_{2k+2}) \neq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k+2}) \quad \text{і}$$

$$\lambda(C) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{F}_{2k+2}).$$

Очевидно, що $C \subset F_{2k+2} \subset F_{2k-2}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k+2} = \lim_{k\to\infty} F_{2k+2}.$$

Тому $\lambda(C) < \lambda(F_{2k+2})$ і

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k+2}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda(F_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} \cdot \frac{\lambda(F_{2k-2})}{\lambda(F_{2k-6})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_4)}{\lambda(F_0)}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k-2}) - \lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})}\right).$$

Останній нескінченний добуток прямує до нуля тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} = \infty. \qquad (4)$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

$$0 < \frac{\lambda(\overline{F}_{2k+2})}{\lambda(F_{2k-2})} \leq (1-\mu)^{a+c}\mu^{b+d} < 1.$$

Отже, ряд (4) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому $\lambda(C) = 0$. Лему доведено.

Теорема 3. *Функція γ володіє наступними властивостями:*
1) *є відображенням ні сюр'єктивним, ні ін'єктивним;*
2) *має зліченну всюди щільну множину точок розриву першого роду, а саме:*
у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}\times$$

$$\times\left(1-\mu^{a_{2k}}-(1-\mu)^i\right);$$

у точках виду $\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}$ зі стрибком

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}i-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}\times$$

$$\times\left(1-\mu^i-(1-\mu)^{a_{2k-1}}\right);$$

у точках, що мають нескінченне Δ^{μ}-зображення, функція має усувний розрив;
3) *її множина значень має канторівський тип (є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега) і дробову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.*

Доведення. 1) Наприклад, для різних значень аргумента

$$x = \Delta^{\mu}_{a_1a_2(1)} \neq \Delta^{\mu}_{a_2a_1(1)} = x'$$

значення функції γ співпадають

$$y = \gamma(x) = \gamma(\Delta^{\mu}_{a_1a_2(1)}) = \Delta^{\mu}_{[a_1a_2](1)} =$$

$$= \Delta^{\mu}_{[a_2a_1](1)} = \gamma(\Delta^{\mu}_{a_2a_1(1)}) = \gamma(x') = y.$$

Отже, відображення γ не є ін'єктивним.

А для значення функції $y = \Delta^{\mu}_{1234(1)}$ знайти значення аргументу, Δ^{μ}-символи якого є натуральними, неможливо. Тому відображення γ не є сюр'єктивним.

2.1) Дослідимо поведінку функції $\gamma(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки

$$x_0 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}.$$

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_1 = \lim_{x\to x_0+0}\gamma(x) = \lim_{j\to\infty}\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}i1j(\varnothing)}\right) = \\ = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k}i][i\cdot 1][1\cdot j]}_{\text{парне}}(\varnothing)} = \\ = (1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_2a_3}+\ldots+ \\ +(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times \\ \times\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}- \\ -(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}+ \\ +(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}+i-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$D_2 = \lim_{x\to x_0-0}\gamma(x) = \lim_{j\to\infty}\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k}[i+1]j(\varnothing)}\right) = \\ = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k}(i+1)][(i+1)j]}_{\text{непарне}}(\varnothing)} = \\ = (1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_2a_3}+\ldots+ \\ +(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\times \\ \times\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}- \\ -(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i+a_{2k}}.$$

Величина стрибка у точці x_0 дорівнює різниці $|D_1-D_2|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}a_{2k}-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k}i}\times \\ \times\left(1-\mu^{a_{2k}}-(1-\mu)^i\right).$$

2.2) Дослідимо тепер поведінку функції $\gamma(x)$ в правому і лівому ε-півоколах точки

$$x_1 = \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}.$$

Умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}+0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$D_3 = \lim_{x\to x_1+0}\gamma(x) = \lim_{j\to\infty}\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1]j(\varnothing)}\right) = \\ = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}(i+1)][(i+1)j]}_{\text{парне}}(\varnothing)} = \\ = (1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_2a_3}+\ldots- \\ -(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}-1}\times \\ \times\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}+ \\ +(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+a_{2k-1}i+a_{2k-1}-1}\times \\ \times\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}.$$

Оскільки умова $x \to \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}[i+1](\varnothing)}-0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j}$, де $j\to\infty$, то

$$D_4 = \lim_{x\to x_1-0}\gamma(x) = \lim_{j\to\infty}\gamma\left(\Delta^{\mu}_{a_1\ldots a_{2k-1}i1j(\varnothing)}\right) = \\ = \lim_{j\to\infty}\Delta^{\mu}_{\underbrace{[a_1a_2]\ldots[a_{2k-1}i][i\cdot 1][1\cdot j]}_{\text{непарне}}(\varnothing)} = \\ = (1-\mu)^{a_1a_2-1}-(1-\mu)^{a_1a_2-1}\mu^{a_2a_3}+\ldots+ \\ +(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+a_{2k-1}i-1}\times \\ \times\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}- \\ -(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-3}a_{2k-2}+a_{2k-1}i-1}\times \\ \times\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}+i}.$$

Величина стрибка у точці x_1 дорівнює різниці $|D_3-D_4|$:

$$(1-\mu)^{a_1a_2+\ldots+a_{2k-1}i-1}\mu^{a_2a_3+\ldots+a_{2k-2}a_{2k-1}}\times \\ \times\left(1-\mu^i-(1-\mu)^{a_{2k-1}}\right).$$

3) Легко бачити, що кожне число y, у Δ^{μ}-зображенні якого зустрічається комбінація цифр $1bc$, де $c \not\vdots b$, не має прообразу. Тоді множина значень функції не міститиме чисел, Δ^{μ}-зображення яких містить комбінацію цифр $1bcd$. Тому згідно з лемою 1 вона є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Легко бачити, що множина $E(\gamma)$ значень функції γ містить множину:

$$G = \left\{y:\ y = \Delta^{\mu}_{a_1a_1a_2a_2a_3a_3\ldots},\ \text{де}\, a_n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\right\},$$

яка має додатну фрактальну розмірність меншу 1. Такою ж є і множина $E(\gamma)$, тобто фрактальною множиною канторівського типу. Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що функції, які розглядались, є фрактальними з різних точок зору. Графік першої функції є N-самоафінною множиною, друга функція має множину рівнів з фрактальними властивостями, суттєва для третьої функції множина, а саме: множина її значень, є фрактальною множиною. Детальний опис інших фрактальних властивостей останньої функції, зокрема її множини значень, ми готуємо для іншої статті.

Розглянуті функції є розривними. Окремий інтерес представляють функції і перетворення $(0;1]$ (бієктивні відображення множини на себе), які "зберігають" фрактальні властивості борелівських множин (наприклад, розмірність Гаусдорфа-Безиковича).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M.* On one class of function related to Osrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – **№ 15.** – С. 35-55.

2. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. and Dynam. Sys. – 2004. – **Vol. 24.** – P. 1-16.

3. *Alkauskas G.* Semi-regular continued fractions and an exact formula for the moments of the Minkowski question mark function // Ramanujan J. – 2011. – **Vol. 25, no. 3.** – Pp. 359-367.

4. *Dushistova A. A., Kan I. D., Moshchevitin N. G.* Differentiability of the Minkowski Question mark function // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – **Vol. 401, no. 2.** – Pp. 774-794.

5. *Minkowski H.* Gesammeine Abhandlungen. – Berlin, 1911. – **Vol. 2.** – Pp. 50-51.

6. *Paradis J., Viader P., Bibiloni L.* The derivative of Minkowski's $?(x)$ function // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – **Vol. 253.** – Pp. 107-125.

7. *Peter R. Massopust* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. – Academic Press; 1 edition (January 18, 1995). – 383 p.

8. *Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.* Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Luroth series with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – **Vol. 21, no. 4.** – Pp. 385-401.

9. *Pratsiovytyi M. V., Kovalenko V. M.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on the Vicsek fractal) // Random Oper. Stoch. Equ. – 2015. – **Vol. 23 (3)**. – Pp. 161-168.

10. *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis. – 2013. – **Vol. 7, no. 61-67.** – P. 3155-3169.

11. *Salem R.* On some singular monotonic function which are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53.** – Pp. 427-439.

12. *Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M.* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. –**Vol. 14, no. 1.** – Pp. 145-160.

13. *Барановський О. М., Працьовита І. М., Працьовитий М. В.* Про одну функцію, пов'язану з рядами Остроградського 1-го та 2-го видів // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2009. – **№ 10.** – С. 40-49.

14. *Гончаренко Я. В., Лисенко І. М.* Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – **№ 15.** – С. 100-118.

15. *Замрій І. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. – 2015. – **Том 18, № 1.** – С. 55-64.

16. *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – **№ 12.** – С. 24-36.

17. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

18. *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – **№ 14.** – С. 176-188.

19. *Працьовитий М. В., Ісаєва Т. М.* Δ^μ-зображення як узагальнення $\Delta^\sharp$-зображення і основа нової метричної теорії дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2014. – **№ 16.** – С. 164-186.

20. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – **№ 12.** – С. 59-65.

21. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К.* Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2010. – **№ 11.** – С. 207-213.

22. *Працьовитий М. В., Климчук С. О.* Лінійні фрактали типу Безиковича-Егглстона // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2012. – **№ 13.** – С. 80-93.

23. *Працьовитий М. В., Климчук С. О., Макарчук О. П.* Чистота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифри // Укр.мат.журн. – 2014. – **Том 66, № 3.** – С. 302-310.

24. *Працьовитий М. В., Панасенко О. Б.* Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2009. – **№ 70.** – С. 128-139.

25. *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – **№ 15.** – С. 144-155.