УДК 517.983

©2016 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ ДЕРИВАЦІЙНІ ПАРИ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Описано всі пари лінійних операторів, що діють у просторі аналітичних в довільній області функцій і задовольняють модифіковане операторне рівняння Рубела.

We describe all pairs of linear operators that act in spaces of functions analytic in domains and satisfy the modified Rubel operator equation.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. В [1] Л.А. Рубел поставив і розв'язав задачу про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f) \qquad (1)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше Н.Р. Нандакумар в [2] та Л. Зальцман в [3] різними способами розв'язали задачу Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Узагальнене рівняння Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$ було досліджене в [4]. Дослідження стосовно опису всіх пар лінійних на просторі $\mathcal{H}(G)$ функціоналів, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)L(g) - M(g)M(f)$$

здійснені в [5]–[6]. Ці результати та їх узагальнення систематизовані в [7]. Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів, які задовольняють співвідношення, подібні до (1), на інших функціональних просторах, здійснені в [8]–[9].

В різних роботах розглядалися операторні модифікації співвідношення (1) в певних класах операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В працях [10]-[11] доведено, що кожна деривація $D : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, тобто адитивний на $\mathcal{H}(G)$ оператор, який задовольняє співвідношення

$$D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

для довільних двох функцій $f, g \in \mathcal{H}(G)$, має вигляд: $(Df)(z) = \varphi(z)f'(z)$, де φ – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Зазначимо, що лінійним деривацям на просторі неперервних функцій $C[0,1]$ присвячена робота [12].

Наступним етапом досліджень став розгляд певних мультиплікативних співвідношень для різних класів операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В [13] описано всі адитивні оператори $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, які для деякої відмінної від сталої функції $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$ задовольняють співвідношення

$$T(zf) = \varphi T(f)$$

для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$. В [14] описано всі адитивні оператори $M : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, які задовольнять співвідношення

$$M(fg) = M(f)M(g).$$

При цьому доведено, що кожен з таких операторів необхідно є лінійним і неперервним. В [15] продовжено дослідження мультиплікативних співвідношень у випадку, коли $M : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$.

У зв'язку з цими задачами природним чином виникло питання про знаходження всіх пар лінійних операторів A та B, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і задовольняють операторне рівняння Рубела

$$(A(fg))(z) =$$

$$= (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z) \qquad (2)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Вперше це рівняння було досліджене в [16]. А саме, в [16] було одержано розв'язання цієї задачі в деяких спеціальних класах лінійних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Як відзначили автори в [16], в загальному випадку задача про опис всіх пар лінійних операторів, які на $\mathcal{H}(G)$ задовольняють (2), ними не була розв'язана. Повністю ця задача розв'язана в [17] для випадку простору цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і в [18] для довільного простору аналітичних функцій $\mathcal{H}(G)$. Зазначимо також, що всі розв'язки рівняння (2) в класі лінійних неперервних операторів на просторах функцій, аналітичних в довільних однозв'язних областях були описані у [19]. У [20] описано всі пари лінійних операторів, які діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$ і задовольняють операторне рівняння Рубела (2).

Для випадку довільної однозв'язної області G в [21] описано всі пари лінійних на просторі $\mathcal{H}(G)$ операторів A та B, які задовольняють операторне рівняння, яке є операторним аналогом теореми косинуса

$$(A(fg))(z) =$$

$$= (Af)(z)(Ag)(z) - (Bg)(z)(Bf)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Зазначимо, що всі дериваційні в $\mathcal{H}(G)$ оператори відносно згортки узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва і згортки Дюамеля були описані в [22], [23] відповідно.

В цій статті досліджується узагальнене рівняння Рубела виду

$$(A(fg))(z) =$$

$$= \alpha(Af)(z)(Bg)(z) + \beta(Ag)(z)(Bf)(z) \quad (3)$$

в класі лінійних операторів A та B, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Тут α та β довільні фіксовані комплексні числа. Для розв'язання цієї задачі нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження, які мають також і самостійний інтерес.

Наведемо спочатку опис узагальнених мультиплікативних лінійних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$.

Теорема 1. *Нехай G – довільна область комплексної площини і h – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Для того, щоб існував ненульовий лінійний на просторі $\mathcal{H}(G)$ оператор A, що задовольняє співвідношення*

$$(A(fg))(z) = h(z)(Af)(z)(Ag)(z) \qquad (4)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$, необхідно і достатньо, щоб

$$h(z) \neq 0, \ \forall z \in G \qquad (5)$$

При виконанні умови (5) загальний розв'язок рівняння (4) в класі ненульових лінійних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$ дається формулою

$$Af = \frac{1}{h} f \circ \psi, \qquad (6)$$

де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$.

Доведення. Нехай існує ненульовий лінійний оператор A на просторі $\mathcal{H}(G)$, для якого виконується рівність (4). Покажемо, що тоді виконується умова (5). Доведення проведемо від супротивного. Нехай (5) не виконується. Оскільки $A \neq 0$, то $h(z) \not\equiv 0$ в G. Тому існує точка $z_0 \in G$, для якої $h(z_0) = 0$. Позначимо $A1 = a$. Тоді з (4) при $g = 1$ одержуємо, що

$$(Af)(z)(1 - h(z)a(z)) = 0 \qquad (7)$$

при $z \in G$. Оскільки $A \neq 0$, то з (7) випливає, що $1 - h(z)a(z) = 0$ при $z \in G$. При $z = z_0$ звідси отримуємо суперечність. Отже, (5) виконується.

Опишемо тепер всі ненульові лінійні оператори A на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють (4). Припустимо, що ненульовий лінійний на просторі $\mathcal{H}(G)$ оператор A задовольняє (4). Через A_1 позначимо оператор, який діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом $A_1 f = hAf$. Тоді

$$(A_1(fg))(z) = (A_1 f)(z)(A_1 g)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$.

Надалі через $e(z)$ позначатимемо функцію $e(z) = z$, $z \in G$. Для довільної точки $z \in G$ формулою $L_z(f) = (A_1 f)(z)$ визначається лінійний мультиплікативний функціонал L_z на $\mathcal{H}(G)$. Використовуючи опис лінійних мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, (див., наприклад, [2]) одержуємо, що $L_z = 0$, або $L_z(f) = f(z_0)$, де $z_0 = L_z(e)$, причому $z_0 \in G$. Нехай $L_z \neq 0$ і $A_1(e) = \psi$. Тоді $z_0 = \psi(z)$, причому $\psi(z) \in G$ і тому $L_z(f) = f(\psi(z))$, тобто $(A_1 f)(z) = f(\psi(z))$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$.

Нехай $U = \{z \in G : L_z = 0\}$. Оскільки $A \neq 0$, то $A_1 \neq 0$ і тому $U \neq G$. Покажемо, що $U = \varnothing$. Припустимо, що $U \neq \varnothing$. Використовуючи опис мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, одержимо, що

$$(A_1 f)(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \in U; \\ f(\psi(z)), \text{ якщо } z \in G \setminus U \end{cases}$$

для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$. Отже, функція $A_1(1)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ набуває лише два значення: 0 та 1, що неможливо.

Тому $U = \varnothing$, і ми отримаємо, що $(A_1 f)(z) = (f \circ \psi)(z)$ при $z \in G$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, причому $\psi(G) \subset G$. Тоді оператор A зображається формулою (6).

При виконанні умови (5) для довільної функції $\psi \in \mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$ формулою (6) визначається ненульовий лінійний на просторі $\mathcal{H}(G)$ оператор A, який задовольняє співвідношення (4). Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. *При* $h(z) \equiv 1$ *з теореми 1 одержуємо опис мультиплікативних лінійних операторів на просторі* $\mathcal{H}(G)$. *Іншим методом цей опис одержано в* [14].

Теорема 2. *Нехай* G *– довільна область комплексної площини,* α, β *– довільні комплексні числа. Для того, щоб пара лінійних операторів* A *та* B *на просторі* $\mathcal{H}(G)$ *задовольняла співвідношення* (3) *необхідно і достатньо, щоб*

1° *при* $\alpha = -\beta$ *оператор* A *був нульовим, а* B *– довільним;*

2° *при* $\alpha = \beta \neq 0$ *пара цих операторів визначалася однією з наступних умов:*

1) $A = 0$, B *– довільний лінійний оператор на* $\mathcal{H}(G)$;

2) $A(f) = \varphi \cdot (f \circ \psi)$; $B(f) = \frac{1}{2\alpha} f \circ \psi$, *де* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(G)$, *причому* $\psi(G) \subset G$;

3) $A(f) = \varphi \cdot (f' \circ u)$, $B(f) = \frac{1}{\alpha} f \circ u$, *де* $\varphi, u \in \mathcal{H}(G)$, *причому* $u(G) \subset G$;

4) *оператори* A *та* B *визначаються формулами*

$$(Af)(z) = \\ = \begin{cases} \varphi(z) \dfrac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right) - f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}, & z \in V, \\ \varphi(z) f'(u(z)), \text{ при } z \in G \setminus V; \end{cases}$$

та

$$(Bf)(z) = \\ = \begin{cases} \dfrac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right) + f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\alpha}, \text{ при } z \in V, \\ \frac{1}{\alpha} f(u(z)), \text{ при } z \in G \setminus V, \end{cases}$$

в яких $\varphi, u, v \in \mathcal{H}(G)$, *причому* $v \not\equiv 0$, *а множина* $G \setminus V$ *збігається з множиною нулів функції* $v(z)$; *крім того, функції* $u(z)$ *та* $v(z)$ *є такими, що для функцій* $\chi_1(z) = u(z) + \sqrt{v(z)}$, $\chi_2(z) = u(z) - \sqrt{v(z)}$ *виконуються умови:* $\chi_1(G) \subset G$, $\chi_2(G) \subset G$.

3° *при* $\alpha^2 \neq \beta^2$ *пара цих операторів визначалася однією з наступних умов:*

1) $A = 0$, B *– довільний лінійний оператор на* $\mathcal{H}(G)$;

$$2) \ Af = \frac{a}{(\alpha+\beta)b} f \circ \psi, \ Bf = \frac{1}{\alpha+\beta} f \circ \psi,$$

де $a, b, \psi \in \mathcal{H}(G)$, *причому* $b(z) \neq 0$ *при* $z \in G$ *і* $\psi(G) \subset G$.

Доведення. 1. Нехай $\alpha = -\beta$ і лінійні на просторі $\mathcal{H}(G)$ оператори A та B задовольняють співвідношення (3). Міняючи місцями в (3) f та g і враховуючи (3), одержимо, що $A(fg) = 0$ для $f, g \in \mathcal{H}(G)$. Тому $A = 0$. Зрозуміло, що пара операторів $A = 0$ і довільний лінійний на просторі $\mathcal{H}(G)$ оператор B задовольняють рівність (3).

2. Нехай $\alpha = \beta \neq 0$. Тоді пара лінійних на просторі $\mathcal{H}(G)$ операторів A та B задовольняє співвідношення (3) тоді і тільки тоді, коли пара операторів A та αB задовольняє класичне рівняння Рубела (2). Тому правильність твердження теореми 2 в цьому випадку випливає з основної теореми роботи [18].

3. Нехай тепер $\alpha^2 \neq \beta^2$. Зрозуміло, що пара операторів $A = 0$, B – довільний лінійний оператор на просторі $\mathcal{H}(G)$ задовольняє рівність (3). Тому надалі вважатимемо, що $A \neq 0$ і $B \neq 0$.

Припустимо, що пара ненульових лінійних операторів A та B на просторі $\mathcal{H}(G)$ задовольняє співвідношення (3). Міняючи місцями f та g з (3) одержимо, що

$$(A(fg))(z) =$$

$$= \alpha(Ag)(z)(Bf)(z) + \beta(Af)(z)(Bg)(z) \quad (8)$$

для довільних функцій f, g з простору $\mathcal{H}(G)$. З (3) та (8) випливає, що

$$(Af)(z)(Bg)(z) = (Ag)(z)(Bf)(z) \quad (9)$$

при $z \in G$ для довільних функцій f, g з простору $\mathcal{H}(G)$. Оскільки $B \neq 0$, то існує функція $g_0 \in \mathcal{H}(G)$ така, що $(Bg_0)(z) \not\equiv 0$ в G. Позначимо $Ag_0 = a_0$ і $Bg_0 = b_0$. Покладаючи в (9) $g = g_0$, одержимо, що

$$b_0(z)(Af)(z) = a_0(z)(Bf)(z) \quad (10)$$

при $z \in G$ для довільної функції f з простору $\mathcal{H}(G)$. Оскільки $b_0(z) \not\equiv 0$ в G і $A \neq 0$, то з (10) випливає, що $a_0(z) \not\equiv 0$ в G.

Нехай $S = \{z \in G : a_0(z)b_0(z) = 0\}$. Тоді множина S є скінченною або зліченною. Побудуємо допоміжну функцію $m : S \longrightarrow \mathbb{N}$. Нехай $z \in S$. Якщо $a(z) = 0$, а $b(z) \neq 0$, то вважатимемо, що $m(z)$ дорівнює кратності нуля z для функції a. Якщо $b(z) = 0$, а $a(z) \neq 0$, то $m(z)$ дорівнює кратності нуля z для функції b. Якщо ж $a(z) = b(z) = 0$, то вважатимемо, що $m(z)$ дорівнює максимальній кратності нуля z для функцій a та b.

Нехай d – довільна фіксована функція з простору $\mathcal{H}(G)$, множина нулів якої збігається з множиною S, причому кратність довільного нуля $z \in S$ для функції d дорівнює $m(z)$. Існування функції d випливає з узагальненої теореми Вейєрштрасса (див. [24], стор. 301). При $z \in G \backslash S$ з (10) випливає, що

$$\frac{b_0(z)}{d(z)}(Af)(z) = \frac{a_0(z)}{d(z)}(Bf)(z) \quad (11)$$

для довільної функції f з $\mathcal{H}(G)$. З рівності (11) і визначення функції $d(z)$ випливає, що для довільної точки $z_0 \in S$ і для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ виконується рівність

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{b_0(z)}{d(z)}(Af)(z)\right) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{a_0(z)}{d(z)}(Bf)(z)\right)$$

причому ці границі є скінченними. Тому кожна точка з множини S є усувною особливістю для функції, яка визначається рівністю (11). Для $f \in \mathcal{H}(G)$ покладемо $(Cf)(z) = \frac{b_0(z)}{d(z)}(Af)(z)$ при $z \in G\backslash S$ та $(Cf)(z) = \lim\limits_{t\to z}\left(\frac{b_0(t)}{d(t)}(Af)(t)\right)$ при $z \in S$. З доведеного вище випливає, що оператор C діє в просторі $\mathcal{H}(G)$. Очевидно, що C є лінійним. Позначимо $a(z) = \frac{d(z)}{b_0(z)}$ і $b(z) = \frac{d(z)}{a_0(z)}$. Функції $a(z)$ та $b(z)$ є аналітичними на множині $G\backslash S$ і всі точки з множини S є усувними особливостями для цих функцій. Тому ці функції є аналітичними в G. З формули для визначення оператора C випливає, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G\backslash S$ виконуються рівності

$$(Af)(z) = a(z)(Cf)(z), \quad (12)$$

$$(Bf)(z) = b(z)(Cf)(z). \quad (13)$$

Оскільки оператор C діє в просторі $\mathcal{H}(G)$ і функції a та b належать простору $\mathcal{H}(G)$, то рівності (12) і (13) будуть правильними при всіх $z \in G$.

Підставляючи (12) і (13) в (3) одержимо співвідношення

$$(C(fg))(z) = (\alpha+\beta)b(z)(Cf)(z)(Cg)(z) \quad (14)$$

для знаходження оператора C. Оскільки $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то $C \neq 0$. Крім того, оскільки $\alpha + \beta \neq 0$, то з теореми 1 одержуємо, що $b(z) \neq 0$ при $z \in G$ і оператор C зображається у вигляді

$$Cf = \frac{1}{(\alpha+\beta)b} f \circ \psi, \quad (15)$$

де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$. Підставляючи (15) у (12) і (13), одержимо, що оператори A та B зображаються формулами 2) з пункту 3° теореми

2. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що пара операторів A та B, які визначаються умовами 2) з пункту 3° теореми 2, задовольняє узагальнене рівняння Рубела (3). Теорема доведена.

Зауваження 1. *При доведенні теореми 2 одержано опис розв'язків рівняння виду*

$$AfBg = AgBf. \tag{16}$$

А саме, для того, щоб пара лінійних на просторі $\mathcal{H}(G)$ *операторів* A *та* B *задовольняла співвідношення* (16) *для довільних функцій* $f, g \in \mathcal{H}(G)$ *необхідно і достатньо, щоб ці оператори зображалися у вигляді*

$$Af = a\ Cf,\ \ Bf = b\ Cf,$$

де a, b *– деякі функції з простору* $\mathcal{H}(G)$, *а* C *– лінійний оператор на просторі* $\mathcal{H}(G)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *L. A. Rubel* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funk. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225-227.
2. *N. R. Nandakumar* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535–539.
3. *L. Zalcman* Derivation pairs on algebras of analytic functions // J. Func. Anal. – 1970. – **5**. – №3. – P. 329–333.
4. *Ю.С. Лінчук* Узагальнене рівняння Рубела // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2011. – **1**. – №4. – С. 88-90.
5. *N. R. Nandakumar* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari. – 1998. – **68**. – P. 13–17.
6. *Pl. Kannappan, N. R. Nandakumar* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aequationes Mathematicae – 2001.– **61.** – №3. – P. 233-238.
7. *Pl. Kannappan* Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009. – 810 p.
8. *Ю.С. Лінчук* Про одне узагальнення похідної добутку // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**. – №1. – С. 56-58.
9. *Ю.С. Лінчук* Про рівняння Нандакумара-Каннапана // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**. – №4. – С. 83-86.
10. *J. Becker* A note on derivations of algebras of analytic functions // J. Reine Angew. Math. – 1978. – **297**. – P. 211-213.
11. *N.R. Nandakumar* An application of Nienhuys-Thiemanns theorem to ring derivations on H(G) // Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch – 1988. – **91**. – P. 199-203
12. *Y. Watatani* Derivations on continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **79**. – №2. – P. 206
13. *R. B. Burckel, S. Saeki* Additive mappings on rings of holomorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **89**. – №1. – P. 79-85
14. *N.R. Nandakumar* Ring homomorphisms on H(G) // Int. J. Math. Sci. – 1990. – **13**. – №2. – P. 393-396.
15. *N.R. Nandakumar* Ring homomorphisms on algebras of analytic functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. – 1990. – **44**. – P. 37-43.
16. *A. K. Gaur, N. R. Nandakumar* Derivation pairs of operators on algebras of analytic functions // Functional analysis, Narosa. – 1998. – P 104–110.
17. *Ю.С. Лінчук* Дериваційні пари операторів у просторі цілих функцій // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**. – № 3–4. – С. 84-88.
18. *Yu.S. Linchuk* On Rubel's Problem in the class of linear operators on the space of analytic functions // Complex Anal. Oper. Theory. – 2014. – **8**. – №8. – P. 1741-1745.
19. *Ю.С. Лінчук* Операторне узагальнення одного результата Рубела // Укр. мат. журн.– 2011. – **63**. – №12. – С 1710-1716.
20. *Ю.С. Лінчук* Дериваційні пари операторів з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$ // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**. – №2-3. – С. 139-143.
21. *Yu. S. Linchuk* On an operator analog of the cosine addition theorem // J. Math. Sci.– 2014. – **200**. – №3. – P. 345-351.
22. *S. S. Linchuk Yu. S. Linchuk* A description of derivation operators with respect to convolution of generalized Gel'fond-Leont'ev integration // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2015. – **18**. – №4.– P. 972-981.
23. *Yu. S. Linchuk* On derivation operators with respect to the Duhamel convolution in the space of analytic functions // Math. Commun. – 2015. – **20**. – №1. – P. 17-22.
24. *А.И. Маркушевич* Теория аналитических функций. Том 2. – М.: Наука, 1968.– 624 с.