УДК 517.9

©2016 р. Я.Й. Бігун, І.В. Краснокутська, Р.І. Петришин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ І ТОЧКОВИМИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Розглянуто багаточастотну систему рівнянь із лінійно перетвореними аргументами та з точковими й інтегральними умовами. Досліджено існування та єдиність розв'язку задачі. На підставі оцінки осциляційних інтегралів обґрунтовано метод усереднення та одержано оцінку похибки методу усереднення для повільних змінних.

The multifrequency system of equations with linearly transformed arguments and with point and integral conditions is considered. The existence and uniqueness of solution of the problem are investigated. The averaging method is justified based on evaluation of oscillating integrals and the estimation error of averaging method for slow variables is obtained.

1. Вступ

Методом усереднення багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \varphi, \varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi, \varepsilon)$$

з інтегральними умовами досліджувались у працях [1, 2] та ін. Зокрема, у роботі [1] здійснено усереднення як у системі диференціальних рівнянь, так і в інтегральних умовах й одержано асимптотичну оцінку похибки методу усереднення.

Аналогічна задача для багаточастотних систем із лінійно перетвореними аргументами у резонансному випадку розглянута у працях [3–5]. Асимптотика оцінки у цьому випадку залежить від розмірності вектора частот і кількості лінійно перетворених аргументів у швидких змінних.

У даній роботі вивчається задача з точковими й інтегральними умовами. Питання існування розв'язку для диференціального рівняння з умовами такого типу розглядалось в роботі [6], а саме для задачі

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a < x < b,$$

$$y(x_1) = y_2, \qquad \int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)dx = y_2,$$

де $a < x_1 < x_2 < b$ і $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

2. Постановка задачі і схема усереднення. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $m \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0; 1]$, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, ..., a_{\lambda_r})$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $i = \overline{1, r}$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \ldots, \varphi_{\theta_s})$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $j = \overline{1, s}$.

Задамо наступні умови для розв'язку системи рівнянь (1), (2):

$$a(\tau_0) = a_0, \qquad 0 \leqslant \tau_0 \leqslant L; \tag{3}$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{j=1}^{s} b_j(\tau, a_\Lambda(\tau)) \varphi_{\theta_j}(\tau) + g(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) \right] d\tau = d, \tag{4}$$

де $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant L$.

Умови такого типу можна одержати, наприклад, при розгляді системи слабко зв'язаних осциляторів

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2(\tau) u_i = \varepsilon f_i(\tau, u(t), u(\lambda t), \dot{u}(t), \dot{u}(\lambda t)),$$

де $i = \overline{1, n}$, $\quad 0 < \lambda < 1$, $\quad \dot{u} := \dfrac{du}{dt}$,

$u := (u_1, \dots, u_n)$, $\dot{u} := (\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n)$, f_i — задані функції.

Використавши заміну Крилова – Боголюбова [7], одержимо систему диференціальних рівнянь для амплітуд a_i і фаз φ_i вигляду

$$\frac{da_i}{d\tau} = -\frac{1}{\omega_i(\tau)}\Big(g_i(\tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda) + +a_i\omega_i'(\tau)\sin\psi_i\Big)\sin\psi_i,$$

$$\frac{d\varphi_i}{d\tau} = \frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon} - \frac{1}{a_i\omega_i(\tau)} \times \times\Big(g_i(\tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda) + +a_i\omega_i'(\tau)\cos\psi_i\Big)\cos\psi_i.$$

Умовою (3) задається значення вектора амплітуд в деякій точці $\tau_0 \in [0, L]$.

Усереднивши за швидкими змінними φ_{θ_j} праві частини рівнянь (1), (2) і функцію g в умові (4), одержимо усереднену задачу

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \quad (5)$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \quad (6)$$

$$\overline{a}(\tau_0) = a_0, \quad (7)$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\sum_{j=1}^{s} b_j(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau) + +g_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))\right]d\tau = d. \quad (8)$$

Одержана задача значно простіша порівняно з (1)–(4), оскільки праві частини рівнянь не залежать від $\overline{\varphi}$. Компонента розв'язку $\overline{a}(\tau)$ знаходиться із (5), (7), після чого знаходження компоненти розв'язку $\overline{\varphi}$ зводиться до інтегрування з початковою умовою, що знаходиться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

3. Існування розв'язку усередненої задачі

Лема 1. Нехай функція X_0 неперервна за сукупністю змінних в області $[0, L]\times \times S_R^r$, де $S_R = \{a : \|a - a_0\| \leqslant R\}$ і $\sigma = \max\limits_{[0,L]\times S_R^r} \|X_0(\tau, a_\Lambda)\|$, $\sigma L \leqslant R$. Тоді на проміжку $[0, L]$ існує хоча б один розв'язок задачі (5), (7).

Доведення. Введемо оператор

$$Fa := a_0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} X_0(z, a_\Lambda(z))dz,$$

визначений у просторі $\mathbb{C}[0, L]$ на кулі S_R. Із неперервності та обмеженості функції X_0 випливає рівностепенева неперервність множини Fa при $a \in S_R$. Оскільки

$$\|(Fa)(\tau)\| \leqslant \|a_0\| + \left\|\int\limits_{\tau_0}^{\tau} A_0(z, a_\Lambda(z))dz\right\| \leqslant \|a_0\| + L\sigma,$$

то множина значень Fa рівномірно обмежена.

На підставі теореми Арцела [8] маємо, що оператор F є цілком неперервним.

Із того, що

$$\|(Fa)(\tau) - a_0\| = \left\|\int\limits_{\tau_0}^{\tau} A_0(z, a_\Lambda(z))dz\right\| \leqslant R,$$

випливає, що $F : S_R \to S_R$.

Таким чином, оператор F задовольняє умови теореми Шаудера, що гарантує існування розв'язку задачі (5), (7).

Лема 2. Нехай виконуються умови леми 1, вектор-функція X_0 задовольняє умову Ліпшиця за змінними a_{λ_i} із сталою $\alpha > 0$ і

$$\alpha r L < 1. \quad (9)$$

Тоді розв'язок задачі (5), (7) існує і єдиний.

Доведення. Із леми 1 та умови (9) випливає, що оператор F — стискаючий. Справді, для будь-яких $a_1, a_2 \in D$

$$\|Fa_2 - Fa_1\| \leqslant \leqslant \alpha\sum_{i=1}^{r}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\|a_2(\lambda_i z) - a_1(\lambda_i z)\|dz \leqslant \leqslant \alpha r L\|a_2 - a_1\|.$$

На підставі теореми Банаха [8] існує єдина нерухома точка оператора F, отже існує єдиний розв'язок задачі (5), (7).

Лема 3. Нехай $\overline{a}(\tau)=\overline{a}(\tau,\overline{y})$, $\overline{a}(0,\overline{y})=\overline{y}$ — розв'язок задачі (5), (7), в області визначення норми ω, X_0, Y_0 і g_0 обмежені сталою σ, норми b_j сталими β_j, а матриця

$$S(\tau_1,\tau_2):=\sum_{j=1}^{s}\int_{\tau_1}^{\tau_2} b_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau))d\tau$$

невироджена.

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (6), який задовольняє інтегральну умову (8). При цьому для $\tau\in[0,L]$

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\|\leqslant c_1+\frac{c_2}{\varepsilon}, \qquad (10)$$

де c_1,c_2 — додатні сталі, $\overline{\varphi}(0;\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}$.

Доведення. Із рівняння (6) знаходимо

$$\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}+\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon).$$

Після підстановки $\overline{\varphi}$ в умову (8) одержимо для $\overline{\psi}$ рівняння

$$S(\tau_1,\tau_2)\ \overline{\psi}=d-\\ -\sum_{j=1}^{s}\int_{\tau_1}^{\tau_2} b_j(\tau,\overline{a}(\tau))\overline{\varphi}(\tau_j;\overline{y},0,\varepsilon)d\tau-\\ -\int_{\tau_1}^{\tau_2} g_0(\tau,\overline{a}(\tau))d\tau.$$

Оскільки

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)\|\leqslant\sigma\tau\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

і

$$\|\overline{\psi}\|\leqslant\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\|\Bigg(\|d\|+\\ +\sum_{j=1}^{s}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)\|ds\Bigg),$$

то для норми $\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$ одержимо оцінку (10), де

$$c_1=\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\|\Bigg(\|d\|+\sigma(\tau_2-\tau_1)\times\\ \times\left(0.5(\tau_2+\tau_1)\sum_{i=1}^{s}\beta_i\theta_i+1\right)+\sigma L\Bigg),$$

$$c_2=\sigma\Bigg(0.5\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\|({\tau_2}^2-{\tau_1}^2)\times\\ \times\sum_{i=1}^{s}\beta_i\theta_i+L\Bigg).$$

4. Позначення й умови. Нехай $G:=[0,L]\times D^r$, $G_1:=G\times T^{ms}$, $f:=(X,Y,g)$. Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0. $f\in\mathbb{C}^2_{a_\Lambda}(G_1,\sigma)$, $f\in\mathbb{C}^1_\tau(G_1,\sigma)$, де сталою σ обмежені норми f та похідних.

2^0. $f\in\mathbb{C}^{mr+1}_{\varphi_\Theta}(G_1,\sigma)$.

3^0. $b_j\in\mathbb{C}^2(G,\beta_j)$, $j=\overline{1,s}$.

4^0. $\omega\in\mathbb{C}^{ms-1}([0,L],\sigma)$ і визначник Вронського $V(\tau)$, побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau),\ldots,\omega(\theta_s\tau)\}$, відмінний від нуля при $\tau\in[0,L]$.

5^0. Існує єдиний розв'язок задачі (5), (7), який лежить в області D разом із деяким ρ-околом.

Виконання умови 3^0 гарантує незастрягання розв'язку системи рівнянь (1), (2) в околі резонансу, умовою якого в точці $\tau\in\in[0,L]$ є виконання рівності

$$\gamma_k(\tau):=\sum_{j=1}^{s}\theta_j(k_j,\omega(\theta_j\tau))=0,$$

де $k_j\in\mathbb{Z}^m$, $\sum\limits_{j=1}^{s}\|k_j\|\neq0$.

6^0. Припустимо, що матриці

$$S(\tau_0)=I-\sum_{j=1}^{s}\int_0^{\tau_0}\frac{\partial X_0(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau,\overline{y}))}{\partial a_{\lambda_j}}\frac{\partial a_{\lambda_j}(\tau,\overline{y})}{\partial\overline{y}}d\tau,$$

і $S(\tau_1,\tau_2)$ — невироджені.

Умова 4^0 дозволяє одержати для осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau,\varepsilon)=\int_0^{\tau}f(z,\varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{z}\gamma_k(t)dt\right)dz$$

рівномірну оцінку

$$\|I_k(\tau,\varepsilon)\|\leqslant c_3\left(\sup\|f(t,\varepsilon)\|+\frac{1}{\|k\|}\sup\left\|\frac{df}{dt}\right\|\right),$$

де $c_3>0$ і не залежить від ε і k.

На підставі оцінки осциляційного інтеграла одержується оцінка похибки методу усереднення для розв'язків систем (1), (2) і (5), (6), початкові значення яких збігаються при $\tau = 0$, і має вигляд [4, 5]

$$\|a(\tau) - \overline{a}(\tau)\| + \|\varphi(\tau) - \overline{\varphi}(\tau)\| \leqslant c_4\varepsilon^{\alpha}. \quad (11)$$

5. Обгрунтування методу усереднення

Теорема. Нехай виконуються умови 1^0–6^0. Тоді для досить малого $\varepsilon_0 > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4) і для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується оцінка

$$\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| + \\ +\|\varphi(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) - \\ -\eta(\varepsilon)\| \leqslant c_5\varepsilon^{\alpha}, \quad (12)$$

де $\alpha = (rm)^{-1}$, а для функції $\eta(\varepsilon)$ справджується оцінка

$$\|\eta(\varepsilon)\| \leqslant c_6\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Доведення. Нехай $\big(\overline{a}(\tau), \overline{\varphi}(\tau)\big) := := \big(\overline{a}(\tau, \overline{y}), \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\big)$ — розв'язок задачі (5), (8) при $\tau \in [0, L]$, $\tilde{a}(\tau) = \overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu)$ і $\overline{y} + \mu \in D$. Тоді із рівняння (5) маємо

$$\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau) = \mu + \\ +\int_0^{\tau}\Big[X_0(z, \overline{a}_{\Lambda}(z, \overline{y}+\mu)) - X_0(z, \overline{a}_{\Lambda}(z, \overline{y}))\Big]dz.$$

Звідси одержимо

$$\|\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau)\| \leqslant \|\mu\| + \\ +\sigma\sum_{j=1}^{r}\int_0^{\tau}\|\tilde{a}_{\lambda_j}(z) - \overline{a}_{\lambda_j}(z)\|dz.$$

На підставі інтегральної нерівності [4], яка є узагальненням нерівності Гронуолла – Беллмана, маємо

$$\|\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau)\| \leqslant \|\mu\| \exp\left(\sigma\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right)\tau.$$

Таким чином, для всіх $\tau \in [0, L]$

$$\|\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau)\| \leqslant c_7\|\mu\|, \quad (13)$$

де $c_7 = \exp\left(\sigma L\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\right)$.

Нескладно одержується і така оцінка

$$\|\overline{\varphi}(\tau, \overline{y}+\mu, \overline{\psi}+\xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leqslant \\ \leqslant \|\xi\| + c_7 r\sigma L\|\mu\|. \quad (14)$$

Покажемо, що можна знайти таке $\mu \in \mathbb{R}^n$, що розв'язок $a(\tau) = a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon)$ визначений на $[0, L]$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ і при цьому $a(\tau_0) = \overline{a}(\tau_0)$. Нехай

$$c_7\|\mu\| \leqslant 0.5\rho, \qquad c_4\varepsilon^{\alpha} \leqslant 0.5\rho.$$

Тоді, як показано в [4], існує єдиний розв'язок системи (1), (2) з початковими умовами $\overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi$. Далі маємо,

$$\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leqslant \\ \leqslant \|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu)\| + \\ +\|\overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leqslant \\ \leqslant c_4\varepsilon^{\alpha} + c_7\|\mu\|.$$

Із виконання умов (3) і (5) на підставі рівнянь (1) і (4) одержимо

$$\mu = -\int_0^{\tau_0}\Big(X_0(\tau, a_{\Lambda}(\tau)) - \\ -X_0(\tau, \overline{a}_{\Lambda}(\tau, \overline{y}))\Big)d\tau - \\ -\int_0^{\tau_0}\Big(X_0(\tau, \overline{a}_{\Lambda}(\tau, \overline{y} + \mu)) - \\ -X_0(\tau, \overline{a}_{\Lambda}(\tau, \overline{y}))\Big)d\tau - \\ -\int_0^{\tau_0}\tilde{X}(\tau, a_{\Lambda}(\tau), \varphi_{\Theta}(\tau))d\tau = \\ = R_1 + R_2 + R_3.$$

Тут

$$\tilde{X}(\tau, a_{\Lambda}, \varphi_{\Theta}) = \sum_{k\neq 0}X_k(\tau, a_{\Lambda}(\tau))e^{i(k,\varphi_{\Theta})}.$$

На підставі оцінки (13) маємо

$$\|R_1\| \leqslant \sigma\tau_0 r c_4\varepsilon^{\alpha}.$$

Перетворивши вираз R_2, одержимо

$$R_2 = -S(\tau_0)\mu + R_4(\mu),$$

де для R_4 справджується оцінка

$$R_4(\mu) \leqslant c_8\|\mu\|^2.$$

На підставі оцінки осциляційного інтеграла маємо

$$\|R_3(\varepsilon,\mu)\| \leqslant c_9\varepsilon^{\alpha},$$

де $c_9 > 0$ і не залежить від ε і μ.

Отже, для знаходження μ маємо рівняння

$$\mu = \Phi_1(\mu,\varepsilon),$$

$$\text{де } \Phi_1(\mu,\varepsilon) = S^{-1}(\tau_0)(R_1(\varepsilon,\mu) + \\ +R_4(\mu) + R_3(\varepsilon,\mu)).$$

Із оцінок для R_1, R_4 і R_3 одержимо

$$\|\Phi_1(\mu,\varepsilon)\| \leqslant c_{10}\varepsilon^{\alpha} + c_{11}\|\mu\|^2,$$

де $c_{10} = \|S^{-1}(\tau_0)\|(\sigma\tau_0 r c_4 + c_7)\varepsilon^{\alpha}$,
$c_{11} = \|S^{-1}(\tau_0)\|c_6$.

Нехай $\mu \in \mathbb{R}^n$ таке, що

$$\|\mu\| \leqslant c_{12}\varepsilon^{\alpha}, \qquad (15)$$

$c_{12} = 2c_{10}$ і $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2 = (4c_{10}c_{11})^{-1/2}$. Тоді

$$\|\Phi_1(\mu,\varepsilon)\| \leqslant c_{12}\varepsilon^{\alpha}$$

і Φ_1 відображає кулю радіуса $c_{12}\varepsilon^{\alpha}$ в себе при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$.

Застосувавши методику оцінок, запропоновану у праці [2] і реалізовану для диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом в [4], одержимо

$$\left\|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}\right\| \leqslant c_{13}\|\mu\| + c_{14}\varepsilon^{\alpha} \leqslant \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2 = (2(c_12c_{13} + c_{14}))^{-1/\alpha}$.

Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]$ існує єдине значення $\mu = \mu(\varepsilon)$, тобто єдиний розв'язок $a(\tau) = a(\tau,\overline{y} + \mu(\varepsilon),\psi,\varepsilon)$ рівняння (1) такий, що $a(\tau_0) = a_0$.

Нехай $\overline{\varphi}(\tau) = \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$ — розв'язок задачі (6), (8). Знайдемо таке $\xi(\mu,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, що $\varphi(\tau) = \varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+ +\xi,\varepsilon)$ є розв'язком задачі (2), (4). Із умов (4) і (8) маємо

$$\begin{aligned}
\xi = &-S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\times \\
&\times\Bigg\{\sum_{j=1}^{s}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Big[b_j(\tau,a_\Lambda(\tau))\times \\
&\times\big(\varphi_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi},\varepsilon) - \\
&-\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\psi,\varepsilon)\big) + \\
&+\big(b_j(\tau,a_\Lambda(\tau)) - b_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau))\big)\times \\
&\times\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi},\varepsilon) + \\
&+b_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau))\big(\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi},\varepsilon) - \\
&-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\big)\Big]d\tau + \\
&+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Big[\big(g_0(\tau,a_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau,\tilde{a}_\Lambda(\tau))\big) + \\
&+g_0(\tau,\tilde{a}_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau)) + \\
&+\tilde{g}(\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta)\Big]d\tau\Bigg\} = \\
&= -S^{-1}(\tau_1,\tau_2)(R_5 + R_6).
\end{aligned}$$

На підставі нерівностей (10), (11), (13) і (14) маємо

$$\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)R_5(\xi,\mu,\varepsilon)\| \leqslant c_{15}\varepsilon^{\alpha} + c_{16}\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Аналогічно як і при оцінці Φ_1, одержимо

$$\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)R_6(\mu,\xi,\varepsilon)\| \leqslant c_{17}\varepsilon^{\alpha}.$$

Нехай $\varepsilon \leqslant \varepsilon_3 = c_{16}(c_{15} + c_{17})^{-1}$, $\|\xi\| \leqslant \leqslant 2c_{16}\varepsilon^{\alpha-1}$. Тоді при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_4 = \min(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$$\|\Phi_2(\xi,\mu,\varepsilon)\| \leqslant 2c_{16}\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Таким же чином, як і при оцінці $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}$, одержимо для всіх $0 < \varepsilon \leqslant \min(\varepsilon_4,\varepsilon_5)$

$$\left\|\frac{\partial\Phi_2(\xi(\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\xi}\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отже, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1), (2) з початковими умовами $\overline{y}+\mu(\varepsilon),\overline{\psi}+\xi(\mu(\varepsilon),\varepsilon)$, який задовольняє умови (3), (4).

Нехай $\varepsilon \leqslant \varepsilon_5$, $\eta(\varepsilon) = c_6\varepsilon^{\alpha-1}$, $c_6 = 2c_{16}$. Тоді для всіх $0 \leqslant \tau \leqslant L$

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) - \eta(\varepsilon)\| \leqslant \\
&\leqslant \|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\|+ \\
&+\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\eta(\varepsilon)\| \leqslant \\
&\leqslant (c_4 + c_7c_{12}r\sigma L)\varepsilon^{\alpha}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

Врахувавши оцінки (15) і (16), одержимо оцінку (12), де $c_5 = c_4 + +c_{12}c_7(1 + r\sigma L)$.

6. Приклад. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{d\tau} = 1 + \cos(\varphi - 2\varphi_\theta), \qquad \theta = 0.5 \\
&\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon}, \qquad \tau \in [0,1], \\
&a(\tau_0) = a_0, \qquad 0 < \tau_0 \leqslant 1 \\
&\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)d\tau = d, \qquad 0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant 1.
\end{aligned}$$

У точці $\tau = 0$ досягається резонанс, оскільки $\gamma(\tau) := \omega(\tau) - \theta\times \times\omega(\theta\tau) = \tau$. Умова 4^0 виконується:

$$\begin{vmatrix} 1+2\tau & 1+\tau \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Усереднена задача для повільної змінної набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = 1, \qquad \overline{a}(\tau_0) = a_0.$$

З інтегральної умови знаходимо

$$\begin{aligned}
\psi = \overline{\psi} &= d(\tau_2 - \tau_1)^{-1} \\
&-\big(3(\tau_1+\tau_2) + 2(\tau_1^2+\tau_1\tau_2+\tau_2^2\big)/6\varepsilon.
\end{aligned}$$

Оскільки $a(\tau_0) = \overline{a}(\tau_0)$, то

$$a(0) - \overline{a}(0) = \mu = -\int\limits_0^{\tau_0} \cos\left(\frac{\tau^2}{2\varepsilon} + \psi\right)d\tau.$$

Оцінка похибки для повільної змінної

$$\|a(\tau)-\overline{a}(\tau)\| = \left|\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \cos\left(\frac{\tau^2}{2\varepsilon}+\psi\right)d\tau\right| \leqslant c_{18}\sqrt{\varepsilon},$$

одержується на підставі асимптотики інтеграла Френеля [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Петришин Р.І., Петришин Я.Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. — 1998. — **1,** №1. — С. 51–65.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наукова думка, 2004. – 474 с.

3. *Березовська (Краснокутська) І.В.* Усереднення в багаточастотних крайових задачах із лінійно перетвореними аргументами // Нелінійні коливання, 2013. — **16,** №2. — С. 147–156.

4. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2008. — **11,** №4. — С. 462–471.

5. *Петришин Р.І., Бігун Я.Й.* Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — С. 84–89.

6. *Benchohra M., Henderson J., Luca R., Ouahab A.* Boundary data smoothness for solutions of second order ordinary differential equations with integral boundary conditions. // Dyn. Syst. Appl. — 2014. — **23**(2). — P. 133–144.

7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

8. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 302 с.

9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, том 2. — 296 с.