

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

КРИТЕРІЙ РОЗЩЕПЛЕННЯ У ПРОСТОРІ ПЕЛІ - ВІНЕРА

Для задачі розщеплення двох функцій у просторі Пелі - Вінера W_σ^1 знайдено критерій розв'язку. Показано, що за умови відсутності коефіцієнтів Фур'є з від'ємними номерами розщеплення існує.

We found the criterion of solution for the decomposition problem in the Paley - Wiener space W_σ^1 . We obtain the sufficient condition for the splitting.

1. Вступ. Зображення математичних об'єктів у вигляді суми об'єктів з простішими властивостями є одним з основних способів дослідження у математиці. У теорії аналітичних функцій відомими є дослідження Р. С. Юлмухаметова [1], [2], Ю. І. Любарського [3], І. Е. Чижикова [4], Т. І. Гіщак [5] та одного з співавторів [6] про зображення функціональних просторів у вигляді суми чи добутку двох простіших.

2. Основні поняття та позначення. Ми позначаємо через W_σ^p , $\sigma > 0$, простір Пелі - Вінера, тобто простір цілих функцій f експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать $L^p(\mathbb{R})$. Простір W_σ^p може бути визначений і як простір цілих функцій, що задовольняють умову

$$\sup_{\varphi \in (0; 2\pi)} \left\{ \int_0^{+\infty} |(f r e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r |\sin \varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

У дослідженнях Б. В. Винницького та його учнів виникла [7] задача про розщеплення функцій з простору Пелі - Вінера W_σ^1 на суму двох функцій, кожна з яких характеризується тим, що її модуль є "великим" відповідно у верхній та нижній півплощині.

Т. І. Гіщак та один зі співавторів розглядали наступну задачу в [5].

Задача розщеплення. Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$ можливий розклад $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $C_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, а також $\chi \in E^1[C(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[C(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?

Тут $E^p[C(\alpha; \beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \leq$

$p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в $C(\alpha; \beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ для яких

$$\sup_{\alpha < \varphi < \beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(r e^{i\varphi})| dr \right\} < +\infty.$$

Також всюди на $\partial C(\alpha; \beta)$ функції $f \in E^p[C(\alpha; \beta)]$ [8] мають кутові граничні значення і $f \in L^p[C(\alpha; \beta)]$.

Нижченаведені твердження відіграють фундаментальну роль в теорії просторів Пелі - Вінера [2].

Теорема Пелі - Вінера. Простір W_σ^2 збігається з простором функцій f , що зображаються як

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \varphi \in L^2(-i\sigma; i\sigma) \quad (1)$$

Для $p = 1$ аналогічне твердження встановлене Р. Боасом [9] та (в іншій формі) Г. З. Бером [10]. Також відомі аналоги для випадків $1 < p < 2$.

Теорема Бера. Простір W_σ^1 збігається з простором функцій f , що зображаються як (1), де

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}, \quad (c_k) \in l^1 \quad (2)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{1+k^2} \right| < +\infty.$$

В [5] запропоновано шукати розв'язок Задачі розщеплення у формі

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \quad (3)$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma \varphi(it) e^{itz} dt,$$

$$\chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^0 \varphi(it) e^{itz} dt$$

і показано, що χ є розв'язком тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{(m - \frac{i}{2} - k)(m - \frac{i}{2} - ik)} \right| < +\infty, \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k k}{(m + \frac{i}{2} + ik)(m + \frac{i}{2} - k)} \right| < +\infty. \quad (5)$$

3. Основна теорема. Метою нашої статті є доведення наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Функція χ , визначена рівністю (3), є розв'язком Задачі розщеплення тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{m - \frac{i}{2} - k} \right| < +\infty, \quad (6)$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2).

Наслідок. *Нехай $f \in W_\sigma^1$ і $c_k = 0$ для всіх $k > 0$, де коефіцієнти (c_k) визначені в (2). Тоді χ є розв'язком Задачі розщеплення.*

Доведення Теорема 1 випливає з лем 1-5.

Лема 1. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Функція χ , визначена рівністю (3), є розв'язком Задачі розщеплення тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} \rfloor} \frac{c_k}{x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k)} \right| dx < +\infty, \quad (7)$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2). **Доведення.** Нехай виконується умова (6), тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} \rfloor} \frac{c_k}{x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k)} \right| dx = \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} \right| dx \leq \\ & \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \theta(m; x) dx + \\ & + \frac{\pi}{\sigma} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} \right|, \end{aligned}$$

де

$$\theta(m; x) = \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} - \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} \right|.$$

Покажемо, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \theta(m; x) dx < +\infty, \quad (8)$$

Оскільки $\frac{1}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} - \frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} = \frac{-x}{(x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k))(\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k))}$, то

$$\begin{aligned} \theta(m; x) & \leq \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} |c_k| \times \\ & \times \left| \frac{-x}{(x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k))(\frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k))} \right| = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} |c_k| \frac{x\sigma}{\pi} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(\frac{x\sigma}{\pi} + m - k)^2 + \frac{1}{4}} \sqrt{(m - k)^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Тоді застосувавши теорему про середнє отримаємо,

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \theta(m; x) dx = \frac{\pi}{\sigma} \times$$

$$\times \sum_{k=\lfloor \frac{\alpha}{2} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3\alpha}{2} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{\alpha |c_k|}{\sqrt{(\alpha + m - k)^2 + \frac{1}{4}} \sqrt{(m - k)^2 + \frac{1}{4}}},$$

де $\alpha \in [0; 1]$. Підставивши отриманий результат у (8) змінимо порядок сумування і позначимо $m' = m - k$, тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{2k}{3} - \alpha \rfloor - k}^{\lfloor 2k + \frac{\alpha}{4} \rfloor - k} \frac{\alpha |c_k|}{\sqrt{(\alpha + m')^2 + \frac{1}{4}} \sqrt{m'^2 + \frac{1}{4}}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{2k}{3} - \alpha \rfloor - k}^{\lfloor 2k + \frac{\alpha}{4} \rfloor - k} \frac{|c_k|}{\sqrt{(\alpha + m')^2 + \frac{1}{4}} \sqrt{m'^2 + \frac{1}{4}}} \leq$$

$$\leq \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{2k}{3} - \alpha \rfloor - k}^{\lfloor 2k + \frac{\alpha}{4} \rfloor - k} \frac{|c_k|}{(1 + m')^2 + \frac{1}{4}} < +\infty,$$

де $\beta > 0$.

Нехай тепер виконується умова (7), тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{\sigma(m - \frac{i}{2} - k)} \right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{\sigma(m - \frac{i}{2} - k)} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{\sigma(m - \frac{i}{2} - k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{c_k}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} \right| dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{x\sigma}{2\pi} + \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} + \frac{3m}{2} \rfloor} \frac{c_k}{x + \frac{\pi}{\sigma}(m - \frac{i}{2} - k)} \right| dx.$$

Як показано вище, виконується (8) незалежно від умови (6). Тому виконується (7).

Лема 2. Нехай $f \in W_{\sigma}^1$. Тоді для коефіцієнтів у зображенні (2) виконується нерівність

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right| dx < +\infty$$

Доведення. Розглянемо область визначення функції $\frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))}$ як функції двох змінних x та k . При цьому вважаємо, що $c_k = 0$ при $0 \leq k < \lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} \rfloor$. Тоді

$$\left| \sum_{k=\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=\lfloor \frac{3x\sigma}{2\pi} \rfloor + 1}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right|$$

і, оскільки, ряд рівномірно збіжний за ознакою Вейерштраса, і беручи до уваги, що $|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k)| = \sqrt{(x - \frac{\pi}{\sigma}k)^2 + (\frac{\pi}{2\sigma})^2} = |x - \frac{\pi}{\sigma}k|$, при $x \leq \frac{2\pi k}{3\sigma}$ отримаємо $\frac{\pi k}{\sigma} - x = \frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{2\pi}{3\sigma}k - x \geq \frac{\pi}{3\sigma}k + x - x = \frac{\pi}{3\sigma}k = \frac{3}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{2}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k \geq \frac{3}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}\frac{\pi}{\sigma}k + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}(x + \frac{\pi k}{\sigma})$, $|x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)| \geq \frac{|x| + |\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)|}{2} \geq \frac{1}{2}(x + \frac{\pi k}{\sigma})$, почленно проінтегруємо ліву частину нерівності, яку слід довести.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi k}{3\sigma}} \left| \frac{k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))} \right| \times$$

$$\times \frac{1}{(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} dx \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 10|c_k| \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi k}{3\sigma}} \frac{k}{(x + \frac{\pi k}{\sigma})^2} dx = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 10k|c_k| \left(-\frac{3\sigma}{5\pi} + \frac{\sigma}{\frac{\pi}{k} + \pi} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} d_2|c_k| < +\infty, \end{aligned}$$

де $10(-\frac{3\sigma}{5\pi} + \frac{\sigma}{\frac{\pi}{k} + \pi}) \leq d_2$, для деякої сталої $d_2 \in R$.

Лема 3. Нехай $f \in W_{\sigma}^1$. Тоді $\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^0 \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right| dx < +\infty$, де коефіцієнти c_k визначені в (2). **Доведення.** Позначимо через M ліву частину нерівності, яку потрібно довести. Тоді

$$\begin{aligned} M &\leq \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^0 \frac{|c_k|k}{\sqrt{(x - \frac{k\pi}{\sigma})^2 + (\frac{\pi}{2\sigma})^2}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2}} dx. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши почленно за ознакою Вейерштраса, одержимо

$$\begin{aligned} M &\leq \sum_{k=-\infty}^0 \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{(x - \frac{k\pi}{\sigma})^2 + (\frac{\pi}{2\sigma})^2}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2}} dx \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^0 \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{(x - \frac{k\pi}{2\sigma})^2} \sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2}} dx. \end{aligned}$$

Оскільки $\sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2} \geq C\sqrt{x^2 + (\frac{\pi k}{\sigma})^2}$, для деякої сталої $C > 0$, що не залежить від k та $x \in [\frac{\pi}{\sigma}; +\infty]$ і $2x\frac{k\pi}{\sigma} \leq 0$, то

$$M \leq \frac{1}{C} \sum_{k=-\infty}^0 \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{x^2 - 2x\frac{k\pi}{\sigma} + (\frac{k\pi}{\sigma})^2}} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (\frac{k\pi}{\sigma})^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{C} \sum_{k=-\infty}^0 \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k dx}{\sqrt{x^2 + (\frac{k\pi}{\sigma})^2} \sqrt{x^2 + (\frac{k\pi}{\sigma})^2}} \\ &= \frac{1}{C} \sum_{k=-\infty}^0 |c_k| \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{\pi} \arctan \frac{1}{k} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Лема 4. Нехай $f \in W_{\sigma}^1$. Тоді

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=0}^{[\frac{x\sigma}{2\pi}] } \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right| dx < +\infty,$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2). **Доведення.** Покажемо, що

$$\sum_{k=0}^1 \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k dx}{|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + k)| |x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)|} < +\infty$$

Справді

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_1|}{|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + 1)| |x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + 1)|} dx \leq \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi}{\sigma}} \frac{|c_1|}{|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + 1)| |x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + 1)|} dx + \\ &+ \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_1|}{|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + 1)| |x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + 1)|} dx. \end{aligned}$$

Функція $P(x) = \frac{1}{|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2} + 1)| |x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + 1)|}$ є неперервною, тому

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi}{\sigma}} P(x) dx < +\infty.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x - \frac{\pi}{\sigma})^2 + (\frac{\pi}{4\sigma})^2} \sqrt{x^2 + (\frac{3\pi}{2\sigma})^2}} \leq \\ &\leq \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{x(x - \frac{\pi}{\sigma})} dx < +\infty \end{aligned}$$

Розглянемо $\sum_{k=2}^{+\infty} \int_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right| dx$. де

Зауваживши, що $|x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)| = \sqrt{(x - k\frac{\pi}{\sigma})^2 + (\frac{\pi}{2\sigma})^2} \geq |x - \frac{k\pi}{\sigma}| = x - \frac{k\pi}{\sigma} \geq \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{k\pi}{\sigma} \geq \frac{x}{2} + \frac{k\pi}{\sigma} - \frac{k\pi}{\sigma} = \frac{x}{2} = \frac{x}{3} + \frac{x}{6} \geq \frac{x}{3} + \frac{2k\pi}{\sigma} \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{k\pi}{3\sigma} = \frac{1}{3}(x + \frac{k\pi}{\sigma})$, та $|x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)| \geq \frac{|x + i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)|}{2} \geq \frac{1}{2}(|x| + \frac{\pi|k|}{\sigma})$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{(x - \frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))(x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))} \right| dx \leq \\ & \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{6k|c_k|}{(x + \frac{k\pi}{\sigma})^2} dx = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(-\frac{6k|c_k|}{x + \frac{k\pi}{\sigma}} \right) \Big|_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty} \\ & = \sum_{k=2}^{+\infty} 2|c_k| \frac{\sigma}{\pi} < +\infty \end{aligned}$$

Лема 5. Нехай $f \in W_{\sigma}^1$, тоді

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=\lceil \frac{x\sigma}{2\pi} \rceil}^{\lceil \frac{3x\sigma}{2\pi} \rceil + 1} \frac{c_k}{x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)} \right| dx < +\infty, \quad (9)$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2). **Доведення.** Почленно проінтегруємо ліву частину нерівності (9)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} \frac{|c_k|}{|x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k)|} dx = \\ & = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} \frac{|c_k|}{\sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2}} dx = \\ & = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \ln \left(x + \sqrt{x^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2} \right) \Big|_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} = \\ & = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \ln \left(\frac{2k\pi}{\sigma} + \sqrt{(\frac{2k\pi}{\sigma})^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2} \right) \\ & - |c_k| \ln \left(\frac{2k\pi}{3\sigma} + \sqrt{(\frac{2k\pi}{3\sigma})^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2} \right) = \\ & = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \ln L(k), \end{aligned}$$

$$L(k) = \frac{\frac{2k\pi}{\sigma} + \sqrt{(\frac{2k\pi}{\sigma})^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2}}{\frac{2k\pi}{3\sigma} + \sqrt{(\frac{2k\pi}{3\sigma})^2 + (\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2} + k))^2}}$$

Функція $\ln L(k)$, як неперервна на $(0; +\infty)$ функція змінної $k \in$ обмеженою, бо

$$\lim_{k \rightarrow 0} L(k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} L(k) = \frac{2 + \sqrt{5}}{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Юлмухаметов Р. С. Расщепление целых функций с нулями в полосе // Матем. сб. – 1995. – **186**, №7. – С. 147-160.
2. Юлмухаметов Р. С. Решение проблемы Л.Эренрайса о факторизации // Матем. сб. – 1999. – **190**, №4. – С. 123-157.
3. Любарский Ю. И. Представление функций из H^p в полуплоскости и некоторые его приложения // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. межвед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – 1982. – **38**, – С. 76-84.
4. Chyzhykov I. E. Growth of p -th means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros // 1509.02141.v2/arXiv.org – 2015. – С. 1-19.
5. Dilnyi V. M., Hishchak T. I. On splitting functions in Paley-Wiener space // Mat. Stud. – 2016. – **45**, №2. –Р. 137-148.
6. Dilnyi V. M. Splitting of some spaces of analytic functions // Ufa Mathematical Journal. – 2014. – **6**, №2. – Р. 25-34.
7. Виницький Б. В. Про узагальнення теореми Пелі-Вінера // Математичні студії. – 1995. – **4**. – С. 37-44.
8. Джрбациян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1976. – 672 с.
9. Voas R. Ph. Entire functions. – N.-Y.: Academic Press, 1954. – 276 p.
10. Бер Г. З. О явление интерференции в интегральной метрике и аппроксимация целыми функциями экспоненциального типа // Теор. функц., функц. анал. и прил. – 1980. – **34**, №1. –С. 11-24.