УДК 517.53

©2017 р. М. Є. Коренков, Ю. І. Харкевич

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

ПРО РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА ТА ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Проаналізовані дослідження пов'язані із розподілом значень сігма-функції та пе-функції Вейєрштрасса. Знайдено характеристики Неванлінни дзета-функції Вейєрштрасса та досліджено розподіл її значень. Показано, що жодне значення a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, не є винятковим для довільної еліптичної функції.

The studies related to the distribution of values of sigma-function and p-function of Weierstrass are analyzed. The Nevanlinna characteristics of the Weierstrass zeta function are found and the distribution of its values is investigated. It is shown that none of the values a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, is exceptional for an arbitrary elliptic function.

Розглянемо питання про характеристики Неванлінни і дефектні значення відомих функцій Вейєрштрасса $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$ [1] та довільної еліптичної функції. Функції Вейєрштрасса задаються з допомогою рівностей

$$\sigma(z) = z \prod_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{\Omega_{mn}}\right) \exp\Big(\frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{z^2}{2\Omega_{mn}^2}\Big),$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\frac{1}{z-\Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\},$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\},$$

де $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \quad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z})$, $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, і штрих біля знаків добутку та суми означає, що при $m = 0, n = 0$ відповідний співмножник дорівнює одиниці, а відповідний доданок дорівнює нулю. Ці функції пов'язані між собою рівностями $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$, $\wp(z) = -\zeta'(z)$. Точки Ω_{mn} є простими нулями цілої функції $\sigma(z)$, простими полюсами для мероморфної функції $\zeta(z)$ та полюсами другого порядку для еліптичної функції $\wp(z)$. Будемо вважати відомими основні поняття, факти і стандартні позначення із теорії розподілу значень мероморфних функцій [2]. Нагадаємо деякі із них. Характеристики Неванлінни мероморфної функції f, $f \neq \mathrm{const}$, вводяться з допомогою рівностей

$$m(r,f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi,$$

$$N(r,f) := \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\ln r,$$

$$T(r,f) := m(r,f) + N(r,f), \qquad (1)$$

де $\ln^+\alpha := \max\{0, \ln\alpha\}$, $\alpha > 0$, і $n(r,f)$ (що інакше позначається $n(r,\infty,f)$) є число полюсів функції f в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $r > 0$, з врахуванням їх кратностей. Якщо $a \in \mathbb{C}$, то використовуються позначення $n(r,a,f)$, $N(r,a,f)$, $m(r,a,f)$ замість відповідно $n\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$. Справедлива також рівність

$$m(r,a) + N(r,a) = T(r,f) + O(1),\ r \to \infty, \qquad (2)$$

де $f \neq \mathrm{const}$, a – довільне число, $a \in \mathbb{C}$, яка розкриває зміст першої основної теореми теорії розподілу значень мероморфних функцій.

Позначивши $\delta(a,f) := \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}$ або, що те саме, внаслідок (2), $\delta(a,f) := 1 -$

$-\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}$, говорять, що a, $a\in\overline{\mathbb{C}}$, є винятковим (дефектним) значенням мероморфної функції f в розумінні Неванлінни, коли $\delta(a,f)>0$.

Розподіл значень функції $\sigma(z)$ у випадку прямокутної сітки її нулів досліджений Гольдбергом А. А. в роботі [3]. В загальному випадку ще Сельбергом [4] показано, що жодне значення a, $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, не є винятковим для функції $\sigma(z)$. В роботі [5] при $\Omega_{mn}=m+n\lambda e^{i\alpha}$, $0<\lambda<+\infty$, $0<\alpha<\pi$ $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z})$, показано, що значення $a=0$ є винятковим в розумінні Неванлінни для функції $\sigma(z)$ тоді і лише тоді, коли $\frac{\pi\cos\theta_1}{\lambda\sin\alpha}<|\eta_1|$, де $\eta_1=\zeta(\frac{1}{2})$, $\theta_1=\arg\eta_1$.

Розподіл значень еліптичної функції $\wp(z)$ досліджено в монографії [1], де показано, що жодне значення a, $a\in\overline{\mathbb{C}}$, не є винятковим для цієї функції. Залишається знайти характеристики Неванлінни та дефектні значення функції $\zeta(z)$. Ці питання можна дослідити з допомогою асимптотичних формул вказаних в роботах [6], [7]. Однак ми скористаємося простішими засобами.

Теорема 1. *Мають місце співвідношення* $(r\to\infty)$

$$n(r,\zeta)=\frac{\pi r^2}{D}+O(r), \tag{3}$$

$$N(r,\zeta)=\frac{\pi r^2}{2D}+O(r), \tag{4}$$

$$m(r,\zeta)=O(\ln r), \tag{5}$$

$$T(r,\zeta)=\frac{\pi r^2}{2D}+O(r), \tag{6}$$

де D – площа основного паралелограма періодів функції $\wp(z)$. Жодне значення a, $a\in\overline{\mathbb{C}}$, не є винятковим в розумінні Неванлінни для функції $\zeta(z)$.

Доведення. В монографії [1] показано, що

$$n(r,\wp)=\frac{2\pi r^2}{D}+O(r),\quad r\to\infty. \tag{7}$$

Точки Ω_{mn} є полосами першого порядку для функції $\zeta(z)$. Тому із (7) випливає зразу ж співвідношення (3). Отже, згідно із (1) отримуємо (4).

Оскільки $\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$, то на основі леми про логарифмічну похідну мероморфної функції (див. теорему 1.3 із [2]) маємо $m(r,\zeta)=m(r,\frac{\sigma'}{\sigma})=O(\ln r)$, $r\to\infty$, тобто має місце (5). Внаслідок (4), (5), отримуємо співвідношення (6). Із співвідношень (5), (6) випливає, що

$$\delta(\infty,\zeta)=\lim_{r\to\infty}\frac{m(r,\zeta)}{T(r,\zeta)}=0,$$

тобто ∞ не є винятковим значенням ζ-функції.

Відомо (див. [1, с.422]), що

$$m(r,0,\wp)=O(r),\ r\to\infty. \tag{8}$$

Тому, використовуючи властивості характеристики $m(r,a,f)$ мероморфної функції f, лему 2.1 із [2, с.129], оцінки (5), (8) і рівність $\zeta'(z)=-\wp(z)$, приходимо до висновку, що при $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, виконується

$$m(r,a,\zeta)\leq m(r,\frac{\zeta}{\zeta'})+O(\ln r)\leq$$

$$\leq m(r,\frac{1}{\zeta'})+m(r,\zeta)+O(\ln r)=m(r,\frac{1}{\wp})+$$

$$+O(\ln r)=m(r,0,\wp)+O(\ln r)=O(r),\ r\to\infty.$$

Тоді із рівності (6) випливає

$$\delta(a,\zeta)=\lim_{r\to\infty}\frac{m(r,a,\zeta)}{T(r,\zeta)}\leq\lim_{r\to\infty}\frac{O(r)}{T(r,\zeta)}=0,$$

тобто значення a, $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, не є винятковим для функції $\zeta(z)$, $\delta(a,\zeta)=0$.

Розглянемо випадок, коли $a=0$. Використовуючи властивості характеристики $m(r,a,f)$ мероморфної функції f, оцінку (8) і теорему 1.3. (див [2, с.122]), отримуємо

$$m(r,0,\zeta)=m(r,\frac{1}{\zeta})=m(r,\frac{\zeta'}{\zeta}\cdot\frac{1}{\zeta'})\leq$$

$$\leq m(r,\frac{\zeta'}{\zeta})+m(r,\frac{1}{\zeta'})=m(r,\frac{1}{\wp})+O(\ln r)=$$

$$=m(r,0,\wp)+O(\ln r)=O(r)+O(\ln r)=O(r),$$

$r\to\infty$. Тоді згідно із рівністю (6) знаходимо

$$\delta(0,\zeta)=\lim_{r\to\infty}\frac{m(r,0,\zeta)}{T(r,\zeta)}\leq\lim_{r\to\infty}\frac{O(r)}{T(r,\zeta)}=0,$$

тобто $\delta(0,\zeta) = 0$. Отже, значення $a = 0$ не є винятковим для функції $\zeta(z)$. Теорему 1 доведено.

Дослідимо тепер питання про дефектні значення еліптичної функції.

Теорема 2. *Жодне значення $a, a \in \overline{\mathbb{C}}$, не є винятковим у розумінні Неванлінни для довільної еліптичної функції $f, f \neq \text{const}$.*

Доведення. Якщо еліптична функція f в основному паралелограмі періодів приймає значення a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, в s точках, то по аналогії із доведенням співвідношення (7) неважко показати, що

$$n(r,a,f) = \frac{\pi s r^2}{D} + O(r), \quad r \to \infty,$$

де D – площа вказаного паралелограма. Тому

$$N(r,a,f) = \frac{\pi s r^2}{2D} + O(r), \quad r \to \infty, \qquad (9)$$

рівномірно відносно a. Тоді, згідно із тотожністю А. Картана (див. [2], с. 33), отримуємо

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta + d(f) =$$

$$= \frac{\pi s r^2}{2D} + O(r), \quad r \to \infty, \qquad (10)$$

де $d(f) = \text{const}$. Отже,

$$\delta(a,f) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,a,f)}{T(r,f)} = 0$$

для кожного a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Теорему 2 доведено.

Зауваження. На основі співвідношення (10) отримуємо

$$\rho[f] := \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln r} = 2,$$

тобто еліптична функція f є мероморфною функцією другого порядку. Згідно із рівностями (2), (9), (10), отримуємо також, що $m(r,a,f) = T(r,f) - N(r,a,f) + O(1) = O(r)$, $r \to \infty$, для еліптичної функції f при довільному a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$.

СПИСОК ЛIТЕРАТУРИ

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2т. –М.: Наука, 1968. – Т.2. – 624 с.

2. *Гольдберг А. А.* Распределение значений мероморфных функций / А. А. Гольдберг, И. В. Островский. –М.: Наука, 1970. – 591 с.

3. *Гольдберг А. А.* . О распределении значений сигма-функции Вейерштрасса // Изв. вузов. Математика. – 1966. – **1** (50). –С. 43-46.

4. *Selberg H. L.* Avhandl Norske Videnkaps – Akad., Math. – Naturvid. Kl. – 1928. – **7,** № 1.

5. *Коренков Н. Е.* О распределении значений сигма-функции Вейерштрасса. Математический сборник. –К.: Наукова думка, 1976. – С. 240-242.

6. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Об асимптотике логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста //Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. –С. 25-32.

7. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. –С. 63-79.