

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ КУТОВОЇ v -ЩІЛЬНОСТІ НУЛІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ В ТЕРМІНАХ ХАРАКТЕРИСТИК ЇХ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ

Для цілих функцій повільного зростання знайдено достатні умови існування кутової v -щільності їхніх нулів в термінах регулярного поведіння в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці логарифмічної похідної цих функцій та її коефіцієнтів Фур'є.

For entire functions of slowly regular growth we found the sufficient conditions for the existence of angular v -density of its zeros in terms of regular behavior of its logarithmic derivative in $L^p[0, 2\pi]$ -metric and Fourier coefficients.

Надалі під функціями зростання розуміємо додатні неспадні необмежені неперервно диференційовні на \mathbb{R}_+ функції v . Функції зростання v_1 і v_2 такі, що $v_1(r) \sim v_2(r)$, $r \rightarrow +\infty$, вважатимемо еквівалентними і будемо отождествлювати.

Позначимо L – клас функцій зростання v , для яких $rv'(r)/v(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Цей клас з точністю до еквівалентних функцій співпадає з класом повільно зростаючих до $+\infty$ функцій (див., наприклад, [1, с. 15]).

Нехай f – ціла трансцендентна функція нульового порядку, $n(r, \alpha, \beta)$ – лічильна функція її нулів, розташованих в секторі $\{z: |z| \leq r, \alpha \leq \arg z < \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $f(0) = 1$.

Позначимо через $H_0(v)$, $v \in L$, – клас цілих функцій f нульового порядку, для яких

$$0 < \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{v(r)} < +\infty.$$

Нагадаємо, що вимірنا множина $D \subset \mathbb{R}_+$ називається E_0 -множиною, якщо

$$\text{mes}(D \cap [0, r]) = o(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Множина $G \subset \mathbb{R}_+ \in \mathcal{E}_\delta$ -множиною, $0 < \delta \leq 1$, якщо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes}(G \cap [0, r])}{r} \leq \delta.$$

Означення. Нулі функції $f \in H_0(v)$ мають кутову v -щільність, якщо для всіх α

$i \beta$, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$, існує границя

$$\Delta(\alpha, \beta) := \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{v(r)}.$$

В [2] знайдено необхідні умови існування кутової v -щільності нулів функції $f \in H_0(v)$ в термінах регулярного поведіння таких характеристик її логарифмічної похідної

$$F(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)},$$

як асимптотика F , коефіцієнти Фур'є

$$c_k(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

та збіжність F за нормою простору $L^p[0, 2\pi]$. Зокрема, доведено наступні твердження

Теорема А. [2] Нехай $v \in L$, $f \in H_0(v)$ і нулі функції f мають кутову v -щільність. Тоді існує E_0 -множина D така, що для $k \in \mathbb{Z}$ існують границі

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_0(r, F)}{v(r)} = \Delta,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty, r \notin D} \frac{c_k(r, F)}{v(r)} = 0, \quad k \neq 0. \quad (1)$$

Теорема В. [2] За умов теореми А існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$ така, що для

довільного $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{v(r)} \right\|_p \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty, \quad r \notin G. \quad (2)$$

Зауваження 1. В [3] побудовано приклад функції $f \in H_0(v)$, який показує, що співвідношення (1), (2) не є достатніми умовами для існування кутової v -щільності нулів f .

В цій статті вказано деякі уточнені співвідношення для k -их коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$ та збіжності F в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці, за умови виконання яких нулі f мають кутову v -щільність.

Для функцій $\tilde{v} \in L$ прийемо

$$v(r) = \int_0^r \frac{\tilde{v}(t)}{t} dt,$$

$v(0) = 0$. Легко бачити, що $v \in L$ і $\tilde{v}(r) = o(v(r))$, $r \rightarrow +\infty$. Нехай $\Omega = \{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$, (a_j) – послідовність нулів цілої функції f , розташованих в порядку неспадання їх модулів. Покладемо

$$n_k(r) = \sum_{|a_j| \leq r} e^{-ik\alpha_j},$$

$k \in \mathbb{Z}$, де $a_j = |a_j|e^{i\alpha_j}$ – нулі цілої функції f . Зауважимо, що $n(r) = n_0(r)$.

З теореми Каратеодорі-Леві (див., наприклад, [4, с. 98]) випливає таке твердження.

Лема. Нехай $v \in L$, $f \in H_0(v)$. Для того, щоб нулі f мали кутову v -щільність необхідно і досить, щоб існували границі

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_k(r)}{v(r)} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. Нехай $\tilde{v} \in L$, $f \in H_0(v)$ та існують границі

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_0(r, F)}{v(r)} = \Delta, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\tilde{v}(r)} = c_k, \quad k \neq 0. \quad (4)$$

Тоді нулі f мають кутову v -щільність.

Доведення. Нехай $c_k(r, \ln f)$ коефіцієнти Фур'є функції $\ln f$. Оскільки, (див., наприклад, [5, с. 43])

$$c_k(r, \ln f) = \int_0^r \frac{c_k(t, F)}{t} dt,$$

$\tilde{v}(r) = rv'(r)$, то завдяки (4)

$$\begin{aligned} c_k(r, \ln f) &= c_k \int_0^r v'(t) dt + \int_0^r \varepsilon(t) v'(t) dt = \\ &= c_k v(r) + o(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty, \quad r \notin \Omega, \end{aligned}$$

де $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$.

Далі, враховуючи співвідношення

$$\frac{c_k(r, F)}{v(r)} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow +\infty, \quad k \neq 0$$

і співвідношення (див., наприклад, [5])

$$c_k(r, F) = n_k(r) + kc_k(r, \ln f)$$

отримуємо

$$\frac{n_k(r)}{v(r)} = \frac{c_k(r, F)}{v(r)} - k \frac{c_k(r, \ln f)}{v(r)} \rightarrow -kc_k,$$

$r \rightarrow +\infty$, $k \neq 0$. Оскільки $c_0(r, F) = n_0(r)$, то

$$\frac{n_0(r)}{v(r)} \rightarrow \Delta$$

при $r \rightarrow +\infty$.

Звідси за вищенаведеною лемою отримуємо твердження теореми 1.

Теорема 2. Нехай $\tilde{v} \in L$, $f \in H_0(v)$, $p \geq 1$, $\Delta > 0$ та існує функція $G \in L^1[0, 2\pi]$ така, що

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta v(r)}{\tilde{v}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді нулі f мають кутову v -щільність.

Доведення. Доведемо спершу, що за умов теореми існують границі (4).

Нехай g_k коефіцієнти Фур'є функції G . Тоді отримуємо

$$\left| \frac{c_k(r, F - \Delta v(r))}{\tilde{v}(r)} - g_k \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta v(r)}{\tilde{v}(r)} - G(\theta) \right\|_1 \leq \\ &\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta v(r)}{\tilde{v}(r)} - G(\theta) \right\|_p. \end{aligned}$$

Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ маємо

$$c_k(r, F - \Delta v(r)) = c_k(r, F)$$

і тому за умов теореми з останньої нерівності отримуємо

$$\begin{aligned} &\left| \frac{c_k(r, F)}{\tilde{v}(r)} - g_k \right| \leq \\ &\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta v(r)}{\tilde{v}(r)} - G(\theta) \right\|_p \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

що рівносильне існуванню границь

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_k(r, F)}{\tilde{v}(r)} = g_k, \quad k \neq 0.$$

Для $k = 0$ маємо

$$c_0(r, F - \Delta v(r)) = c_0(r, F) - \Delta v(r)$$

і тому отримуємо

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{c_0(r, F) - \Delta v(r)}{\tilde{v}(r)} = g_0.$$

Враховуючи, що $\tilde{v}(r) = o(v(r))$, $r \rightarrow +\infty$, з останнього співвідношення отримуємо

$$\begin{aligned} c_0(r, F) &= \Delta v(r) + g_0 \tilde{v}(r) + o(\tilde{v}(r)) = \\ &= \Delta v(r) + o(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже, за теоремою 1 нулі f мають кутову v -щільність.

Зауваження 2. Нехай $\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^m l_{\psi_j}$, $-\pi \leq$

$\psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < \pi$, скінченна система променів, $l_{\psi_j} = \{z: \arg z = \psi_j\}$, $n(r, \psi_j; f) = n(r, \psi_j) -$ лічильна функція нулів $f \in H_0(v)$, що лежать на промені l_{ψ_j} , модулі яких не перевищують r , $\tilde{v} \in L$. В [6-7] доведено, що за умов розташування нулів f на Γ_m і

$$n(r, \psi_j) = \Delta_j v(r) + o(\tilde{v}(r)), \quad r \rightarrow +\infty, \quad j = \overline{1, m},$$

коефіцієнти Фур'є $c_k(r, F)$ задовольняють співвідношення (3)-(4) і для довільного $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta v(r)}{\tilde{v}(r)} - H(\theta) \right\|_p \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$\begin{aligned} \text{де } H(\theta) &= i \sum_{j=1}^m \Delta_j \hat{h}_j(\theta, \psi_j), \quad \hat{h}(\theta, \psi_j) - 2\pi- \\ &\text{періодичне продовження } h(\theta, \psi_j) = (\theta - \pi - \\ &\psi_j), \quad \psi_j < \theta < \psi_j + 2\pi, \quad \text{з } (\psi_j, \psi_j + 2\pi) \text{ на } \mathbb{R}, \\ \Delta &= \sum_{j=1}^m \Delta_j. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 142 с.
2. Заблоцький М.В., Мостова М.Р. Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, N4. — С. 473-481.
3. Мостова М. Зв'язок між асимптотикою логарифмічної похідної і кутовою щільністю нулів цілих функцій повільного зростання // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2015. — **80**. — С. 112-116.
4. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. — Львов: Выща школа, 1988. — 196 с.
5. Васильків Я.В. Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$ -метриці. Ч. 1 // Матем. студії. — 1999. — **12**, N1. — С. 37-58.
6. Mostova M.R., Zabolotskyj M.V. Convergence in $L^p[0, 2\pi]$ -metric of logarithmic derivative and angular v -density for zeros of entire function of slowly growth // Carpathian Math. Publ. — 2015. — **7**, N2. — P. 209-214.
7. Заблоцький М.В., Мостова М.Р. Достатні умови існування кутової v -щільності нулів цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, N4. — С. 506-516.