УДК 517.5

©2017 р. О.О. Новіков, О.Г. Ровенська

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОВТОРНИМИ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень повторних сум Валле Пуссена на класах періодичних функцій, які дозволяють аналітичне подовження у фіксовану смугу комплексної площини. У певних випадках ці рівності забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольского.

For upper bounds of the deviations of repeated de la Vallee Poussin sums taken over classes of periodic functions that admit analytic extensions to a fixed strip of the complex plane, we obtain asymptotic equalities. In certain cases, these equalities give a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem.

Вступ. Роботу присвячено дослідженню питань наближення в рівномірній метриці періодичних аналітичних функцій дійсної змінної тригонометричними поліномами, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена.

Нехай L — множина сумовних 2π-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Найпростішим і разом із тим найбільш природним прикладом лінійного процесу апроксимації неперервних періодичних функцій дійсної змінної може служити наближення цих функцій елементами послідовностей частинних сум ряду Фур'є $S_n(f;x)$. На класі інтегралів Пуассона суми Фур'є $S_n(f;x)$ забезпечують найкращій порядок наближення і певний інтерес викликають питання наближення поліномами, які є середніми арифметичними деяких множин сум Фур'є.

Суми Фейєра $\sigma_n(f;x)$ функції $f(x)$ задаються співвідношенням

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x),$$

тобто є середніми арифметичними перших n частинних сум Фур'є цієї функції. Як відомо, послідовність поліномів $\sigma_n(f;x)$ рівномірно збігається до своєї функції для будь-якої $f \in C$.

Суми Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

є певним узагальненням сум $\sigma_n(f;x)$ і мають апроксимативні властивості істотно залежні від параметра p.

Тригонометричні поліноми $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена

$$V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f;x) =$$

$$= \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x),$$

являють собою подальше узагальнення класичних методів Фур'є, Валле Пуссена та Фейєра. При певному виборі параметрів p_1 та p_2 ці поліноми збігаються з сумами $S_n(f;x)$, $V_{n,p}(f;x)$ і $\sigma_n(f;x)$. Дану роботу присвячено вивченню апроксимативних властивостей таких методів наближення.

Широкий спектр методів наближення можна подати у вигляді лінійних середніх рядів Фур'є, які породжуються нескінченними трикутними матрицями наступним чином [1]. За допомогою нескінченної трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_0^{(n)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ за умови $k \geq n$, кожній функції $f \in L$ можна поставити у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0(f)}{2}\lambda_0^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Кажуть, що матриця $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ породжує лінійний метод наближення $U_n(\Lambda)$.

У вигляді тригонометричних поліномів $U_n(f; x; \Lambda)$ суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$ функції $f(x)$ можна задати за допомогою матриці $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, елементи якої задаються таким співвідношенням:

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq n - p - 1, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n - p < k \leq n - 1. \end{cases}$$

У випадку, коли $p = n$, суми Валле Пуссена співпадають із сумами Фейєра $\sigma_n(f; x)$, а за $p = 1$ — із частинними сумами $S_n(f; x)$ ряду Фур'є функції $f(x)$.

Поліноми $V_{n,\overline{p}}^{(2)}(f; x)$, які породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена, можна також подати у вигляді поліномів $U_n(f; x; \Lambda)$ [2]. Якщо $p_1 = 1$ і $p_2 = 1$, то ці поліноми є частинними сумами ряду Фур'є $S_n(f; x)$, коли ж $p_1 = 1$ або $p_2 = 1$ — сумами Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$. У випадку $p_1 = n$, $p_2 = 1$ повторні суми Валле Пуссена збігаються із сумами Фейєра $\sigma_n(f; x)$.

Наслідуючи [1] класи періодичних функцій запровадимо наступним чином. Нехай $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Множина неперервних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2}))$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_\beta^\psi(x)$, позначається C_β^ψ. Якщо $f \in C_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, тобто виконано умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) dt = 0, \quad \operatorname{ess\,sup} |f_\beta^\psi(t)| \leq 1,$$

то множина таких функцій позначається $C_{\beta,\infty}^\psi$. Вважається, що $f \in C_\beta^\psi H_\omega$ у випадку, якщо $f_\beta^\psi(x) \in H_\omega$, тобто виконується умова

$$|f_\beta^\psi(t') - f_\beta^\psi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \quad \forall\, t',\ t'' \in \mathbb{R},$$

де $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності.

Позначимо символом D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in (0; 1).$$

У цьому випадку множини $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$ складаються з 2π-періодичних функцій, що дозволяють продовження до функцій $F(z) = F(x + iy)$, аналітичних у смузі $|\Im z| < \ln \frac{1}{q}$ [3].

Важливим прикладом таких класів функцій є класи неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) P_\beta^q(t) dt,$$

у якій

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$$

— відоме ядро Пуассона, $q \in (0; 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. В цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$ позначаються $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_\beta^q H_\omega$ відповідно і називаються класами інтегралів Пуассона (див., напр., [3]).

Дослідженням питань наближення таких класів присвячено ряд відомих робіт.

У 1946 році С.М. Нікольський [4] розглянув величину

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) := \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C,$$

де $S_n(f;x)$ — частинна сума порядку n ряду Фур'є функції $f(x)$, і показав, що виконується рівність

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};S_n)=\frac{8q^n}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q^n}{n},$$

у якій

$$K(q)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}},\quad q\in[0;1),$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду. У 1980 році С.Б. Стєчкін [5] цей результат передовів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член цієї рівності.

Аналогічну задачу для класів $C^q_\beta H_\omega$ розв'язав у 2001 році О.І. Степанець у роботі [3], де показав, що для величин

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega;S_n):=\sup_{f\in C^q_\beta H_\omega}||f(x)-S_n(f;x)||_C$$

при $n\to\infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega;S_n)=\frac{4q^n}{\pi^2}K(q)\theta_n(\omega)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t dt+\frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega(1/n),$$

де $\theta_n(\omega)\in[1/2;1]$, причому $\theta_n(\omega)=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q і β.

Питання наближення класів інтегралів Пуассона звичайними та повторними сумами Валле Пуссена вивчалися багатьма авторами [6–10]. У роботі [7], зокрема було показано, що має місце асимптотична при $n\to\infty$ формула

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p}):=\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}||f(x)-V_{n,p}(f;x)||_C=$$

$$=\frac{q^{n-p+1}}{p}(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q}+O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}),$$

де

$$K_{p,q}=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt,$$

$$s=s(p)=\begin{cases}1, & p=1\\ 3, & p=2,3,....,\end{cases}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q p, і β.

Для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах функцій $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $C^\psi_\beta H_\omega$, $\psi(k)\in D_q$ у роботі [11] отримано при $n\to\infty$ асимптотичні формули

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty};S_n):=\sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}}||f(x)-S_n(f;x)||_C=$$

$$=\psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\right),$$

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega;S_n):=\sup_{f\in C^\psi_\beta H_\omega}||f(x)-S_n(f;x)||_C=$$

$$=\psi(n)(\frac{4\theta_n(\omega)}{\pi^2}K(q)\int\limits_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t dt+$$

$$+O(1)\frac{\omega(\frac{1}{n})(\varepsilon_n+\frac{1}{n})}{(1-q)^2}),$$

де

$$\varepsilon_n=\sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|,$$

$\theta_n(\omega)\in[1/2;1]$, причому $\theta_n(\omega)=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q, β і $\psi(k)$.

У роботі [12] отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах аналітичних функцій $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $C^\psi_\beta H_\omega$, $\psi(k)\in D_q$, $q\in(0;1)$. Ці результати також було розповсюджено на двовимірні аналоги класів $C^\psi_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$, $q\in(0;1)$ у роботах [13, 14].

Результати. У цій роботі розглядається асимптотична поведінка при $n\to\infty$ величин

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,\overline{p}}):=\sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}}||f(x)-V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C,$$

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega,V^{(2)}_{n,\overline{p}}):=\sup_{f\in C^\psi_\beta H_\omega}||f(x)-V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C,$$

що є точними верхніми межами відхилень повторних сум Валле Пуссена $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ на класах аналітичних періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$ відповідно.

Теорема. *Нехай* $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності. Тоді при* $n - \Sigma_{\overline{p}} \to \infty$, $\Sigma_{\overline{p}} = p_1 + p_2$ *має місце*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}) =$$

$$= \frac{8\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) +$$

$$+ O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\left(\frac{1}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^4} + \right.$$

$$\left. \frac{q^{p_1-1}+q^{p_2-1}}{p_1p_2(1-q)^3} + \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}}{(1-q)^2}\right), \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}) =$$

$$= \frac{4\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) +$$

$$+ O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\left(\frac{\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^5} + \right.$$

$$+ \frac{q^{p_2-1}\omega((n-p_1)^{-1}) + q^{p_1-1}\omega((n-p_2)^{-1})}{p_1p_2(1-q)^3} +$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{(1-q)^2}\right), \qquad (2)$$

де

$$\Pi(n;k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\left(1-n\sin^2 u\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

— повний еліптичний інтеграл третього роду,

$$e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) = \theta_n(\omega) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}) \sin\tau d\tau,$$

$$\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}} = \sup_{k \geq n-\Sigma_{\overline{p}}} \left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,$$

$\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, *причому* $\theta_n(\omega) = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* n, q, β, p_1, p_2 *і* $\psi(k)$.

Доведення

$\forall f(x) \in C^{\psi}_{\beta}$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = f(x) - V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+2}^{\infty} (1-\lambda^{(n)}_k) \times$$

$$\times \psi(k)\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+2}^{\infty} (1-\lambda^{(n)}_k) \times$$

$$\times \frac{\psi(k)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)} \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \times$$

$$\times \sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+2}^{\infty} (1-\lambda^{(n)}_k) \left[\frac{\psi(k)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{q^k}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\right] \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt +$$

$$+ \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \times$$

$$\times \sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+2}^{\infty} \frac{(1-\lambda^{(n)}_k)q^k}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}} \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \times$$

$$\times \sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+2}^{\infty} (1-\lambda^{(n)}_k) q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt +$$

$$+ \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)dt, \qquad (3)$$

де

$$r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t) = r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\psi;\beta;t) =$$

$$= \sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+3}^{\infty} (1-\lambda^{(n)}_k) \left[\frac{\psi(k)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)} - \right.$$

$$-\frac{q^k}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\Bigg]\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Розглянемо величину $r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)$. Оскільки

$$\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+2)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+1)}=$$

$$=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+3)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+4)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+3)}...$$

$$...\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+i)}=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)},$$

то

$$r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)=\sum_{i=2}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i})\times$$

$$\times\left[\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}-\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i}}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\right]\times$$

$$\times\cos((n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i)t+\frac{\beta\pi}{2})=$$

$$=\Bigg[\sum_{i=2}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i})\times$$

$$\times\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+2)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+1+l)}-q^{i-1}\right)\times$$

$$\times\cos((n-\Sigma_{\overline{p}}+1+i)t+\frac{\beta\pi}{2})\Bigg].$$

Враховуючи оцінку із [11]

$$\left|\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)}-q^{i-1}\right|\leq$$

$$\leq(q+\varepsilon_m)^{i-1}-q^{i-1},$$

де

$$\varepsilon_m=\sup_{k\geq m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|,$$

та умову $0\leq 1-\lambda_k^{(n)}\leq 1$, маємо

$$|r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)|\leq$$

$$\leq\sum_{i=2}^{\infty}\left|\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+2)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+1+l)}-q^{i-1}\right|\leq$$

$$\leq\sum_{i=2}^{\infty}(q+\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1})^{i-1}-q^{i-1}\leq$$

$$\leq\frac{q+\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}}{1-q-\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}}-\frac{q}{1-q}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1}}{(1-q-\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+1})(1-q)}.$$

Позначимо

$$R_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^{\psi}_{\beta};x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)dt.$$

Має місце оцінка [11]

$$\|R_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^{\psi}_{\beta};x)\|_C=O(1)\frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}E_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^{\psi}_{\beta})_C}{(1-q)^2},$$

у якій

$$E_n(f)_C=\inf_{t_{n-1}}\|f-t_{n-1}\|_C$$

— найкраще наближення функції f у метриці C тригонометричними поліномами порядку $n-1$.

Нехай далі $J^{\psi}_{\beta}(\varphi)$ — функція, для якої $(J^{\psi}_{\beta}(\varphi))^{\psi}_{\beta}=\varphi$, $\varphi\in S^0_M$ або $\varphi\in H_{\omega}$. У випадку $\psi(k)=q^k$, $q\in(0;1)$ позначимо $J^{\psi}_{\beta}(\varphi)=J^{q}_{\beta}(\varphi)$. Тоді $\forall f\in C^{\psi}_{\beta}$, $x\in\mathbb{R}$

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\times$$

$$\times\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt.$$

Отже, на підставі (3), отримуємо

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x)+$$

$$+\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)R_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f;x).$$

Використовуючи міркування роботи [11] можна показати, що для $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ має місце

$$\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\times$$

$$\times\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x)\|_C+O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}}{(1-q)^2},$$

а для $f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$

$$\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C=$$

$$= \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_\beta(f^\psi_\beta);x)\|_C+$$

$$+O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}E_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^\psi_\beta)_C}{(1-q)^2}$$

і, крім того,

$$E_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^\psi_\beta)_C = O(1)\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}).$$

Враховуючи, що

$$\sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_\beta(f^\psi_\beta),\cdot)\|_C =$$

$$= \sup_{\varphi\in S^0_M}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_\beta(\varphi),\cdot)\|_C,$$

$$\sup_{f\in C^\psi_\beta H_\omega}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_\beta(f^\psi_\beta),\cdot)\|_C =$$

$$= \sup_{\varphi\in H_\omega}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(J^q_\beta(\varphi),\cdot)\|_C,$$

отримуємо

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,\overline{p}})+$$

$$+O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}}{(1-q)^2}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega,V^{(2)}_{n,\overline{p}})=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega,V^{(2)}_{n,\overline{p}})+$$

$$+O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{(1-q)^2}, \tag{5}$$

де

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C,$$

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega,V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega}\|\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C.$$

Із результатів роботи [10] для випадку $r=2$ у позначеннях теореми маємо

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,\overline{p}}) =$$

$$= \frac{8q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}{\pi p_1p_2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{q^{n-p_1+1}+q^{n-p_2+1}}{p_1p_2(1-q)^3}\right), \tag{6}$$

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega;V^{(2)}_{n,\overline{p}}) =$$

$$=\frac{4q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}}{\pi^2p_1p_2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega)+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+2}\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{q^{n-p_1}\omega((n-p_1)^{-1})+q^{n-p_2}\omega((n-p_2)^{-1})}{p_1p_2(1-q)^3}\right). \tag{7}$$

Поєднуючи (4)–(7) отримаємо твердження теореми.

Висновки. Якщо окрім умов, зазначених у теоремі, виконується

$$\lim_{n\to\infty}p_1=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}p_2=\infty, \tag{8}$$

то співвідношення (1) набуває вигляду

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,\overline{p}}) =$$

$$= \frac{8\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi p_1p_2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)+$$

$$+O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^4}+\frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}}{(1-q)^2}\right),$$

і за умови

$$\lim_{n\to\infty}p_1p_2\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}=0 \tag{9}$$

$\forall q\in(0;1)$ забезпечує розв'язок відповідної задачі Колмогорова–Нікольского.

Ураховуючи, що

$$e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) = O(1)\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}),$$

неважко впевнитися, що асимптотична формула (2) для опуклого модуля неперервності якщо, окрім

$$n-\Sigma_{\overline{p}}\to\infty,$$

виконується (8), набуває вигляду

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega;V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi^2p_1p_2(1+q)^3}\times$$

$$= \times\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega)+$$

$$+O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\left(\frac{\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^5}+ \right.$$
$$\left. +\frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{(1-q)^2}\right)$$

і за умови (9) $\forall q \in (0;1)$ забезпечує розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Неважко навести приклади, коли поліноми $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ мають певні переваги над поліномами $V_{n,p}(f;x)$. Якщо порівнювати звичайні й повторні суми Валле Пуссена, у яких змінюється однакова кількість гармонік, тобто, коли $p=p_1+p_2$, то неважко помітити, що повторні суми Валле Пуссена на класі $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, $\psi(k)\in D_q$, $q\in(0;1)$ можуть забезпечувати кращий (із точністю до сталого множника)

$$\frac{q^{n-p_1-p_2+2}}{p_1p_2}\omega(1/(n-p_1-p_2))=$$
$$=\frac{q^{n-p+2}}{p_1p_2}\omega(1/(n-p))$$

порядок наближення (при $n\to\infty$), ніж звичайні суми Валле Пуссена

$$\frac{q^{n-p+1}}{p}\omega(1/(n-p)).$$

Наприклад, якщо $p_1=p_2=p/2$, то порядок наближення повторних сум Валле Пуссена складає $\frac{q^{n-p+2}}{p^2}\omega(1/(n-p))$, тобто у p разів кращий, ніж у відповідних звичайних сум Валле Пуссена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.

2. *Ровенська О.Г.* Наближення періодичних функцій високої гладкості лінійними середніми рядів Фур'є. Дисерт. на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук. Слов'янськ, 2010.

3. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — **192**, № 1. — С. 113–138.

4. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207–256.

5. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1980. — **145**. — С. 126–151.

6. *Рукасов В.И., Новиков О.А.* Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Труды института математики НАН Украины. — 1998. — **20**. — С. 228–241.

7. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 1. — С. 97–107.

8. *Рукасов В.І., Чайченко С.О.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1653–1668.

9. *Ровенская О.Г., Новиков О.А.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 96–99.

10. *Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2014. — **19**, Вип. 3(23). — С. 14–26.

11. *Степанец А.И., Сердюк А.С.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 3. — С. 375–395.

12. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. —2003. — **55**, № 6. — С. 806–816.

13. *Новіков О.О., Ровенська О.Г.* Наближення періодичних функцій високої гладкості прямокутними суммами Фур'є // Карпатські математичні публікації. — 2013. — **5**, № 1. — С. 111–118.

14. *Новиков О. А., Ровенская О.Г.* Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными методами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — **3**, № 3. — С. 255–264.