

Інститут математики НАН України, Тернопільський національний педагогічний університет імені В. Гнатюка

## ІМПУЛЬСНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ. НЕКРИТИЧНИЙ ВИПАДОК

Розглянуто імпульсну крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Встановлено умову існування єдиного розв'язку.

The impulse boundary-value problem for a system of integro-differential equations with a degenerate kernel is considered. A condition for the existence of a single solution is established.

**1. Постановка задачі.** Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом розпочалося у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [1], А. Халаная, Д. Векслера [2]. У подальшому ідеї, закладені у даних роботах отримали свій розвиток і узагальнення у багаточисленних публікаціях М.В. Азбелева [3], В.П. Максимова, О.В. Анохіна, О.А. Бойчука [4,5], Є.О. Гребенікова, Ю.А. Рябова. Стало зрозуміло, що теорію крайових задач для диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати, отримуючи при цьому оригінальні результати, як, наприклад, для інтегро-диференціальних систем з імпульсним впливом [6–9] з використанням теорії псевдообернених матриць (за Муром-Пенроузом) та апарату ортопроекторів. Такий напрямок в теорії крайових задач для інтегро-диференціальних систем з імпульсним впливом і буде предметом дослідження у даній роботі. Розглянемо імпульсну задачу для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = f(t), \quad (1)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \quad (2)$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a, b], \tau_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha.$$

Будемо використовувати припущення і позначення з [4, 6–9], де:  $A(t), B(t), \Phi(t)$  —  $(m \times n), (m \times n), (n \times m)$ -вимірні матриці, компоненти яких належать простору  $L_2[a, b]$ ; вектор-стовпці матриці  $\Phi(t)$  — лінійно-незалежні на  $[a, b]$ ,  $f(t)$  —  $n$ -вимірний вектор-функція з  $L_2[a, b]$ ;  $E_i, S_i$  —  $(k_i \times n)$ -вимірні матриці,  $\gamma_i$  —  $k_i$ -вимірний вектор-стовпець сталих,  $rank(E_i + S_i) = k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), тобто розв'язок імпульсної системи (1), (2), визначається однозначним продовженням через точки розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)); \quad (4)$$

$\ell = col(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q)$  — лінійний обмежений  $q$ -вимірний векторний функціонал,  $\alpha = col(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in R^q$ .

Розв'язок  $x(t)$  крайової задачі (1)–(3) шукаємо у просторі  $D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$  — простір  $n$ -вимірних функцій, які допускають розриви першого роду в точках  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \in (a, b)$  і які абсолютно неперервні на кожному із проміжків  $[a, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_p, b]$ . Такі функції  $x(t) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$  допускають зображення:

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s) ds + x(a) + \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i, b]}(t) \Delta x(\tau_i), \quad (5)$$

де  $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)$ ,  $\chi_{[\tau_i, b]}(t)$  — характеристична функція проміжка  $[\tau_i, b]$  [3]. Норми у відповідних просторах задаються наступним чином

$$\|x\|_{D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)} = \|\dot{x}\|_{L_2[a, b]} + \|x(a)\|_{R^n} + \left\| \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i, b]}(t) \Delta x(\tau_i) \right\|_{R^n},$$

$$\|x\|_{L_2[a, b]} = \left( \int_a^b \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad t \in [a, b].$$

Отже, розв'язок імпульсної крайової задачі (1)–(3) шукаємо у наступному класі вектор-функцій:

$$x(t) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(t) \in L_2[a, b],$$

$$t \in [a, b], \quad \tau_i \in (a, b), \quad i = 1, \dots, p.$$

Розглядаючи імпульс у вигляді (2), ми припускаємо, що він задається не по всіх компонентах вектор-функції  $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , а тільки по її частинах [8, 9]. Таким чином, можна розглядати випадок, коли перший імпульс задається лише по першій компоненті, другий — лише по другій і т.д.,  $n$ -ий імпульс — по  $n$ -ій компоненті вектор-функції  $x(t)$ . Або, наприклад, у точках  $\tau_j \in (a, b)$  вектор-функція  $x(t)$  може взагалі не мати імпульсу, а у точках  $\tau_i \in (a, b)$ ,  $i \neq j$ , може мати імпульси по  $z$ -тих ( $z = 1, 2, \dots, n$ ) компонентах вектор-функції  $x(t)$ .

**2. Основний результат.** Дотримуючись раніше введеної [5] класифікації крайових задач, нагадаємо наступне

**Означення.** *Крайові задачі з імпульсним впливом (1)–(3), для яких відповідні їм лінійні однорідні крайові задачі*

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)] ds = 0, \quad (6)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} - S_i x(\tau_i - 0) = 0, \quad (7)$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a, b], \tau_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\ell x(\cdot) = 0 \quad (8)$$

не мають (мають) нетривіальні розв'язки, називаються **некритичними (критичними)**.

Таким чином, випадки крайових задач, для яких виконується одна із умов  $\text{rank} Q = k + q$  або  $\text{rank} Q < k + q$  є, відповідно, некритичним або критичним [5], де  $Q$  —  $(k+q) \times r_1$ -вимірна матриця [6], отримана підстановкою у крайову умову нормальної фундаментальної матриці  $X(t) = X(t, a)$ ,  $X(a) = E$  системи з імпульсним впливом

$$Q = \ell X(\cdot).$$

Тут  $k := k_1 + k_2 + \dots + k_p$ . Коли розглядаємо некритичний випадок, тобто  $\text{rank} Q = n_2 = k + q$ , то  $\text{rank} P_Q = k + q - \text{rank} Q = 0$ , отже  $P_Q = 0$ , а це доводить справедливості наступного твердження.

**Теорема (Некритичний випадок).** Якщо  $\text{rank} Q = n_2 = k + q$ , то однорідна імпульсна крайова задача (6)–(8) має лише тривіальний розв'язок.

Неоднорідна імпульсна крайова задача (1)–(3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли  $f(t) \in L_2[a, b]$ ,  $\gamma_i \in R^{k_i}$ ,  $\alpha \in R^q$  задовольняють умову

$$P_{D_{d_1}^*} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q_d^*} \left\{ \delta - \mathcal{L}F(\cdot) \right\} = 0, \quad (9)$$

де  $d_1 = m - n_1$ ,  $d = k + q - r_1$ ,  $r_1 = m + n - n_1$ ,  $n_1 = \text{rank} D$  і при цьому має єдиний розв'язок

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \left( \delta - \mathcal{L}F(\cdot) \right) + F(t), \quad (10)$$

визначених у класі вектор-функцій

$$x(t) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(t) \in L_2[a, b],$$

$$t \in [a, b], \quad \tau_i \in (a, b), \quad i = 1, \dots, p.$$

Автори висловлюють подяку член-кореспонденту НАН України, проф. О.А. Бойчуку за постановку задачі та увагу до роботи.

Робота підтримана Грантом НАН України для молодих вчених на 2017 р.

---

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. — Київ: Вища школа, 1987.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 307 с.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.
4. *Бойчук О.А., Кривошея С.А., Самойленко А.М.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, N11. — С. 1576-1579.
5. *Boichuk A.A. and Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators And Fredholm Boundary-Value Problems. (2nd ed.) — Inverse and Ill-Posed Problems Series 59. — Berlin/Boston. Walter de Gruyter GmbH, 2016. — xvi + 298 p. — ISBN 978-3-11-037839-9.
6. *Бойчук О.А., Головацька І.А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, N4. — С. 460-474.
7. *Бондар І.А.* Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь// Буковинський математичний журнал, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2014. — **2**, N4. — С. 7-11.
8. *Bondar Ivanna* Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action// Tatra Mountains Mathematical Publications (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014). — 2015. — **63**. — P. 73-87, DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.
9. *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Mathematical Notes, Vol. 17 (2016), No. 1, pp. 69–84.