

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

## ПРО НУЛІ ГОЛОМОРФНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ, ВИЗНАЧЕНИХ МАЖОРАНТОЮ ДОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Методом коефіцієнтів Фур'є отримано необхідні і достатні умови, за яких довільна послідовність комплексних чисел  $(\lambda_\nu)$  є послідовністю нулів для деяких класів голоморфних в одиничному крузі функцій, визначених мажорантою довільного зростання.

Ключові слова: одиничний круг, послідовність нулів, голоморфна функція, коефіцієнти Фур'є.

By a Fourier coefficients method we established necessary and sufficient conditions, under which the arbitrary sequence of complex numbers  $(\lambda_\nu)$  is a sequence zeros for some classes of holomorphic in a unit disk functions, determined by an arbitrary growth majorant.

Keywords: unit disk, zeros sequence, holomorphic function, Fourier coefficients.

**1. Вступ.** Нехай  $\eta : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  – неперервна, зростаюча і необмежена функція,  $U(0; R) = \{z : |z| < R\}$ . У 1968 році Л.Рубел і Б.Тейлор (див. [1], а також [2]) отримали опис послідовностей нулів для класу цілих функцій  $f$ , що задовольняють умову

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |f(z)| \leq \exp(A\eta(B|z|)),$$

( $A$  і  $B$  тут і далі – деякі додатні сталі), назвавши його класом цілих функцій скінченного  $\eta$  - типу. Зокрема, вони довели таке твердження.

**Теорема Р.- Т.** Для того щоб  $(\lambda_\nu)$  - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел з єдиною точкою скупчення на  $\infty$ , була послідовністю нулів цілої функції скінченного  $\eta$  - типу, необхідно і досить, щоб виконувалися умови

$$(\forall r > 0) : N(r) \leq A\eta(Br),$$

$$(\forall r_1 > 0)(\forall r_2 > 0)(\forall k \in \mathbb{N}) :$$

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{A\eta(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\eta(Br_2)}{r_2^k},$$

де

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt; \quad n(t) = \sum_{|\lambda_\nu| \leq t} 1.$$

**Задача.** Отримати аналогічний критерій для голоморфних в одиничному крузі  $U(0; 1)$  функцій скінченного  $\eta$  - типу, тобто для функцій, які задовольняють умову

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in U(0; 1)) :$$

$$|f(z)| \leq \exp \left( A\eta \left( \frac{B}{1-|z|} \right) \right) \quad (1)$$

На це запитання намагалося відповісти багато дослідників (див., наприклад, [3 - 5]). Але отримати критерій без додаткових обмежень на мажоруючу функцію  $\eta$  не вдавалося. Так в [3] та [5] в ролі мажоранти розглядається функція  $\eta$ , яка задовольняє умову:  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+)(\forall t \in (0; 1)) : \frac{1}{(1-t)^\alpha} \eta \left( \frac{A}{1-t} \right) \leq \eta \left( \frac{B}{1-t} \right)$ . Стаття [4] стосується випадку скінченного порядку функції  $f$

Метою даної статті є отримання загального результату без додаткових умов на зростання функції  $\eta$  і якомога близького до критеріального для подальшого його застосування в теорії інтерполяції, до проблеми базисності та інше.

**2. Основні результати.** Нехай  $f$  – функція, голоморфна в крузі  $U(0; 1)$ , яка має нескінченну множину нулів,  $f(0) = 1$ ,  $(\lambda_\nu)$  – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел

ксих чисел таких, що  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\lambda_\nu| = 1$ ,

$$c_k(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| e^{-ik\varphi} d\varphi$$

– коефіцієнти Фур'є функції  $f$ . Якщо  $(\lambda_\nu)$  є послідовністю нулів функції  $f$ , то (див. [1], [2])

$$c_k(r; f) = \frac{1}{2} \alpha_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \left( \left( \frac{r}{\lambda_\nu} \right)^k - \left( \frac{\bar{\lambda}_\nu}{r} \right)^k \right),$$

$$c_{-k}(r; f) = c_k(r; f), \quad c_0(r; f) = N(r),$$

$$N(r) = \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_\nu|},$$

де  $\alpha_k$  знаходиться з розвинення

$$\log f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

Через  $A_i$  і  $B_i$ , позначаємо додатні сталі. Доведемо такі основні твердження

**Теорема 1.** *Якщо  $(\lambda_\nu)$  є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі функції з класу (1), то*

$$(\forall r \in (0; 1)) : N(r) \leq A_1 \eta \left( \frac{B_1}{1-r} \right) \quad (2)$$

і для всіх  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r_1 \in (0; 1)$ ,  $r_2 \in (r_1; 1)$ ,  $\sigma \in (1; 1/r_2)$

$$\left| \frac{1}{2k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{A_2}{r_1^k} \eta \left( \frac{B_2}{1-r_1} \right) + \frac{A_2}{r_2^k} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\} \eta \left( \frac{B_2}{1-\sigma r_2} \right) \quad (3)$$

або

$$\left| \frac{1}{2k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{A_2}{r_1^k} \eta \left( \frac{B_2}{1-r_1} \right) + \frac{A_2}{r_2^k} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \frac{1+r_2}{2r_2}} \right\} \eta \left( \frac{2B_2}{1-r_2} \right). \quad (3')$$

**Теорема 2.** *Якщо виконується умова (2) і (3), то існує голоморфна в одиничному крузі  $U(0; 1)$  функція, яка задовольняє умову*

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(re^{i\varphi})||^2 d\varphi \right)^{1/2} \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1-\sigma r} \right) \left( 1 + \frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \quad (4)$$

для всіх  $r \in (0; 1)$ ,  $\sigma \in (1; 1/r)$ .

**Зауваження 1.** *Умову (4) в теоремі 2 можна замінити умовою*

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(re^{i\varphi})||^2 d\varphi \right)^{1/2} \leq \frac{A'_3}{\sqrt{1-r}} \eta \left( \frac{B'_3}{1-r} \right). \quad (4')$$

**Теорема 3.** *Якщо виконуються умови (2) і (3), то існує голоморфна в одиничному крузі  $U(0; 1)$  функція  $\eta$ , яка задовольняє умову*

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in D) :$$

$$|f(z)| \leq \exp \left( \frac{A}{(1-|z|)^{3/2}} \eta \left( \frac{B}{1-|z|} \right) \right). \quad (5)$$

**3. Допоміжні твердження.** Для доведення теорем використаємо такі допоміжні твердження.

**Лема 1.** *Якщо виконується (1), то*

$$(\forall r \in [0; 1])(\forall k \in \mathbb{Z}) :$$

$$|c_k(r; f)| \leq A \eta \left( \frac{B}{1-r} \right).$$

**Доведення.** Справді, згідно з рівністю Ієнсена,

$$N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

звідки отримуємо (2). До того ж,

$$\log |f(re^{i\varphi})| = \log^+ |f(re^{i\varphi})| - \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|},$$

$$|\log |f(re^{i\varphi})|| = \log^+ |f(re^{i\varphi})| + \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}.$$

Тому

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi \leq A \eta \left( \frac{B}{1-r} \right),$$

$$|c_k(r; f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi \leq 2A\eta \left( \frac{B}{1-r} \right).$$

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** Для кожного  $r > 0$  і будь-якого  $\sigma \in (1; 1/r)$  виконується

$$n(r) \leq \frac{1}{\ln \sigma} N(\sigma r). \quad (6)$$

**Доведення.** Це випливає з таких міркувань  $N(\sigma r) \geq \int_r^{\sigma r} \frac{n(t)}{t} dt \geq n(r) \ln \sigma$ .

**Лема 3.** Якщо послідовність  $(\lambda_\nu)$  задовольняє умови (2) і (3), то для неї існує така послідовність коефіцієнтів Фур'є  $(c_k(r))$ , що для всіх  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $\sigma \in (1; 1/r)$ ,  $r \in (0; 1)$

$$|c_k(r)| \leq A_3 \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\} \eta \left( \frac{B_3}{1-\sigma r} \right) \quad (7)$$

або

$$|c_k(r)| \leq A_3 \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \frac{1+r}{2r}} \right\} \eta \left( \frac{B'_3}{1-r} \right).$$

**Доведення.** Введемо позначення:  $S(r; k) = \frac{1}{k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \frac{1}{\lambda_\nu^k}$ ,  $S'(r; k) = \frac{1}{k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \left( \frac{\bar{\lambda}_\nu}{r} \right)^k$ . Не зменшуючи загальності, припустимо, що існує  $r_0 \in (0; 1)$  таке, що функція  $\eta$  є сталою на проміжку  $(0; r_0)$ . Далі використаємо неспадну властивість функції  $\eta$ , оскільки

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\eta \left( \frac{1}{1-r} \right)}{r^k} = +\infty,$$

то для кожного  $k \in \mathbb{N}$  існує  $r_k \in (0; 1)$ , що для деякої сталої  $B > 0$  і для кожного  $r \in (r_0; 1)$  виконується

$$\frac{\eta \left( \frac{B}{1-r_k} \right)}{r_k^k} \leq \frac{2\eta \left( \frac{B}{1-r} \right)}{r^k}. \quad (8)$$

Виберемо послідовність  $\alpha_k = -S(r_k; k) = -\frac{1}{k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_k} \frac{1}{\lambda_\nu^k}$ . Тоді послідовність коефіцієнтів Фур'є  $c_k(r)$  задамо у вигляді

$$c_k(r) = \frac{r^k}{2} (S(r; k) + \alpha_k) - \frac{1}{2} S'(r; k) =$$

$$= \frac{r^k}{2k} \sum_{r_k < |\lambda_\nu| \leq r} \frac{1}{\lambda_\nu^k} - \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \left( \frac{\bar{\lambda}_\nu}{r} \right)^k, \quad (9)$$

$$c_0(r) = N(r),$$

$$c_{-k}(r) = \overline{c_k(r)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оцінимо  $|c_k(r)|$ . Оскільки  $|S'(r; k)| \leq \frac{1}{k} n(r)$ , то звідси та умов (2), (3), (6), (8) отримуємо

$$|c_k(r)| \leq \frac{r^k}{2} |S(r; k) - S(r_k; k)| + \frac{1}{2} |S'(r; k)| \leq$$

$$\leq \frac{r^k A_2}{2r_k^k} \eta \left( \frac{B_2}{1-r_k} \right) + \frac{A_2}{2} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\} \times$$

$$\times \eta \left( \frac{B_2}{1-\sigma r} \right) + \frac{A_1}{2k \ln \sigma} \eta \left( \frac{B_1}{1-\sigma r} \right) \leq$$

$$\leq A_3 \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\} \eta \left( \frac{B_3}{1-\sigma r} \right).$$

Останній вираз рівний  $A_3 \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \frac{1+r}{2r}} \right\} \eta \left( \frac{B'_3}{1-r} \right)$ , якщо  $\sigma = \frac{1+r}{2r}$ .

Лему 3 доведено.

**Лема 4.** Для послідовності  $c_k(r)$  вигляду (9), побудованої в лемі 3 виконується

$$|c_k(r)| \leq \frac{1}{\sigma^k} |c_k(\sigma r)| + \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right) \frac{1}{\ln \sigma} N(\sigma r) \quad (10)$$

для всіх  $k \geq 1$ ,  $r \in (0; 1)$ ,  $\sigma \in (1; 1/r)$ .

**Доведення.** Справді, (див. [6], с. 180), отримуємо

$$c_k(r) - \frac{1}{\sigma^k} c_k(\sigma r) =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2k} \sum_{r < |\lambda_\nu| \leq \sigma r} \left( \left( \frac{r}{\lambda_\nu} \right)^k - \left( \frac{\bar{\lambda}_\nu}{\sigma^2 r} \right)^k \right) - \\
& -\frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \left( \frac{\bar{\lambda}_\nu}{r} \right)^k \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right), \\
& \times \sum_{|k| \geq \left[ \frac{1}{\ln \sigma} \right] + 1} \left( \frac{1}{\sigma^k} + \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right) \frac{1}{\ln \sigma} \right)^2 \leq \\
& \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \times
\end{aligned}$$

звідки за лемою 2 випливає

$$\begin{aligned}
|c_k(r)| & \leq \frac{1}{\sigma^k} |c_k(\sigma r)| + \\
& + \frac{1}{2k} \sum_{r < |\lambda_\nu| \leq \sigma r} \left( \left| \frac{r}{\lambda_\nu} \right|^k + \left| \frac{\bar{\lambda}_\nu}{\sigma^2 r} \right|^k \right) + \\
& + \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right) \left| \frac{\bar{\lambda}_\nu}{r} \right|^k \leq \\
& \leq \frac{1}{\sigma^k} |c_k(\sigma r)| + \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right) n(\sigma r) \leq \\
& \leq \frac{1}{\sigma^k} |c_k(\sigma r)| + \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right) \frac{1}{\ln \sigma} N(\sigma r).
\end{aligned}$$

Лему 4 доведено.

$$\begin{aligned}
& \times \left( 1 + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^{2k}} + \frac{4}{\ln^2 \sigma} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \times \\
& \times \left( 1 + \frac{4}{\sigma^2 - 1} + \frac{4}{\ln^2 \sigma} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^{2k}} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} + \frac{4}{\ln \sigma} \varphi^{1/2}(\sigma^{-2}) \right) \leq \\
& \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} + \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \leq \\
& \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \left( 1 + \frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right),
\end{aligned}$$

де  $\varphi(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(1-x^m)^2}{m^2} = 2 \int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ ,  $x \in (0; 1)$ .

Лема 5 доведена.

**Лема 5.** Якщо послідовність  $c_k(r)$  вигляду (9) задовольняє (7), то

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_3 \eta \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \times \\
& \times \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} + \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \quad (11)
\end{aligned}$$

для всіх  $k \geq 1$ ,  $r \in (0; 1)$ ,  $\sigma \in (1; 1/r)$ .

**Доведення** (див. [6]). Використаємо нерівності (7) та (10). Маємо

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( c_0^2(r) + \sum_{0 < |k| \leq \left[ \frac{1}{\ln \sigma} \right]} |c_k(r)|^2 + \right.$$

$$\left. \sum_{|k| \geq \left[ \frac{1}{\ln \sigma} \right] + 1} |c_k(r)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( A_1^2 \eta^2 \left( \frac{B_1}{1 - r} \right) + \frac{2A_3^2}{\ln^2 \sigma} \times \right. \\
\left. \times \eta^2 \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \sum_{0 < |k| \leq \left[ \frac{1}{\ln \sigma} \right]} \frac{1}{k^2} + 2A_3^2 \eta^2 \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \times \right.$$

**Зауваження 2.** Якщо вибрати  $\sigma = \frac{1+r}{2r}$ , то враховуючи, що  $\ln \frac{1+r}{2r} = \ln \left( 1 + \frac{1-r}{2r} \right) \geq \frac{1-r}{2}$ , отримаємо таку оцінку

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_3 \eta \left( \frac{2B_3}{1 - r} \right) \times \\
& \times \left( 1 + \frac{4}{\sqrt{1 - r}} + \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \frac{1+r}{2r}}} \right) \leq \\
& \leq \frac{A'_3}{\sqrt{1 - r}} \eta \left( \frac{B'_3}{1 - r} \right). \quad (12)
\end{aligned}$$

**4. Доведення основних тверджень.**  
**Доведення теореми 1.** Якщо виконуються умови теореми 1, то

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} = \frac{1}{r_2^k} \left( \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k} + \frac{1}{2} \alpha_k r_2^k \right) - \\
& - \left( \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \frac{1}{\lambda_\nu^k} + \frac{1}{2} \alpha_k \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r_2^k} \left( \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_2} \left( \frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k} - \left( \frac{\lambda_\nu}{r_2} \right)^k \right) + \frac{1}{2} \alpha_k r_2^k \right) - \\
&- \left( \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \frac{1}{\lambda_\nu^k} + \frac{1}{2} \alpha_k \right) + \frac{1}{2kr_2^{2k}} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_2} \bar{\lambda}_\nu^k = \\
&= \frac{1}{r_2^k} \left( \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_2} \left( \frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k} - \left( \frac{\lambda_\nu}{r_2} \right)^k \right) + \frac{1}{2} \alpha_k r_2^k \right) - \\
&- \left( \frac{1}{r_1^k} \left( \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \left( \frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k} - \left( \frac{\lambda_\nu}{r_1} \right)^k \right) + \frac{1}{2} \alpha_k r_1^k \right) \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2kr_2^{2k}} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_2} \bar{\lambda}_\nu^k - \\
&- \frac{1}{2kr_1^{2k}} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \bar{\lambda}_\nu^k = \frac{1}{r_2^k} c_k(r_2; f) - \frac{1}{r_1^k} c_k(r_1; f) + \\
&\quad + \frac{1}{2kr_2^{2k}} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_2} \bar{\lambda}_\nu^k - \frac{1}{2kr_1^{2k}} \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \bar{\lambda}_\nu^k = \\
&= \frac{1}{r_2^k} c_k(r_2; f) - \frac{1}{r_1^k} c_k(r_1; f) + \frac{1}{2kr_2^{2k}} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \bar{\lambda}_\nu^k + \\
&\quad + \frac{1}{2k} \left( \frac{1}{r_2^{2k}} - \frac{1}{r_1^{2k}} \right) \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \bar{\lambda}_\nu^k = \\
&= \frac{1}{r_2^k} c_k(r_2; f) - \frac{1}{r_1^k} c_k(r_1; f) + \frac{1}{2kr_2^{2k}} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \bar{\lambda}_\nu^k - \\
&\quad - \frac{1}{2kr_1^k} \left( 1 - \frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}} \right) \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} \frac{\bar{\lambda}_\nu^k}{r_1^k}.
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{1}{r_2^k} |c_k(r_2; f)| + \frac{1}{r_1^k} |c_k(r_1; f)| + \\
&+ \frac{1}{2kr_2^k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} 1 + \frac{1}{2kr_1^k} \left( 1 - \frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}} \right) \sum_{|\lambda_\nu| \leq r_1} 1 \leq \\
&\leq \frac{1}{r_2^k} |c_k(r_2; f)| + \frac{1}{r_1^k} |c_k(r_1; f)| + \\
&+ \frac{1}{2kr_2^k} (n(r_2) - n(r_1)) + \frac{1}{2kr_1^k} \left( 1 - \frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}} \right) n(r_1).
\end{aligned}$$

Але  $\beta := \frac{r_1}{r_2} \geq r_1$ ,  $1 - \frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}} = (1 - \beta)(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{2k-1}) \leq (1 - \beta)2k \leq (1 - r_1)2k$ . Тому, за лемами 1 і 2 отримуємо

$$\left| \frac{1}{2k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{A_2}{r_1^k} \eta \left( \frac{B_2}{1 - r_1} \right) +$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{A_2}{r_2^k} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\} \eta \left( \frac{B_2}{1 - \sigma r_2} \right) \leq \\
&\leq \frac{A_2}{r_1^k} \eta \left( \frac{B_2}{1 - r_1} \right) + \frac{A_2}{r_2^k} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \frac{1+r_2}{2r_2}} \right\} \eta \left( \frac{2B_2}{1 - r_2} \right),
\end{aligned}$$

якщо вибрати  $\sigma = \frac{r_2+1}{2r_2}$ .

Теорема 1 доведена.

**Доведення теореми 2.** З леми 5 та теореми Ріса-Фішера (див. [2], с.27) випливає існування єдиної функції  $f \in L_2[-\pi; \pi]$  такої, що  $f(0) = 1$  і  $c_k(r)$  вигляду (9) є її коефіцієнтами Фур'є. В теоремі 5.1 (див. [1, с.84], а також [2, с. 28]) побудована така функція  $f_\rho$ , голоморфна в крузі  $\{z : |z| < \rho\}$ , для якої  $c_k(r)$  є її коефіцієнтами Фур'є і  $(\lambda_\nu)$  є її послідовністю нулів. Будуючи голоморфне продовження функції  $f_\rho$  в круг  $D = \{z : |z| < 1\}$ , отримуємо функцію  $f$ , для якої  $c_k(r)$  є коефіцієнтами Фур'є. Тобто для довільного  $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(r) = c_k(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Тоді з допомогою рівності Парсеваля згідно лем 3 - 5 та нерівності (12) отримуємо

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln |f(re^{i\theta})||^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(r)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq A_3 \text{ eta} \left( \frac{B_3}{1 - \sigma r} \right) \left( 1 + \frac{6\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln \sigma}} \right) \leq \frac{A'_3}{\sqrt{1-r}} \eta \left( \frac{B'_3}{1-r} \right),$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2 доведена.

**Доведення теореми 3.** З нерівності Шварца та нерівності (12) маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln |f(re^{i\varphi})|| d\varphi \leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ln |f(re^{i\varphi})||^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{A'_3}{(1-r)^{1/2}} \eta \left( \frac{B'_3}{1-r} \right).
\end{aligned}$$

Далі із співвідношень (див. [3, с.24 - 27, 54])

$$T(r; f) = m(r; f) + N(r; f);$$

$$m(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi;$$

$$N(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi + \ln |f(0)|;$$

$$\ln M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R; f), \quad 0 < r < R,$$

для  $R = \frac{r+1}{2}$  отримуємо (див. дов. леми 1)

$$\ln M_f(r) \leq \frac{1}{1-r} T\left(\frac{r+1}{2}; f\right) \leq$$

$$\leq \frac{A_4}{(1-r)^{3/2}} \eta\left(\frac{B_4}{1-r}\right),$$

що й потрібно було довести.

**5. Висновки.** Отож, в даній статті отримані необхідні (теорема 1) та достатні умови (теореми 2, 3) на нулі деяких класів (1), (4), (5) голоморфних в одиничному крузі функцій, що визначаються довільною додатною, зростаючою, необмеженою мажорантою  $\eta$ . Серед них і голоморфні в  $U(0; 1)$  функції скінченного порядку. Але слід зазначити, що для нулів функцій з цього класу умова (3) в достатній частині є зайвою, позаяк впливає з умови (2).

Справді, якщо

$$N(r) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\rho}\right), \quad r > r_0, \quad (13)$$

то двічі застосувавши інтегрування частинами до інтегралу Стільт'єса можна отримати оцінку

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leq r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leq \frac{1}{k} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t)}{t^{k+1}} =$$

$$= \frac{n(r_2)}{kr_2^k} - \frac{n(r_1)}{kr_1^k} + \frac{N(t)}{t^k} \Big|_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(t) dt}{t^{k+1}} \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{r_1^k (1-r_1)^\rho} + \frac{c_3}{r_2^k (1-\sigma r_2)^\rho} \max \left\{ 1; \frac{1}{k \ln \sigma} \right\},$$

де  $\sigma = \frac{1+r_2}{2r_2}$ .

Таким чином, якщо виконується (13), то за теоремою 3 та (12) існує голоморфна в  $U(0; 1)$  функція  $f$  така, що  $\ln |f(z)| = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{\rho+1/2}}\right)$ ,  $|z| > |z_0|$ . Цей результат відрізняється (на порядок 1/2) від результатів М. Цудзі, А. Нафталевича, М. Джрбашяна [8 - 10] в гірший бік, але покращує результат В. Бека [3].

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Rubel, L.A., Taylor, B.A.* (1968). A Fourier series method for meromorphic end entire functions: Bull.Soc. Math. France, **96**, 53 – 91.
2. *Кондратюк, А.А.* (1988). Ряды Фурье и мероморфные функции. Львів, У.: Вища школа.
3. *Beck, W.* (1970). Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc: Thesis. Urbana-Champaign, I: University of Illinois.
4. *Шамоян, Ф. А.* (1978). Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитичв круге функций с мажорантой конечного роста: Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **13** (5 – 6), 405–422.
5. *Шамоян, Ф. А.* (1983). О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы: Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем., **18** (1), 15 – 27.
6. *Miles, J., Shea, D.* (1976). On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value: Duke. Math. J., **43**, 171 – 186.
7. *Гольдберг, А.А., Островский, И.В.* (1970) Распределение значений мероморфных функций. Москва, Р.: Наука.
8. *Tsuji, M.* (1956). Canonical product of a meromorphic in a unit circle: J. Math. Soc. Jap., **8**(1), 7 – 21.
9. *Нафталевич, А. А.* (1961). Об интерполировании функций мероморфных в единичном круге: Лит. матем. сб., **1**(1-2), 159 – 180.
10. *Джрбашян, М.* (1948). О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций: Сообщ. Инст. мат. и мех АН Арм. ССР. Сер. матем., **2**, 3 – 40.
11. *Хейман, У.* (1980). Мероморфные функции. Москва, Р.: Мир.