

НАПІВГРУПА ЧАСТКОВИХ КОСКІНЧЕННИХ ІЗОМЕТРІЙ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Вивчається напівгрупа \mathbf{IN}_∞ усіх часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел. Ми описуємо відношення Гріна на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ , її в'язку та доводимо, що \mathbf{IN}_∞ — проста E -унітарна F -інверсна напівгрупа. Описана найменша групова конгруенція $\mathbf{C}_{\mathbf{mg}}$ на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ та доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{IN}_\infty/\mathbf{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Наведено приклад конгруенції на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ , яка не є групою. Також доведено, що конгруенція на \mathbf{IN}_∞ є групою тоді і лише тоді, коли її звуження на довільну піднапігрупу S в \mathbf{IN}_∞ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, є групою конгруенцією на S .

Ключові слова: інверсна напівгрупа, відношення Гріна, часткове перетворення, часткова біекція, ізометрія, біциклічна напівгрупа, конгруенція.

The semigroup \mathbf{IN}_∞ of all partial co-finite isometries of positive integers is studied. We describe Green's relations on the semigroup \mathbf{IN}_∞ , its band and proved that \mathbf{IN}_∞ is a simple E -unitary F -inverse semigroup. We described the least group congruence $\mathbf{C}_{\mathbf{mg}}$ on \mathbf{IN}_∞ and proved that the quotient-semigroup $\mathbf{IN}_\infty/\mathbf{C}_{\mathbf{mg}}$ is isomorphic to the additive group of integers. An example of a non-group congruence on the semigroup \mathbf{IN}_∞ is presented. Also we proved that a congruence on the semigroup \mathbf{IN}_∞ is a group congruence if and only if its restriction onto an isomorphic copy of the bicyclic semigroup in \mathbf{IN}_∞ is a group congruence.

Keywords: inverse semigroup, Green relations, partial transformation, partial bijection, isometry, bicyclic semigroup, congruence.

У даній праці ми користуватимемося термінологією з [7, 9, 11]. Надалі у тексті множини натуральних чисел позначатимемо через \mathbb{N} .

Якщо визначене часткове відображення $\alpha: X \rightarrow Y$ з множини X у множину Y , то через $\text{dom } \alpha$ і $\text{ran } \alpha$ будемо позначати його область визначення та область значень, відповідно, а через $(x)\alpha$ та $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \text{dom } \alpha$ та підмножини $A \subseteq \text{dom } \alpha$ при частковому відображенні α , відповідно. Часткове відображення $\alpha: X \rightarrow Y$ називається *ко-скінченним*, якщо множини $X \setminus \text{dom } \alpha$ та $Y \setminus \text{ran } \alpha$ є скінченними.

Через \mathcal{S}_λ позначимо множини усіх часткових взаємно однозначних перетворень множини X потужності λ разом з такою напівгруповою операцією: $(x)(\alpha\beta) = ((x)\alpha)\beta$, якщо $x \in \text{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \text{dom } \alpha : (y)\alpha \in \text{dom } \beta\}$, для $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_\lambda$. Напівгрупа \mathcal{S}_λ називається *симетричним інверсним моноїдом* (або *симетричною інверсною напівгруповою*) над

множиною X (див [7, §1.9]. Симетрична інверсна напівгрупа вперше введена В.В. Вагнером у праці [2] і вона відіграє дуже важливу роль в алгебраїчній теорії напівгруп.

Рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на множині X називається *частковим порядком* на X . Множина X із заданим на ній частковим порядком \leq називається *частково впорядкованою множиною* і позначається (X, \leq) .

Елемент x частково впорядкованої множини (X, \leq) називається *найбільшим* (найменшим) в (X, \leq) , якщо $y \leq x$ ($x \leq y$) для всіх $y \in X$.

У випадку, якщо (X, \leq) — частково впорядкована множина й $x \leq y$, для деяких $x, y \in X$, то будемо говорити, що елементи x і y є *порівняльними* в (X, \leq) . Якщо ж для елементів x, y частково впорядкованої множини (X, \leq) не виконується жодне з відношень $x \leq y$ або $y \leq x$, то говоритимемо, що елементи x і y є *непорівняльними* в

(X, \leq) . Частковий порядок \leq на X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в (X, \leq) є порівняльними. У цьому випадку ми будемо говорити, що (X, \leq) є *лінійно впорядкованою множиною* або *ланцюгом*.

Відображення $h: X \rightarrow Y$ з частково впорядкованої множини (X, \leq) в частково впорядковану множину (Y, \leq) називається *монотонним*, якщо з $x \leq y$ випливає $(x)h \leq (y)h$. Монотонне бієктивне відображення $h: (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ частково впорядкованих множин, обернене до якого є монотонним, називається *порядковим ізоморфізмом*. Лінійно впорядкована множина, яка порядково ізоморфна (\mathbb{N}, \geq) називається *ω-ланцюгом*.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [2]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до x* . В'язка — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівгратка* — це комутативна в'язка. Надалі через $(\mathcal{P}_\infty(X), \cup)$ позначатимемо *вільну напівгратку* з одиницею над непорожньою множиною X , тобто множину усіх скінченних (включно з порожньою) підмножин множини X з операцією “об'єднання”.

Якщо S — напівгрупа, то ми позначатимемо відношення Гріна на S через \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{D} , \mathcal{H} і \mathcal{J} (див. означення в [7, §2.1]). Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не містить власних двобічних ідеалів, тобто S складається з одного \mathcal{J} -класу.

Відношення еквівалентності \mathfrak{K} на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b є \mathfrak{K} -еквівалентними*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preceq f$ тоді і лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається

природним.

Означимо відношення \preceq на інверсній напівгрупі S так: $s \preceq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$, для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [9]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку \preceq на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Часткове перетворення $\alpha: (X, d) \rightarrow (X, d)$ метричного простору (X, d) називається *ізометричним* або *частковою ізометрією*, якщо $d(x\alpha, y\alpha) = d(x, y)$ для довільних $x, y \in (X, d)$. Очевидно, що композиція двох часткових ізометрій метричного простору (X, d) є знову частковою ізометрією, а також, що обернене часткове відображення до часткової ізометрії є частковою ізометрією. Таким чином, часткові ізометрії метричного простору (X, d) стосовно операції композиції спеткових перетворень є інверсним підмоїдом симетричного інверсного моїда над множиною X .

Напівгрупа \mathbf{ID}_∞ усіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел \mathbb{Z} означена в праці Безущак [6], де описані її твірні та доведено, що вона має експоненціальний ріст. Зауважимо, що напівгрупа \mathbf{ID}_∞ є інверсною і є, очевидно, піднапівгрупою напівгрупи всіх часткових коскінченних бієкцій множини цілих чисел \mathbb{Z} , а елементи напівгрупи \mathbf{ID}_∞ — це саме звуження ізометрій множини цілих чисел \mathbb{Z} на коскінченні підмножини в розумінні Лоусона (див. [9, с. 9]). У праці [1] описані відношення Гріна та головні ідеали напівгрупи \mathbf{ID}_∞ . У [3] доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty / \mathfrak{C}_{\text{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією \mathfrak{C}_{mg} ізоморфна групі $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини \mathbb{Z} , напівгрупа \mathbf{ID}_∞ є F -інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа \mathbf{ID}_∞ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z}) \times_{\mathfrak{h}} \mathcal{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівгратки з одиницею $(\mathcal{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$. Також, у [3] досліджувалась топологізація напівгрупи \mathbf{ID}_∞ та задача ізоморфного занурення дискретної напівгрупи \mathbf{ID}_∞ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

Нехай \mathbf{IN}_∞ — множина усіх часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел \mathbb{N} зі звичайною метрикою $d(n, m) = |n - m|$, $n, m \in \mathbb{N}$. Оскільки множина \mathbf{IN}_∞ замкнена стосовно операції композиції часткових відображень та взяття оберненого часткового відображення, то \mathbf{IN}_∞ — інверсний підмоноїд симетричного інверсного моноїда \mathcal{I}_ω . Через \mathbb{I} позначатимемо тожне відображення множини натуральних чисел \mathbb{N} . Очевидно, що \mathbb{I} — одиниця моноїда \mathbf{IN}_∞ .

У цій праці ми досліджуємо алгебраїчні властивості напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Зокрема, опишемо відношення Гріна на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ , її в'язку та доводимо, що \mathbf{IN}_∞ — проста E -унітарна F -інверсна напівгрупа. Описана найменша групова конгруенція $\mathbf{C}_{\mathbf{mg}}$ на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ та доведено, що факторнапівгрупа $\mathbf{IN}_\infty/\mathbf{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Наведено приклад конгруенції на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ , яка не є груповою. Також доведено, що конгруенція на \mathbf{IN}_∞ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження на довільну піднапівгрупу S в \mathbf{IN}_∞ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, є груповою конгруенцією на S .

Нехай \mathbb{Z} — множина цілих чисел. Відображення $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, означене за формулою $(z)f = z + z_0$, де z_0 — деяке ціле число будемо називати *зсувом множини цілих чисел*. Часткове відображення $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ називається *звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел*, якщо існують зсув множини цілих чисел $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ і $A \subseteq \mathbb{N}$ такі, що $\text{dom } \alpha = A$ і $(x)f = (x)\alpha$, для всіх $x \in \text{dom } \alpha$. Якщо $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел і $B \subseteq \text{dom } \alpha$, то про образ $(B)\alpha$ будемо називати *зсувом множини B* .

Лема 1. *Кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є монотонною частковою бієкцією лінійно впорядкованої множини (\mathbb{N}, \leq) . Більше того, кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в \mathbb{N} .*

Доведення. Зафіксуємо довільний еле-

мент α напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Позаяк α — коскінченна часткова бієкція множини \mathbb{N} і (\mathbb{N}, \leq) — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число n_α таке, що $n \in \text{dom } \alpha$ для всіх натуральних $n \geq n_\alpha$. Також, оскільки α — часткова коскінченна ізометрія множини натуральних чисел, то

$$d((n_\alpha+1)\alpha, (n_\alpha)\alpha) = |(n_\alpha+1)\alpha - (n_\alpha)\alpha| = 1,$$

а отже виконується одна з умов

$$(n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha+1 \text{ або } (n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha-1.$$

Припустимо, що $(n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha-1$. Тоді за індукцією, оскільки α — часткова коскінченна ізометрія множини натуральних чисел, то отримуємо, що $(n_\alpha+i)\alpha = (n_\alpha)\alpha-i$ для довільного натурального числа i , що суперечить тому, що множина натуральних чисел має найменший елемент. З отриманого протиріччя випливає, що виконується рівність $(n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha+1$. Аналогічно, за індукцією, оскільки α — часткова коскінченна ізометрія множини натуральних чисел, то отримуємо, що $(n_\alpha+i)\alpha = (n_\alpha)\alpha+i$ для довільного натурального числа $i \geq 2$. Також з вище доведеного випливає, що $(n)\alpha = (n_\alpha)\alpha - n_\alpha + n$ для довільного $n \in \text{dom } \alpha$, а отже виконується друге твердження леми.

Через $\mathcal{I}_\infty^\uparrow(\mathbb{N})$ позначимо напівгрупу монотонних коскінченних часткових бієкцій множини натуральних чисел (див. [8]). Оскільки існують монотонні коскінченні часткові бієкції множини натуральних чисел, які не є частковими ізометріями, то з леми 1 випливає

Наслідок 1. \mathbf{IN}_∞ — власний підмоноїд в $\mathcal{I}_\infty^\uparrow(\mathbb{N})$.

Твердження 1. (i) $E(\mathbf{IN}_\infty) = E(\mathcal{I}_\infty^\uparrow(\mathbb{N}))$ в $\mathcal{I}_\infty^\uparrow(\mathbb{N})$, а отже напівгратка $E(\mathbf{IN}_\infty)$ ізоморфна вільній напівгратці з одиницею $(\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}), \cup)$, і цей ізоморфізм визначається відображенням $(\varepsilon)h = \mathbb{N} \setminus \text{dom } \varepsilon$.

(ii) Якщо $\varepsilon, \iota \in E(\mathbf{IN}_\infty)$, то $\varepsilon \leq \iota$ тоді і лише тоді, коли $\text{dom } \varepsilon \subseteq \text{dom } \iota$.

(iii) Кожен максимальний ланцюг у напівгратці $E(\mathbf{IN}_\infty)$ є ω -ланцюгом.

(iv) $\alpha\mathcal{L}\beta$ в \mathbf{IN}_∞ тоді і лише тоді, коли $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$.

(v) $\alpha\mathcal{R}\beta$ в \mathbf{IN}_∞ тоді і лише тоді, коли $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$.

(vi) $\alpha\mathcal{H}\beta$ в \mathbf{IN}_∞ тоді і лише тоді, коли $\alpha = \beta$.

(vii) $\alpha\mathcal{D}\beta$ в \mathbf{IN}_∞ тоді і лише тоді, коли $\text{dom } \alpha$ ($\text{ran } \alpha$) є зсувом множини $\text{dom } \beta$ ($\text{ran } \beta$).

Доведення. (i) Позаяк кожне часткове коскінченне тотожне перетворення множини натуральних чисел є частковою ізометрією, то за наслідком 1 маємо, що $E(\mathbf{IN}_\infty) = E(\mathcal{I}_\infty^{\rightarrow}(\mathbb{N}))$ в $\mathcal{I}_\infty^{\rightarrow}(\mathbb{N})$. Останнє твердження є наслідком твердження 2.1(vii) з [8].

Твердження (ii)–(vi) є наслідками твердження 2.1 з [8].

(vii) Еквівалентність того, що множина $\text{dom } \alpha$ ($\text{ran } \alpha$) є зсувом множини $\text{dom } \beta$ ($\text{ran } \beta$) впливає з другого твердження леми 1.

За означенням відношення Гріна \mathcal{D} маємо, що $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}$, і оскільки $\alpha\mathcal{L}\alpha^{-1}$ і $\beta\mathcal{R}\beta^{-1}$, то $\alpha\mathcal{D}\beta$ в \mathbf{IN}_∞ тоді і лише тоді, коли $\alpha\alpha^{-1}\mathcal{D}\beta^{-1}\beta$. Тоді за твердженням 3.2.5 з [9] існує елемент $\gamma \in \mathbf{IN}_\infty$ такий, що $\gamma\gamma^{-1} = \alpha\alpha^{-1}$ і $\gamma^{-1}\gamma = \beta^{-1}\beta$. Останні дві рівності виконуються тоді і лише тоді, коли $\text{dom } \alpha = \text{dom } \gamma$ і $\text{ran } \gamma = \text{ran } \beta$, а отже умова $\alpha\mathcal{D}\beta$ еквівалентна умові, що $\text{dom } \alpha$ є зсувом множини $\text{ran } \beta$.

Теорема 2. \mathbf{IN}_∞ – проста напівгрупа.

Доведення. Оскільки $\alpha = \alpha\mathbb{I} = \mathbb{I}\alpha$ для довільного елемента α напівгрупи \mathbf{IN}_∞ , то нам достатньо довести, що для довільного елемента β напівгрупи \mathbf{IN}_∞ існують $\gamma, \delta \in \mathbf{IN}_\infty$ такі, що $\gamma\beta\delta = \mathbb{I}$.

Зафіксуємо довільний елемент β напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звууженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в \mathbb{N} і (\mathbb{N}, \leq) – цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число $n_\beta^{\mathbf{d}} \in \text{dom } \beta$ таке, що $n \in \text{dom } \beta$ для всіх натуральних $n \geq n_\beta^{\mathbf{d}}$ та існує

найменше натуральне число $n_\beta^{\mathbf{r}} \in \text{ran } \beta$ таке, що $n \in \text{dom } \beta$ для всіх натуральних $n \geq n_\beta^{\mathbf{r}}$.
Покладемо

$$\text{dom } \gamma = \mathbb{N}, \quad \text{ran } \gamma = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_\beta^{\mathbf{d}}\},$$

$$(i)\gamma = i - 1 + n_\beta^{\mathbf{d}} \quad \text{для всіх } i \in \text{dom } \gamma$$

і

$$\text{dom } \delta = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_\beta^{\mathbf{r}}\}, \quad \text{ran } \delta = \mathbb{N},$$

$$(j)\delta = i - n_\beta^{\mathbf{r}} + 1 \quad \text{для всіх } j \in \text{dom } \delta.$$

Тоді з леми 1 випливає, що $\gamma\beta\delta = \mathbb{I}$.

Наступне очевидне твердження описує природний частковий порядок на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ і воно впливає з описання природного часткового порядку на симетричному інверсному моноїді, оскільки \mathbf{IN}_∞ є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда \mathcal{I}_ω над множиною натуральних чисел \mathbb{N} .

Твердження 3. Для елементів α і β напівгрупи \mathbf{IN}_∞ такі умови є еквівалентними:

$$(i) \alpha \preceq \beta \text{ в } \mathbf{IN}_\infty;$$

(ii) часткове відображення α є звууженням часткового відображення β на $\text{dom } \alpha$;

(iii) часткове відображення α є козвууженням¹ часткового відображення β на $\text{ran } \alpha$.

Нагадаємо [9], що інверсна напівгрупа S називається *E-унітарною*, якщо ex – ідемпотент в S для деякого ідемпотента $e \in S$ та $x \in S$, то x – ідемпотент напівгрупи S . Тоді з твердження 3 і другої частини леми 1 випливає:

Наслідок 2. \mathbf{IN}_∞ – E-унітарна інверсна напівгрупа.

Найменша групова конгруенція \mathbf{C}_{mg} на інверсній напівгрупі S визначається так (див. [11, III.5]: $s\mathbf{C}_{\text{mg}}t$ в S тоді і лише тоді, коли існує ідемпотент $e \in S$ такий, що $es = et$).

Наступне твердження описує найменшу групову конгруенцію \mathbf{C}_{mg} на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ .

¹Нехай $\alpha: X \rightarrow Y$ – часткове відображення та B – підмножина в Y . Під козвууженням часткове відображення α будемо розуміти часткове відображення $\alpha|_B: X \rightarrow Y$ з $\text{dom } \alpha|_B = \{x \in X : (x)\alpha \in B\}$ і $\text{ran } \alpha|_B = B$.

Твердження 4. Для елементів α та β напівгрупи \mathbb{IN}_∞ такі умови є еквівалентними:

- (i) $\alpha \mathfrak{C}_{\text{mg}} \beta$;
- (ii) існує натуральне число $i \in \text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta$ таке, що $(i)\alpha = (i)\beta$;
- (iii) $(i)\alpha = (i)\beta$ для всіх $i \in \text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta$.

Доведення. Імплікація (iii) \Rightarrow (ii) очевидна. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbb{IN}_∞ є зсувом часткового зсуву множини натуральних чисел \mathbb{N} , то (ii) \Rightarrow (iii).

(iii) \Rightarrow (i) Якщо $i\alpha = i\beta$ для всіх $i \in \text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta$, то поклавши $\varepsilon: \text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta \rightarrow \text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta$ — тотожне відображення, отримуємо, що $\varepsilon \in E(\mathbb{IN}_\infty)$ і $\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta$.

(i) \Rightarrow (ii) Припустимо, що $\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta$ для деякого ідемпотента ε напівгрупи \mathbb{IN}_∞ . Оскільки ε — тотожне відображення коскінченної підмножини $\text{dom } \varepsilon$ множини натуральних чисел, то з означення напівгрупи \mathbb{IN}_∞ випливає, що $\text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta \cap \text{dom } \varepsilon \neq \emptyset$, а також, що $(i)\alpha = (i)\varepsilon\alpha = (i)\varepsilon\beta = (i)\beta$ для всіх $i \in \text{dom } \alpha \cap \text{dom } \beta \cap \text{dom } \varepsilon$.

Надвлі в цій праці через $(\mathbb{Z}, +)$ позначатимемо адитивну групу цілих чисел.

Теорема 5. Фактор-напівгрупа $\mathbb{IN}_\infty / \mathfrak{C}_{\text{mg}}$ ізоморфна групі $(\mathbb{Z}, +)$.

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи α та β напівгрупи \mathbb{IN}_∞ такі, що $\alpha \mathfrak{C}_{\text{mg}} \beta$. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbb{IN}_∞ є зсувом часткового зсуву множини натуральних чисел \mathbb{N} , то існують цілі числа \mathbf{z}_α та \mathbf{z}_β такі, що $(i)\alpha = i + \mathbf{z}_\alpha$ і $(j)\beta = j + \mathbf{z}_\beta$ для довільних $i \in \text{dom } \alpha$ та $j \in \text{dom } \beta$. З твердження 4 випливає, що $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_\beta$. Очевидно, з твердження 4 випливає, що виконується також обернене твердження: якщо $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_\beta$ для елементів α та β напівгрупи \mathbb{IN}_∞ , то $\alpha \mathfrak{C}_{\text{mg}} \beta$.

Означимо відображення $\mathfrak{F}: \mathbb{IN}_\infty \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ за формулою $(\alpha)\mathfrak{F} = \mathbf{z}_\alpha$. З леми 1 і твердження 4 випливає, що відображення $\mathfrak{F}: \mathbb{IN}_\infty \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ визначено коректно. Тоді для довільних елементів α та β напівгрупи \mathbb{IN}_∞ маємо, що $(i)\alpha\beta = (i + \mathbf{z}_\alpha)\beta = i + \mathbf{z}_\alpha + \mathbf{z}_\beta$, для всіх

$i \in \text{dom}(\alpha\beta)$. Таким чином, ми отримуємо, що $(\alpha\beta)\mathfrak{F} = \mathbf{z}_\alpha + \mathbf{z}_\beta = (\alpha)\mathfrak{F} + (\beta)\mathfrak{F}$, а отже $\mathfrak{F}: \mathbb{IN}_\infty \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ — гомоморфізм. Очевидно, що так визначене відображення \mathfrak{F} є сюр'єктивним.

Також, з твердження 4 випливає, що $(\alpha)\mathfrak{F} = (\beta)\mathfrak{F}$ тоді і лише тоді, коли $\alpha \mathfrak{C}_{\text{mg}} \beta$. Таким чином, найменша групова конгруенція \mathfrak{C}_{mg} на інверсній напівгрупі \mathbb{IN}_∞ породжує гомоморфізм $\mathfrak{F}: \mathbb{IN}_\infty \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ і конгруенція \mathfrak{C}_{mg} є ядром цього гомоморфізму, а отже виконується твердження теореми.

Нагадаємо, що інверсна напівгрупа S називається F -інверсною, якщо \mathfrak{C}_{mg} -клас $s_{\mathfrak{C}_{\text{mg}}}$ кожного елемента s має найбільший елемент стосовно природного часткового порядку \preceq в S [10].

Теорема 6. \mathbb{IN}_∞ — F -інверсна напівгрупа.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент α напівгрупи \mathbb{IN}_∞ . Означимо часткове відображення $\alpha_{\mathbf{m}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ наступним чином. Нехай \mathbf{z}_α — ціле число, означене для елемента α в тексті доведення теореми 5. Тоді можливі такі випадки:

- (i) $\mathbf{z}_\alpha < 0$; (ii) $\mathbf{z}_\alpha = 0$ або (iii) $\mathbf{z}_\alpha > 0$.

Покладемо:

- (i) якщо $\mathbf{z}_\alpha < 0$, то

$$\text{dom } \alpha_{\mathbf{m}} = \{i \in \mathbb{N} : i \geq -\mathbf{z}_\alpha + 1\},$$

$$\text{ran } \alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N} \text{ і } (j)\alpha_{\mathbf{m}} = j + \mathbf{z}_\alpha \text{ для всіх } j \in \text{dom } \alpha_{\mathbf{m}};$$

- (ii) якщо $\mathbf{z}_\alpha = 0$, то $\alpha_{\mathbf{m}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — тотожне відображення;

- (iii) якщо $\mathbf{z}_\alpha > 0$, то $\text{dom } \alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$,

$$\text{ran } \alpha_{\mathbf{m}} = \{i \in \mathbb{N} : i \geq -\mathbf{z}_\alpha + 1\}$$

$$\text{і } (j)\alpha_{\mathbf{m}} = j + \mathbf{z}_\alpha \text{ для всіх } j \in \text{dom } \alpha_{\mathbf{m}}.$$

Очевидно, що так визначене часткове відображення $\alpha_{\mathbf{m}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ є частковою ізометрією, а отже $\alpha_{\mathbf{m}} \in \mathbb{IN}_\infty$. Тоді з твердження 4 випливає, що $\alpha \mathfrak{C}_{\text{mg}} \alpha_{\mathbf{m}}$, а з твердження 3, що виконується відношення $\alpha \preceq \alpha_{\mathbf{m}}$.

Зауважимо, що за виконання умов:

- (i) якщо $\mathbf{z}_\alpha < 0$, то $\text{ran } \alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$;
- (ii) якщо $\mathbf{z}_\alpha = 0$, то $\text{dom } \alpha_{\mathbf{m}} = \text{ran } \alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$;
- (iii) якщо $\mathbf{z}_\alpha > 0$, то $\text{dom } \alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$,

з того, що $\alpha_{\mathbf{m}} \preceq \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbf{IN}_\infty$, з твердження 3 випливає рівність $\alpha_{\mathbf{m}} = \beta$. Таким чином, $\alpha_{\mathbf{m}}$ — найбільший елемент \mathbf{C}_{mg} -класу елемента α стосовно природного часткового порядку \preceq на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ .

Нагадаємо (див. наприклад [7, §1.12]), що біциклічною напівгрупою (або біциклічним моноїдом) $\mathcal{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p, q\}$ і визначена одним визначальним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль в теорії напівгруп. Так, зокрема, класична теорема Олафа Андерсена [4] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи. Стабільні напівгрупи не містять ізоморфної копії біциклічного моноїда [5].

Зауваження 1. 1. Добре відомо (див. [7, §1.12]), що біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p, q)$ ізоморфний напівгрупі $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$, породженій частковими перетвореннями α та β множини натуральних чисел \mathbb{N} , які визначаються наступним чином:

$$\text{dom } \alpha = \mathbb{N}, \quad \text{ran } \alpha = \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (n)\alpha = n + 1$$

i

$$\text{dom } \beta = \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \text{ran } \beta = \mathbb{N}, \quad (n)\beta = n - 1.$$

Оскільки композиція $\alpha\beta$ — тотожне відображення множини натуральних чисел, то з результатів про біциклічний моноїд, отриманих у [7, §1.12] випливає, що кожен елемент напівгрупи $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ однозначно зображається у вигляді $\beta^i \alpha^j$, де i та j — деякі невід'ємні цілі числа, $\beta^0 = \alpha^0$ — тотожне перетворення множини натуральних чисел, а також ізоморфізм $\mathcal{I}: \mathcal{C}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}(p, q)$ визначається за формулою $(\beta^i \alpha^j)\mathcal{I} = q^i p^j$. Таким чином, напівгрупа \mathbf{IN}_∞ містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи.

2. Легко бачити, що для довільного елемента $\beta^i \alpha^j$ напівгрупи $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$, де i та j — деякі невід'ємні цілі числа, виконуються такі умови:

$$(1) \text{ dom}(\beta^i \alpha^j) = \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, i\},$$

$$(2) \text{ ran}(\beta^i \alpha^j) = \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, j\},$$

$$(3) (n)\beta^i \alpha^j = n - j + i, \text{ для } n \in \text{dom}(\beta^i \alpha^j).$$

Також очевидно, що кожен частковий зсув $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + k$ нескінченного променя $\{l, l + 1, l + 2, \dots\}$ множини натуральних чисел \mathbb{N} збігається з частковим перетворенням $\beta^{l-1} \alpha^{k+l-1}$, яке є елементом напівгрупи $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$.

З нижче викладеного прикладу випливає, що на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ існують конгруенції, які не є груповими.

Приклад 1. Означимо відображення $\mathfrak{H}: \mathbf{IN}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ наступним чином. Нехай η — довільний елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то існує найменше натуральне число $n_\eta^{\mathbf{d}} \in \text{dom } \eta$ таке, що $n \in \text{dom } \eta$ для всіх натуральних $n \geq n_\eta^{\mathbf{d}}$ та існує ціле число \mathbf{z}_η таке, що (i) $\eta = i + \mathbf{z}_\eta$ для довільних $i \in \text{dom } \eta$. Покладемо $(\eta)\mathfrak{H} = \bar{\eta}$ — звуження часткового перетворення η множини натуральних чисел на множину $\{i \in \mathbb{N}: i \geq n_\eta^{\mathbf{d}}\}$. Тоді із зауваження 1(2) випливає, що часткове перетворення $\bar{\eta}$ збігається з частковим перетворенням $\beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}}-1}$, яке є елементом напівгрупи $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$.

Твердження 7. Відображення $\mathfrak{H}: \mathbf{IN}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ є сюр'ективним гомоморфізмом моноїдів.

Доведення. Спочатку зауважимо, що з означення відображення $\mathfrak{H}: \mathbf{IN}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ випливає, що $(\beta^i \alpha^j)\mathfrak{H} = \beta^i \alpha^j$ для довільного елемента $\beta^i \alpha^j$ напівгрупи $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$.

Нехай η та μ — довільні елементи напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то існують найменші натуральні числа

$n_\eta^{\mathbf{d}} \in \text{dom } \eta$ і $n_\mu^{\mathbf{d}} \in \text{dom } \mu$ такі, що $n \in \text{dom } \eta$ та $m \in \text{dom } \mu$ для всіх натуральних $n \geq n_\eta^{\mathbf{d}}$ і $m \geq n_\mu^{\mathbf{d}}$, та існують цілі числа \mathbf{z}_η і \mathbf{z}_μ такі, що $(i)\eta = i + \mathbf{z}_\eta$ і $(j)\mu = j + \mathbf{z}_\mu$ для довільних $i \in \text{dom } \eta$ та $j \in \text{dom } \mu$.

З означення відображення $\mathfrak{H}: \mathbf{IN}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{N}$, використавши зауваження 1(1), отримуємо:

$$(\eta)\mathfrak{H}(\mu)\mathfrak{H} = \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \beta^{n_\mu^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1} =$$

$$= \begin{cases} \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\eta+\mathbf{z}_\mu+n_\eta^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}} > n_\mu^{\mathbf{d}}; \\ \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}} = n_\mu^{\mathbf{d}}; \\ \beta^{n_\mu^{\mathbf{d}}-\mathbf{z}_\eta-1} \alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}} < n_\mu^{\mathbf{d}}. \end{cases}$$

Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то $\mathbf{z}_{\eta\mu} = \mathbf{z}_\eta + \mathbf{z}_\mu$. Далі визначимо найменше натуральне число $n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}} \in \text{dom } \eta$ таке, що $n \in \text{dom}(\eta\mu)$ для всіх натуральних $n \geq n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}}$. Знову, оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то отримуємо, що

$$n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}} = \max \{ \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}}, n_\mu^{\mathbf{d}} \} - \mathbf{z}_\eta.$$

Тоді

$$(\eta\mu)\mathfrak{H} = \beta^{n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_{\eta\mu}+n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}}-1} =$$

$$= \beta^{\max\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}, n_\mu^{\mathbf{d}}\}-\mathbf{z}_\eta-1} \alpha^{\mathbf{z}_\eta+\mathbf{z}_\mu+\max\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}, n_\mu^{\mathbf{d}}\}-\mathbf{z}_\eta-1}$$

$$= \beta^{\max\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}, n_\mu^{\mathbf{d}}\}-\mathbf{z}_\eta-1} \alpha^{\mathbf{z}_\mu+\max\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}, n_\mu^{\mathbf{d}}\}-1} =$$

$$= \begin{cases} \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\eta+\mathbf{z}_\mu+n_\eta^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}} > n_\mu^{\mathbf{d}}; \\ \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1} \alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}} = n_\mu^{\mathbf{d}}; \\ \beta^{n_\mu^{\mathbf{d}}-\mathbf{z}_\eta-1} \alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta + n_\eta^{\mathbf{d}} < n_\mu^{\mathbf{d}}. \end{cases}$$

Таким чином, виконується рівність $(\eta\mu)\mathfrak{H} = (\eta)\mathfrak{H}(\mu)\mathfrak{H}$ для всіх елементів η і μ напівгрупи \mathbf{IN}_∞ , а отже відображення $\mathfrak{H}: \mathbf{IN}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфізмом моноїдів.

Очевидно, що ядро

$$\ker \mathfrak{H} = \{ (\eta, \mu) \in \mathbf{IN}_\infty \times \mathbf{IN}_\infty : (\eta)\mathfrak{H} = (\mu)\mathfrak{H} \},$$

вище означеного гомоморфізму $\mathfrak{H}: \mathbf{IN}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{N}$ є конгруенцією на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ , яка не є груповою.

Гомоморфною ретракцією називається відображення з напівгрупи S в S , яке є одночасно ретракцією та гомоморфізмом [7].

Образ напівгрупи S при її гомоморфній ретракції називається *гомоморфним ретрактом*. Тобто гомоморфний ретракт напівгрупи S — це така піднапівгрупа T в S , що існує гомоморфізм з S в S , для якого піднапівгрупа T є множиною всіх його нерухомих точок.

З твердження 7 випливає

Наслідок 3. Напівгрупа $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи \mathbf{IN}_∞ .

Зауваження 2. Нехай S — напівгрупа, T — піднапівгрупа напівгрупи S і \mathcal{C}_S — конгруенція на S . Тоді з означення поняття конгруенція випливає, що звуження $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_S|_{T \times T}$ відношення \mathcal{C}_S на декартовий добуток $T \times T$ є конгруенцією на напівгрупі T

Виявляється, що піднапівгрупа $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ напівгрупи \mathbf{IN}_∞ дає можливість отримати критерій, коли конгруенція на \mathbf{IN}_∞ є груповою.

Теорема 8. Конгруенція \mathcal{C} на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}} = \mathcal{C}|_{\mathcal{C}_\mathbb{N} \times \mathcal{C}_\mathbb{N}}$ на піднапівгрупі $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ не є тотожною конгруенцією на $\mathcal{C}_\mathbb{N}$.

Доведення. (\Rightarrow) Із зауваження 2 випливає, якщо \mathcal{C} — групова на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ , то її звуження $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ на піднапівгрупі $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є також конгруенцією, а оскільки всі ідемпотенти напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є \mathcal{C} -еквівалентними, то всі ідемпотенти піднапівгрупи $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є також $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ -еквівалентними. За зауваженням 1(1) напівгрупа $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ ізоморфна біциклічному моноїдові, то з наслідку 1.32 [7] випливає, що конгруенція $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ на $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є також груповою, а отже $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ не є відношенням рівності на $\mathcal{C}_\mathbb{N}$.

(\Leftarrow) Припустимо, що конгруенція \mathcal{C} на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ є такою, що її звуження $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ на піднапівгрупі $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ не є відношенням рівності на $\mathcal{C}_\mathbb{N}$. Оскільки за зауваженням 1(1) напівгрупа $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ ізоморфна біциклічному моноїдові, то з наслідку 1.32 [7] випливає, що конгруенція $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ на $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є груповою, а отже всі ідемпотенти напівгрупи $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ -еквівалентними.

Нехай ε — довільний ідемпотент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Оскільки ε є тотожним відображенням коскінченної підмножини $\text{dom } \varepsilon$

множини натуральних чисел і (\mathbb{N}, \leq) — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число $n_\varepsilon^d \in \text{dom } \varepsilon$ таке, що $n \in \text{dom } \varepsilon$ для всіх натуральних $n \geq n_\varepsilon^d$. Нехай $\bar{\varepsilon}$ — тотожне відображення множини $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon^d + 1\}$. Тоді очевидно, що $\bar{\varepsilon}$ — ідемпотент підмоноїда $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ моноїда \mathbb{IN}_∞ , а оскільки конгруенція $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}$ на $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є груповою, то $\mathbb{I}\mathcal{C}_{\mathcal{C}_\mathbb{N}}\bar{\varepsilon}$, а отже й $\mathbb{I}\mathcal{C}\bar{\varepsilon}$. Також, легко бачити, що $\bar{\varepsilon} \preceq \varepsilon \preceq \mathbb{I}$, де \preceq — природний частковий порядок на напівгрупі \mathbb{IN}_∞ , і тоді з відношення $\mathbb{I}\mathcal{C}\bar{\varepsilon}$ випливає, що $\varepsilon = (\varepsilon\mathbb{I})\mathcal{C}(\varepsilon\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}$, а отже $\varepsilon\mathbb{I}$. З довільності вибору ідемпотента ε в \mathbb{IN}_∞ випливає, що всі ідемпотенти напівгрупи \mathbb{IN}_∞ є \mathcal{C} -еквівалентними. Тоді з твердження 1.4.21(3) з монографії [9] випливає, що \mathcal{C} — групова конгруенція на напівгрупі \mathbb{IN}_∞ .

З теореми 8 випливає такий наслідок:

Наслідок 4. Для довільної конгруенції \mathcal{C} на моноїді \mathbb{IN}_∞ виконується лише одна з умов:

- (1) \mathcal{C} — групова конгруенція на \mathbb{IN}_∞ ;
- (2) звуження природного гомоморфізму $\mathcal{C}^\sharp : \mathbb{IN}_\infty \rightarrow \mathbb{IN}_\infty/\mathcal{C}$ на підмоноїд $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є тотожним відображенням.

Також з теорем 5 і 8 випливає наслідок 5.

Наслідок 5. Нехай напівгрупа не містить ізоморфної копії біциклічного моноїда. Тоді для довільного гомоморфізму $\mathfrak{F} : \mathbb{IN}_\infty \rightarrow S$ існує єдиний гомоморфізм $\mathfrak{H} : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow S$ такий, що наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{IN}_\infty & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & S \\
 \mathcal{C}_{\text{mg}}^\sharp \downarrow & \nearrow \mathfrak{H} & \\
 (\mathbb{Z}, +) & &
 \end{array}$$

є комутативною.

Лема 2. Нехай \mathcal{C} — конгруенція на напівгрупі \mathbb{IN}_∞ , яка відмінна від групової та тотожної. Тоді існують два різні \mathcal{C} -еквівалентні ідемпотенти ε і ι напівгрупи \mathbb{IN}_∞ такі, що $n_\varepsilon^d = n_\iota^d$.

Доведення. Оскільки конгруенція \mathcal{C} на напівгрупі \mathbb{IN}_∞ відмінна від тотожної, то існують два різні \mathcal{C} -еквівалентні елементи $\gamma, \delta \in \mathbb{IN}_\infty$. За твердженням 1 кожен \mathcal{H} -клас напівгрупи \mathbb{IN}_∞ є одноелементним, то виконується хоча б одна з умов: $\gamma\gamma^{-1} \neq \delta\delta^{-1}$ або $\gamma^{-1}\gamma \neq \delta^{-1}\delta$. Отже, існують два різні \mathcal{C} -еквівалентні ідемпотенти $\varepsilon, \iota \in \mathbb{IN}_\infty$. За теоремою 8 елементи ε і ι не можуть одночасно бути ідемпотентами підмоноїда $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ моноїда \mathbb{IN}_∞ , оскільки конгруенція \mathcal{C} на \mathbb{IN}_∞ не є груповою.

Припустимо, що $n_\varepsilon^d > n_\iota^d$. Нехай $\bar{\varepsilon}$ — тотожне відображення множини $\{k \in \mathbb{N} : k \geq n_\varepsilon^d - 1\}$ і $\bar{\iota}$ — тотожне відображення множини $\{k \in \mathbb{N} : k \geq n_\iota^d\}$. Тоді, очевидно, що $\bar{\varepsilon}, \bar{\iota} \in E(\mathcal{C}_\mathbb{N})$ і $\bar{\varepsilon} \neq \bar{\iota}$. Позаяк $\varepsilon\mathcal{C}\iota$, то $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon\bar{\varepsilon})\mathcal{C}(\iota\bar{\varepsilon}) = \bar{\iota}$, а отже два різні ідемпотенти підмоноїда $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ моноїда \mathbb{IN}_∞ є \mathcal{C} -еквівалентними. Тоді за теоремою 8 конгруенція \mathcal{C} є груповою, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що нерівність $n_\varepsilon^d > n_\iota^d$ не виконується для двох різних \mathcal{C} -еквівалентних ідемпотентів ε і ι напівгрупи \mathbb{IN}_∞ .

Аналогічно доводиться, що нерівність $n_\varepsilon^d < n_\iota^d$ не виконується для двох різних \mathcal{C} -еквівалентних ідемпотентів ε і ι напівгрупи \mathbb{IN}_∞ .

Лема 3. Для елемента ξ моноїда \mathbb{IN}_∞ наступні умови є еквівалентними:

- (1) $\xi \in \mathcal{C}_\mathbb{N}$;
- (2) $n_\xi^d = \min\{n \in \mathbb{N} : n \in \text{dom } \xi\}$;
- (3) $n_\xi^r = \min\{n \in \mathbb{N} : n \in \text{ran } \xi\}$.

Доведення. Імплікації (1) \Rightarrow (2) та (1) \Rightarrow (3) випливають з означення напівгрупи $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ (див. зауваження 1(1)).

Імплікація (2) \Rightarrow (1) випливає із зауваження 1(2). Справді, за лемою 1 елемент ξ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в \mathbb{N} , а отже маємо, що $(n)\xi = n - n_\xi^d + n_\xi^r$ для всіх $n \in \text{dom } \xi$. Тоді із зауваження 1(2) випливає, що $\xi = \beta^{n_\xi^d-1} \alpha^{n_\xi^r-1}$.

Еквівалентність умов (2) та (3) є наслідком леми 1, оскільки елемент ξ є звуженням

часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в \mathbb{N} .

Означення 1. Нехай ξ — довільний елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ такий, що $\xi \notin \mathcal{C}_\mathbb{N}$. Означимо

$$\begin{aligned} \underline{n}_\xi^d &= \min \{n \in \mathbb{N} : n \in \text{dom } \xi\}, \\ \underline{n}_\xi^r &= \min \{n \in \mathbb{N} : n \in \text{ran } \xi\}, \\ \bar{n}_\xi^d &= \max \{n \in \text{dom } \xi : n < n_\xi^d\}, \\ \bar{n}_\xi^r &= \max \{n \in \text{ran } \xi : n < n_\xi^r\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що виконуються наступні умови: $\underline{n}_\xi^d \leq \bar{n}_\xi^d < n_\xi^d$, $\underline{n}_\xi^r \leq \bar{n}_\xi^r < n_\xi^r$, $(\underline{n}_\xi^d)\xi = \underline{n}_\xi^r$ і $(\bar{n}_\xi^d)\xi = \bar{n}_\xi^r$, для довільного $\xi \in \mathbf{IN}_\infty \setminus \mathcal{C}_\mathbb{N}$. Також, елемент $\xi \in \mathbf{IN}_\infty \setminus \mathcal{C}_\mathbb{N}$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли $\underline{n}_\xi^d = \underline{n}_\xi^r$ і $\bar{n}_\xi^d = \bar{n}_\xi^r$.

Лема 4. Кожен ідемпотент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є одиницею піднапівгрупи в \mathbf{IN}_∞ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Доведення. Нехай ε — довільний ідемпотент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ . Якщо $\varepsilon \in \mathcal{C}_\mathbb{N}$ і оскільки напівгрупа $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то не зменшуючи загальності можемо вважати, що ідемпотент ε можна ототожнити з ідемпотентом $q^i p^i$ біциклічного моноїда $\mathcal{C}(p, q)$, для деякого невід'ємного цілого числа i . Тоді

$$\begin{aligned} q^i p^{i+1} \cdot q^{i+1} p^i &= q^i p^i, \\ q^{i+1} p^i \cdot q^i p^{i+1} &= q^{i+1} p^{i+1}, \\ q^i p^{i+1} \cdot q^i p^i &= q^i p^{i+1}, \\ q^i p^i \cdot q^i p^{i+1} &= q^i p^{i+1}, \\ q^{i+1} p^i \cdot q^i p^i &= q^{i+1} p^i, \\ q^i p^i \cdot q^{i+1} p^i &= q^{i+1} p^i \end{aligned}$$

і $q^{i+1} p^{i+1} \neq q^i p^i$, а отже за лемою 1.31 з [7] піднапівгрупа в \mathbf{IN}_∞ , породжена елементами $q^i p^{i+1}$ і $q^{i+1} p^i$ ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Припустимо, що $\varepsilon \notin \mathcal{C}_\mathbb{N}$. Тоді для ідемпотента ε виконуються умови $\underline{n}_\varepsilon^d \leq \bar{n}_\varepsilon^d < n_\varepsilon^d$. Означимо часткову бієкцію $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ так: $\text{dom } \gamma = \text{dom } \varepsilon$,

$$\text{ran } \gamma = \{i - \underline{n}_\varepsilon^d + \bar{n}_\varepsilon^d : i \in \text{dom } \varepsilon\}$$

і $(n)\gamma = n - \underline{n}_\varepsilon^d + \bar{n}_\varepsilon^d$, для всіх $n \in \text{dom } \gamma$. Тоді, очевидно, що $\gamma \in \mathbf{IN}_\infty$ і виконуються такі співвідношення:

$$\varepsilon\gamma = \gamma\varepsilon = \gamma,$$

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}\varepsilon &= \gamma^{-1}\varepsilon^{-1} = (\varepsilon\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}, \\ \varepsilon\gamma^{-1} &= \varepsilon^{-1}\gamma^{-1} = (\gamma\varepsilon)^{-1} = \gamma^{-1}, \\ \gamma\gamma^{-1} &= \varepsilon \quad \text{і} \quad \gamma^{-1}\gamma \neq \varepsilon, \end{aligned}$$

а отже за лемою 1.31 з [7] піднапівгрупа в \mathbf{IN}_∞ , породжена елементами γ і γ^{-1} ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Теорема 9. Для конгруенції \mathcal{C} на піднапівгрупі \mathbf{IN}_∞ наступні умови є еквівалентними:

- (1) \mathcal{C} — групова конгруенція на \mathbf{IN}_∞ ;
- (2) існує піднапівгрупа S в \mathbf{IN}_∞ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи напівгрупи S є \mathcal{C} -еквівалентними;
- (3) для довільної піднапівгрупи T в \mathbf{IN}_∞ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, два різні елементи напівгрупи T є \mathcal{C} -еквівалентними.

Доведення. Імплікація (1) \Rightarrow (2) випливає з теореми 8, а імплікації (1) \Rightarrow (3) і (3) \Rightarrow (2) є очевидними.

Доведемо, що виконується імплікація (2) \Rightarrow (1). Припустимо, що S — піднапівгрупа в \mathbf{IN}_∞ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи напівгрупи S є \mathcal{C} -еквівалентними. Тоді за наслідком 1.32 з [7] усі ідемпотенти напівгрупи S є \mathcal{C} -еквівалентними.

Нехай ε — одиниця напівгрупи S . З теореми 8 випливає, що не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varepsilon \notin \mathcal{C}_\mathbb{N}$. Справді, припустивши, що $\varepsilon \in \mathcal{C}_\mathbb{N}$, то, оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи \mathbf{IN}_∞ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, існує елемент $\gamma \in S \cap \mathcal{C}_\mathbb{N}$ такий, що $\text{dom } \varepsilon = \text{dom } \gamma$ і $\gamma \neq \varepsilon$. Тоді $\gamma\gamma^{-1} = \varepsilon$, $\gamma^{-1}\gamma \neq \varepsilon$ і $\gamma, \gamma^{-1}, \gamma^{-1}\gamma \in \mathcal{C}_\mathbb{N} \cap S$. А отже, два ідемпотента напівгрупи $\mathcal{C}_\mathbb{N}$ є \mathcal{C} -еквівалентними. Тоді за наслідком 1.32 з [7] і теоремою 8, \mathcal{C} — групова конгруенція на напівгрупі \mathbf{IN}_∞ .

Зафіксуємо довільний елемент γ напівгрупи S такий, що $\gamma \notin \mathcal{C}_\mathbb{N}$. Для довільного натурального числа i покладемо

$$\varepsilon_i = \underbrace{\gamma^{-1} \dots \gamma^{-1}}_{i\text{-разів}} \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{i\text{-разів}}.$$

Тоді, очевидно, що ε_i — ідемпотент напівгрупи S і

$$\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{i\text{-разів}} \underbrace{\gamma^{-1} \dots \gamma^{-1}}_{i\text{-разів}} = \varepsilon,$$

бо $\gamma\gamma^{-1} = \varepsilon$. Також, оскільки всі \mathcal{H} -класи в біциклічному моноїді є тривіальними та його напівгрупа ідемпотентів є ω -ланцюгом, то

$$\text{dom } \varepsilon_{i+1} \subsetneq \text{dom } \varepsilon_i \subsetneq \text{dom } \varepsilon$$

для довільного натурального числа i . $\exists \varepsilon \notin \mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ випливає, що

$$\underline{n}_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} = \underline{n}_{\varepsilon}^{\mathbf{r}} \leq \bar{n}_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} = \bar{n}_{\gamma^i}^{\mathbf{d}} < n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} = n_{\gamma^i}^{\mathbf{d}},$$

$$\underline{n}_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} = \underline{n}_{\varepsilon}^{\mathbf{r}} < \underline{n}_{\gamma^i}^{\mathbf{r}} \leq \bar{n}_{\gamma^i}^{\mathbf{r}} < n_{\gamma^i}^{\mathbf{r}},$$

$$\underline{n}_{\gamma^i}^{\mathbf{r}} < \underline{n}_{\gamma^{i+k}}^{\mathbf{r}}, \quad \bar{n}_{\gamma^i}^{\mathbf{r}} < \bar{n}_{\gamma^{i+k}}^{\mathbf{r}} \quad \text{і} \quad n_{\gamma^i}^{\mathbf{r}} < n_{\gamma^{i+k}}^{\mathbf{r}},$$

для довільних натуральних чисел i та k .

Тоді існує таке натуральне число j , що $n_{\gamma}^{\mathbf{r}} \leq \underline{n}_{\gamma^j}^{\mathbf{r}}$. Означимо: φ_0, φ_1 і φ_2 — тотожні відображення множин $\{n \in \mathbb{N} : n \geq \underline{n}_{\varepsilon}^{\mathbf{d}}\}$, $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}}\}$ і $\{n \in \mathbb{N} : n \geq \underline{n}_{\gamma^j}^{\mathbf{d}}\}$, відповідно. Тоді φ_0, φ_1 і φ_2 — різні ідемпотенти напівгрупи $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$, і оскільки

$$\varepsilon_j \preceq \varphi_2 \preceq \varphi_1 \preceq \varepsilon \preceq \varphi_0,$$

то з умови $\varepsilon_j \mathcal{C} \varepsilon$ випливає, що $\varphi_2 \mathcal{C} \varphi_1$. Оскільки напівгрупа $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}$ ізоморфна біциклічному моноїдові, то за наслідком 1.32 з [7] та теоремою 8, \mathcal{C} — групова конгруенція на напівгрупі \mathbf{IN}_{∞} .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безущак, О.О.* (2008). Відношення Гріна інверсної напівгрупи частково визначених коскінчених ізометрій дискретної лінійки. Вісник Київського університету. Серія фізико-математична, 1, 12–16.
2. *Вагнер, В.В.* (1952). Обобщённые группы. Доклады АН СССР, 84, 1119–1122.
3. *Гутік, О., Савчук, А.* (2017). Про напівгрупу \mathbf{ID}_{∞} . Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, 83, 5–19.
4. *Andersen, O.* (1952). Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen. PhD Thesis. Hamburg.
5. *Anderson, L.W., Hunter, R.P., & Koch, R.J.* (1965). Some results on stability in semigroups. Transactions of the American Mathematical Society, 117, 521–529. DOI: 10.1090/S0002-9947-1965-0171869-7

6. *Bezushchak, O.* (2004). On growth of the inverse semigroup of partially defined co-finite automorphisms of integers. Algebra and Discrete Mathematics, 2, 45–55.

7. *Clifford, A.H., & Preston, G.B.* (1961, 1972). The algebraic theory of semigroups. Vols. 1 and 2. Providence, RI: American Mathematical Society.

8. *Gutik, O., & Repovš, D.* (2011). Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of \mathbb{N} having cofinite domain and image. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 48(3), 342–353. DOI: 10.1556/SScMath.48.2011.3.1176

9. *Lawson, M.* (1998). Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. Singapore: World Scientific.

10. *McFadden, R., & O'Carroll, L.* (1971). F -inverse semigroups. Proceedings of the London Mathematical Society, III Serie, 22(4), 652–666. DOI: 10.1112/plms/s3-22.4.652

11. *Petrich, M.* (1984). Inverse semigroups. New York, NY: John Wiley & Sons.