Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 1, 110–119 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №1, 110–119

Пукальський І.Д., Лусте І.П.

Оптимальне керування в багатоточковій крайовій задачі для $2b$-параболічних рівнянь

Досліджується задача оптимального керування системою, що описується загальною багатоточковою крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь. Розглянуто випадки внутрішнього, стартового і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою функції Гріна крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння встановлено існування, єдиність та інтегральне зображення розв'язків загальної багатоточкової крайової задачі для $2b$-параболічних рівнянь. Знайдено оцінки розв'язків багатоточкової крайової задачі та його похідних в гельдерових просторах. Встановлено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується загальною багатоточковою крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь.

Ключові слова і фрази: нелокальна крайова задача, задача оптимізації, функція Гріна.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.)*

Вступ

Оптимальне керування системами, що описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними є надзвичайно плідним полем для досліджень та джерелом для багатьох складних математичних проблем та цікавих застосувань. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема гідро- і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, плазми, теорії біологічних популяцій.

Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, закладено у монографії [1]. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку, отримані, зокрема, у працях [2], [3], [4], [5], [6].

У роботах [7], [8], [9] вивчались задачі оптимального керування системами, що описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними. Зокрема, у праці [7] вивчають задачу розподілу ресурсів, яка полягає у максимізації чисельності елементів певного виду.

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K65.

Задача вибору оптимального керування системами, що описуються параболічними крайовими задачами з обмеженим внутрішнім керуванням присвячено праці [10], [11], [12], [13]. Функціонали якості визначаються об'ємними інтегралами.

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системи, що описується загальною багатоточковою параболічною задачею з обмеженим внутрішнім, межовим та стартовим керуванням. За допомогою функції Гріна загальної параболічної крайової задачі доведено існування єдиного розв'язку загальної багатоточкової крайової задачі та встановлено оцінки похідних розв'язку у гельдерових просторах. Одержані результати використовуються для встановлення необхідних та достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується багатоточковою крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь з внутрішнім, стартовим та межовим керуванням. Критерій якості задається у вигляді суми об'ємних та поверхневих інтегралів.

1 Постановка задачі та основні обмеження

Нехай $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ – довільні числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$. Розглянемо в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ задачу знаходження функцій (u, q), $q = (q_1, q_2, q_3)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_D F_1(t, x; u, q_1) dx + \int\limits_D F_2(x, u(t_1, x; q), \ldots, u(t_N, x; q), q_2) dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{\partial D} F_3(t, x; u, q_3) d_x S \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \big\{ q | q_1 \in C^{\alpha}(Q),\ q_2 \in C^{2b+\alpha}(D),\ q_3 \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma),\ \nu_{11}(t,x) \le q_1 \le \nu_{12}(t,x),\ \nu_{21}(x) \le q_2 \le \nu_{22}(x),\ \nu_{31}(t,x) \le q_3 \le \nu_{32}(t,x) \big\}$, із яких $u(t, x; q_1(t,x), q_2(x), q_3(t,x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left(D_t - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x) D_x^k \right) u = f_0(t, x; q_1(t,x)), \tag{2}$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$(Bu)(x) \equiv u(t_0, x; q) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) u(t_j, x; q) = \varphi(x; q_2(x)) \tag{3}$$

і на бічній поверхні Γ крайову умову

$$(B_i u)(t,x)|_{\Gamma} \equiv \left(\sum_{|k| \le r_i} b_k^{(i)}(t,x) D_x^k \right) u|_{\Gamma} = f_i(t, x; q_3(t,x)), \tag{4}$$

$0 \le r_i \le 2b-1$, $i \in \{1, 2, \ldots, b\}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \ldots D_{x_n}^{k_n}$.

Будемо вважати виконаними такі умови:

а) крайова задача (2)–(4) параболічна [14] і $A_k(t,x) \in C^{l+\alpha}(Q)$, $b_k^{(i)}(t,x) \in C^{2b-r_i+l+\alpha}(\Gamma)$, $d_i(x) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $\partial D \in C^{2b+l+\alpha}$, $l = 4b - 2r + 1$, $r = \min\limits_i r_i$;

б) функції $\varphi(x; q_2(x)) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $f_0(t,x; q_1(t,x)) \in C^{\alpha}(Q)$, $f_i(t,x; q_3(t,x)) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $(B_i\varphi)(0,x)|_{\Gamma} = f_i(0,x; q_3(0,x))$;

в) $f_0(t,x;q_1(t,x)) = r_0(t)\psi_0(x, q_1(x))$, $f_i(t,x;q_3(t,x)) = r_i(t)\psi_i(x, q_3(x))$, $F_1(t,x;u(t,x;q),q_1)$, $F_2(x;\vec{v})$, $\vec{v} = \{v_1,\ldots,v_{N+1}\} = \{u(t_1,x;q), u(t_2,x;q),\ldots,u(t_N,x;q),q_2\}$, $F_3(t,x;u(t,x;q),q_3)$ мають похідні другого порядку за змінними $(u;q_1,q_2,q_3)$, які належать, як функції змінних (t,x), x відповідно просторам $C^{\alpha}(Q)$, $C^{2b+\alpha}(D)$, $C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $\nu_{1l} \in C^{\alpha}(Q)$, $\nu_{2l} \in C^{2b+\alpha}(D)$, $\nu_{3l} \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $l \in \{1,2,3\}$.

За умов накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (2) і крайових умов (4), існує функція Гріна $(G_0, G_1, \ldots, G_b)$ крайової задачі ([14], теорема 1)

$$(L\omega)(t,x) = f_0(t,x;q_1),\ \omega(t_0,x;q) = \varphi(x;q_2),\ (B_i\omega)(t,x)|_{\Gamma} = f_i(t,x;q_3), \tag{5}$$

за допомогою якої розв'язок задачі (5) визначається формулою

$$\omega(t,x;q) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_D G_0(t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi + \int_D G_0(t,x,t_0,\xi)\varphi(\xi,q_2)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\partial D} G_i(t,x,\tau,\xi) f_i(\tau,\xi;q_3) d_{\xi}S. \tag{6}$$

Якщо $l \geq 0$ і виконані умови а), б), то згідно з теоремою 1 [14] існує єдиний розв'язок задачі (5) в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ при довільних $q \in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|\omega\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \leq c\left(\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)} + \sum_{i=1}^{b} \|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right). \tag{7}$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а), б),* $\sum\limits_{j=1}^{N} |d_j(x)| \int\limits_D |G_0(t_j,x,t_0,\xi)|d\xi \leq \lambda_0 < 1$. *Тоді існує функція Гріна задачі* (2)–(4) *з компонентами* $(G_0, G_1, \ldots, G_b; Z_0, Z_1, \ldots, Z_b)$, *справедлива формула*

$$u(t,x,q) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_D G_0(t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi + \int_D G_0(t,x,t_0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\partial D} G_i(t,x,\tau,\xi) f_i(\tau,\xi;q_3) d_{\xi}S + \sum_{j=1}^{N} \left[\int_{t_0}^{t} d\tau \int_D Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi + \right.$$

$$+\int\limits_D Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+\sum_{i=1}^{b}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{\partial D}Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi)f_i(\tau,\xi;q_3)d_\xi S\Bigg] \tag{8}$$

і для єдиного розв'язку задачі (2)–(4) *правильна оцінка*

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)}\le c\left(\|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)}+\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right). \tag{9}$$

Доведення. Розв'язок задачі (2)–(4) шукаємо у вигляді

$$u(t,x;q)=\omega(t,x;q)+\int\limits_D G_0(t,x,t_0,\xi)u(t_0,\xi;q)d\xi, \tag{10}$$

де $\omega(t,x;q)$ – розв'язок задачі (5).

Задовольняючи нелокальну умову (3), маємо

$$u(t_0,x;q)+\sum_{j=1}^{N}d_j(x)\int\limits_D G_0(t_j,x,t_0,\xi)u(t_0,\xi;q)d\xi=-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)\omega(t_j,x;q)\equiv\Phi(x). \tag{11}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (11) шукаємо методом послідовних наближень і для нього справедлива оцінка

$$|u(t_0,x;q)|\le\frac{c\lambda_0}{1-\lambda_0}\left(\|f_0\|_{C(Q)}+\|\varphi\|_{C(D)}+\sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C(\Gamma)}\right). \tag{12}$$

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (11) у вигляді

$$u(t_0,x;q)=\Phi(x)+\int\limits_D R(x,y)\Phi(y)dy, \tag{13}$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,y)+\sum_{j=1}^{N}d_j(x)G_0(t_j,x,t_0,\xi)=-\int\limits_D\sum_{j=1}^{N}d_j(x)G_0(t_j,x,t_0,y)R(y,\xi)dy$$

звідки випливає оцінка

$$\left|\int\limits_D R(x,\xi)d\xi\right|\le\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Підставляючи у рівність (13) замість $\Phi(x)$ значення

$$\Phi(x)=-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)\left[\int\limits_{t_0}^{t_j}d\tau\int\limits_D G_0(t_j,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi+\int\limits_D G_0(t_j,x,t_0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_{t_0}^{t_j}d\tau\int_{\partial D}G_i(t_j,x,t_0,\xi)f_i(\tau,\xi;q_3)d_\xi S\Bigg] \qquad (14)$$

і змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$u(t_0,x;q)=\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\int_{t_0}^{t_j}d\tau\int_D\Gamma_0(t_j,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi+\int_D\Gamma_0(t_j,x,t_0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi+$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_{t_0}^{t_j}d\tau\int_{\partial D}\Gamma_i(t_j,x,\tau,\xi)f_i(\tau,\xi;q_3)d_\xi S\Bigg], \qquad (15)$$

$$\Gamma_m(t_j,x,\tau,\xi)=-d_j(x)G_m(t_j,x,\tau,\xi)-\int_D d_j(y)R(x,y)G_m(t_j,y,\tau,\xi)dy,\ m\in\{0,1,\ldots,b\}.$$

Підставляючи у рівність (10) значення $u(t_0,x;q)$, враховуючи зображення (6) та змінюючи порядок інтегрування, отримаємо для розв'язку задачі (2)–(4) формулу (8), де

$$Z_m(t_j,t,x,\tau,\xi)=\int_D G_0(t,x,t_0,y)\Gamma_m(t_j,y,\tau,\xi)dy,\ m\in\{0,1,\ldots,b\}.$$

Враховуючи нерівності (12), (7), оцінки компонент функцій Гріна задачі (5) із [14] і рівність (10), маємо

$$\|u(t_j,x;q)\|_{C^{2b+\alpha}(D)}\le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)}+\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (16)$$

Запишемо задачу (2)–(4) у вигляді

$$(Lu)(t,x)=f_0(t,x;q_1),\ u(t_0,x;q)=\varphi(x;q_2)-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)u(t_j,x;q),$$

$$(B_iu)(t,x)|_\Gamma=f_i(t,x;q_3).$$

Тоді, враховуючи обмеження $\varphi(x,q_2)-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)u(t_j,x;q)\in C^{2b+\alpha}(D)$ і оцінку

$$\left\|\varphi-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)u(t_j,x;q)\right\|_{C^{2b+\alpha}(D)}\le c\left(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)}+\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)}+\sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right),$$

отримаємо оцінку (9). □

2 Задача оптимального керування

В області Q розглянемо задачу (1)–(4). Будемо вважати, що виконані умови а), б), в).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_0(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} G_0(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t_j} r_0(\tau)d\tau \times$$

$$\times \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi)dx + \sum_{k=1}^{N} \left[\int\limits_{t_0}^{t_k} r_0(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} G_0(t_k,x,\tau,\xi)dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t_j} r_0(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} Z_0(t_j,t_k,x,\tau,\xi)dx \right] + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_0(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} \times$$

$$\times G_0(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t_j} r_0(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi)dx,$$

$$\lambda_2(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} \left[G_0(t,x,t_0,\xi) + \sum_{j=1}^{N} Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi) \right] dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} \left[G_0(t_k,x,\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{N} Z_0(t_j,t_k,x,t_0,\xi) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} \left[G_0(t,x,t_0,\xi) + \sum_{j=1}^{N} Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi) \right] dx,$$

$$\mu_i(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_i(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} G_i(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t_j} r_i(\tau)d\tau \times$$

$$\times \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi)dx + \sum_{k=1}^{N} \left[\int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} r_i(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} G_i(t_k,x,\tau,\xi)dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t_k} r_i(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} Z_i(t_j,t_k,x,\tau,\xi)dx \right] + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_i(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} \times$$

$$\times G_i(t,x,\tau,\xi)d_xS + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t_j} r_i(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi)d_xS, \ i \in \{1,2,\ldots,b\},$$

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,q_1)=\lambda_1(\xi)f_0(\xi;q_1(\xi))+\int\limits_{t_0}^{t_{N+1}}F_1(t,\xi;u,q_1)dt,$$

$$H_2(\xi,u,\lambda_2,q_2)=\lambda_2(\xi)\varphi(\xi;q_2(\xi))+F_2(\xi,\vec{v}),$$

$$H_3(\xi,u,\mu,q_3)=\sum_{i=1}^{b}\mu_i(\xi)\psi_i(\xi;q_3(\xi))+\int\limits_{t_0}^{t_{N+1}}F_3(t,\xi;u,q_3)dt,$$

$q^{(0)}=\left(q_1^{(0)},q_2^{(0)},q_3^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(t,x;q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (1)–(4).

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови а)–в). Тоді*

1) якщо $D_{q_l}H_l>0$, $l\in\{1,2,3\}$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{11},\nu_{21},\nu_{31})$;

2) якщо $D_{q_l}H_l>0$, $l\in\{1,2\}$, $\partial_{q_3}H_3<0$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{11},\nu_{21},\nu_{32})$;

3) якщо $D_{q_1}H_1>0$, $D_{q_2}H_2<0$, $D_{q_3}H_3<0$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{11},\nu_{22},\nu_{32})$;

4)якщо $D_{q_l}H_l<0$, $l\in\{1,2,3\}$, то оптимальне керування $q^{(0)}=(\nu_{12},\nu_{22},\nu_{32})$.

Доведення. Розглянемо випадок 1). Нехай $\Delta q=(\Delta q_1,\Delta q_2,\Delta q_3)$ – допустимий приріст керування $q=(q_1,q_2,q_3)$. Через $\Delta u=\Delta q_1u+\Delta q_2u+\Delta q_3u$ позначимо приріст функції $u(t,x;q_1,q_2,q_3)$. Тоді Δq_ku в області $\mathbb{Q}$ будуть розв'язками відповідних крайових задач

$$(L\Delta q_ku)(t,x)=\delta_{k1}r_0(t)\Delta f_0(x,q_1),$$

$$(B\Delta q_ku)(x)=\delta_{k2}\Delta\varphi(x,q_2),$$

$$(B_i\Delta q_ku)(t,x)|_\Gamma=\delta_{k3}\Delta f_i(x,q_3)r_i(t),\tag{17}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера, $k\in\{1,2,3\}$.

За теоремою 1 існує функція Гріна задачі (17) і прирости Δq_ku зображаються формулами

$$\Delta q_1u=\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\tau,\xi)\Delta f_0(\xi,q_1(\xi))r_0(\tau)d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0}^{t}r_0(\tau)d\tau\int\limits_D Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi)\Delta f_0(\xi,q_1(\xi))d\xi,$$

$$\Delta q_2u=\int\limits_D\left[G_0(t,x,t_0,\xi)+\sum_{j=1}^{N}Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi)\right]\Delta\varphi(\xi,q_2(\xi))d\xi,$$

$$\Delta q_3u=\sum_{i=1}^{b}\left[\int\limits_{t_0}^{t}r_i(\tau)d\tau\int\limits_{\partial D}G_i(t,x,\tau,\xi)\Delta f_i(\xi,q_3(\xi))d_\xi S+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0}^{t}r_i(\tau)d\tau\int\limits_{\partial D}Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi)\Delta f_i(\xi,q_3(\xi))d_\xi S\right].\tag{18}$$

Розглянемо приріст функціоналу

$$\Delta I(q) = \Delta q_1 I(q) + \Delta q_2 I(q) + \Delta q_3 I(q). \tag{19}$$

Скористаємося формулою Тейлора, тоді

$$\Delta q_k I = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{D} \left[\frac{\partial F_1}{\partial u} \Delta q_k u + O\left(\|\Delta q_k u\|^2\right) + \delta_{k1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \Delta q_1 + O\left(|\Delta q_1|^2\right) \right) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{D} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial F_2}{\partial v_k} \Delta q_k v + O\left(\|\Delta q_k v\|^2\right) + \delta_{k2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_2} \Delta q_2 + O\left(|\Delta q_2|^2\right) \right) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial F_3}{\partial u} \Delta q_k u + O\left(\|\Delta q_k u\|^2\right) + \delta_{k3} \left(\frac{\partial F_3}{\partial q_3} \Delta q_3 + O\left(|\Delta q_3|^2\right) \right) \right] d_x S. \tag{20}$$

Підставляючи (18), (20) у (19) і, змінюючи при цьому порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(q) = \int\limits_{D} \left[D_{q_1} H_1(\xi, u, \lambda_1, q_1) \Delta q_1 + D_{q_2} H_2(\xi, u, \lambda_2, q_2) \Delta q_2 + O\left(|\Delta q_1|^2\right) + O\left(|\Delta q_2|^2\right) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \left[\Delta q_3 H_3(\xi, u, \mu, q_3) \Delta q_3 + O\left(|\Delta q_3|^2\right) \right] d_x S.$$

Якщо $q_k = \nu_{k1}(x)$ і $D_{q_k} H_k > 0$, то при досить малих Δq_k маємо $\Delta I(q) > 0$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Нехай $q^{(0)}$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I(q) > 0$. Перевіримо виконання умови 1) теореми 2. Якщо вирази $D_{q_1} H_1$, $D_{q_2} H_2$, $D_{q_3} H_3$ – знакозмінні величини, тобто $D_{q_1} H_1 > 0$ в $D_1^+ \subset D$, $D_{q_2} H_2 > 0$ в $D_2^+ \subset D$, $D_{q_3} H_3 > 0$ в $\Gamma^+ \subset \Gamma$ і $D_{q_1} H_1 < 0$ в $D \setminus D_1^+$, $D_{q_2} H_2 < 0$ в $D \setminus D_2^+$, $D_{q_3} H_3 < 0$ в $\Gamma \setminus \Gamma^+$ то, використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(q) = D_{q_1} H_1(x^+, u^+, \lambda_1^+, q_1^+) \int\limits_{D_1^+} \Delta q_1 dx - \left| D_{q_1} H_1(x^-, u^-, \lambda_1^-, q_1^-) \right| \int\limits_{D \setminus D_1^+} \Delta q_1 dx +$$

$$+ D_{q_2} H_2(x^+, u^+, \lambda_2^+, q_2^+) \int\limits_{D_2^+} \Delta q_2 dx - \left| D_{q_2} H_2(x^-, u^-, \lambda_2^-, q_2^-) \right| \int\limits_{D \setminus D_2^+} \Delta q_2 dx +$$

$$+ D_{q_3} H_3(x^+, u^+, \mu^+, q_3^+) \int\limits_{\Gamma^+} \Delta q_3 dx - \left| D_{q_3} H_3(x^-, u^-, \mu^-, q_3^-) \right| \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_1^+} \Delta q_3 d_x S +$$

$$+ \int\limits_{D} \left[O\left(|\Delta q_1|^2\right) + O\left(|\Delta q_2|^2\right) \right] dx + \int\limits_{\partial D} O\left(|\Delta q_3|^2\right) d_x S.$$

При досить малих Δq_k знак ΔI визначається першими шістьма доданками суми. Різниця перших двох і наступних пар двох доданків змінює знак ΔI в залежності від величин $mes D_1^+$, $mes D \setminus D_1^+$, $mes D \setminus D_2^+$, $mes D_2^+$, $mes \Gamma^+$, $mes \Gamma \setminus \Gamma^+$, Δq_k, $k \in \{1, 2, 3\}$.

При досить малих величинах $mesD_1^+$, $mesD_2^+$, $mes\Gamma^+$ і $\Delta q_k > 0$ маємо $\Delta I(q) < 0$ і навпаки $\Delta I(q) > 0$, якщо малі величини $mes(D \setminus D_1^+)$, $mes(D \setminus D_2^+)$, $mes(\Gamma \setminus \Gamma^+)$ і $\Delta q_k > 0$. Отже, функціонал $I(q)$ не досягає мінімуму. Знаходження оптимального керування $q^{(0)}$ у інших випадках, які залежать від знаку величин $D_{q_k} H_k$, $k \in \{1,2,3\}$, доводяться аналогічно. $\square$

Нехай умови теореми 2 не виконані.

Тоді правильна така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконані умови а)–в). Для того, щоб керування* $q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\right)$ *було оптимальним, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_l(\xi, u, \lambda_l, q_k)$, $l \in \{1,2\}$, $H_3(\xi, u, \mu, q_3)$ *за аргументами* q_k, $k \in \{1,2,3\}$ *мають в точці* $q_k^{(0)}$ *мінімальні значення;*

2) для довільного вектора $\left(l_m^{(1)}, l_m^{(2)}\right) \neq 0$ *виконується нерівність*

$$D_u^2 F_m\left(t,x;u,q_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(1)}\right)^2 + 2D_u D_{q_m} F_m\left(t,x;u,q_m^{(0)}\right) l_m^{(1)} l_m^{(2)} +$$

$$+ D_{q_m}^2 F_m\left(t,x;u,q_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(2)}\right)^2 > 0, \ m \in \{1,3\};$$

3) для довільного вектора $(l_1, l_2, \ldots, l_{N+1}) \neq 0$ *виконувалась нерівність*

$$\sum_{ij=1}^{N+1} D_{v_i v_j}^2 F_2(x, \vec{v}) l_i l_j > 0.$$

Доведення теореми 3 проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.14 [15].

Список літератури

[1] Lions J.-L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Mir, Moscow, 1972. 416 p. (in Russian)

[2] Zgurovsky M.Z., Melnik V.S., Novikov A.N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. Naukova dumka, Kiev, 2004. 588 p. (in Russian)

[3] Bermudez A. *Some applications of optimal control theory of distributed systems.* Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2002. **8**. 195–218.

[4] Casas E., Vexler B., Zuazua E. *Sparse initial data identification for parabolic PDE and its finite element approximations.* Mathematical Control and Related Fields. 2015. **5(3)**. 377–399.

[5] Feiyue He, Leung A., Stojanovic S. *Periodic optimal control for parabolic Volterra-Lotka type equations.* Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1995. **18**. 127–146.

[6] Homberg D., Krumbiegel K., Rehberg J. *Optimal control of a parabolic equation with dynamic boundary condition.* Applied Mathematics and Optimization. 2013. **67(1)**. 3–31.

[7] Bintz J., Finotti H., Lenhart S. Optimal control of resourse coefficient in a parabolic population model, edited by R. Mondaini. BIOMAT 2013 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Press. Singapure. 2013. 121–135.

[8] Farag M.H. *Computing optimal control with a quasilinear parabolic partial differential equation.* Surveys in Mathematics and its Applications. 2009. **4**. 139–153.

[9] Lou Hongwei. *Optimality conditions for semilinear parabolic equations with controls in leading term.* ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. 2011. **17(4)**. 975–994.

[10] Pukalskyi I.D. *Green function of a parabolic boundary-value problem and the optimization problem.* Ukrainian Mathematical Journal. 2000. **52(4)**. 567–571. (in Ukrainian)

[11] Pukalskyi I.D. *Parabolic boundary value problem and optimal control problem.* Mathematical Methods and Physicomechanical Fields. 2009. **52(4)**. 34–41. (in Ukrainian)

[12] Pukalskyi I.D. *Problem with directional derivative and problem of optimum control for linear parabolic equation with degeneration.* Mathematical Methods and Physicomechanical Fields. 2005. **48(3)**. 24–35. (in Ukrainian)

[13] Pukalskyi I.D., Yashan B.O. *One-Sided Boundary-Value Problem with Impulsive Conditions for Parabolic Equations with Degeneration.* Journal of Mathematical Sciences. 2021. **256**. 398–415.

[14] Ivasishen S.D. Green's matrices of general inhomogeneous boundary value problems for parabolic ones according to I.G. Petrovsky systems. Preprint of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, 1968. 2–52. (in Russian)

[15] Pukalskyi I.D., Luste I.P. Boundary value problems for parabolic equations of the second order. Tutorial. Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2021. 284 p. (in Ukrainian)

Надійшло 12.01.2022

Pukalskyi I.D., Luste I.P. *Optimal control in the multipoint boundary value problem for 2b-parabolic equations*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 1 (2022), 110–119.

The potential theory method was used to study the existence of a solution of a multipoint boundary value problem for a $2b$-parabolic equation. Using the Green's function of a homogeneous boundary value problem for a $2b$-parabolic equation, the integral Fredholm equation of the second kind is placed in accordance with the multipoint boundary value problem. Taking into account the constraints on the coefficients of the nonlocal condition and using the sequential approximation method, an integrated image of the solution of the nonlocal problem at the initial moment of time and its estimation in the Holder spaces are found. Estimates of the solution of a nonlocal multipoint boundary value problem at fixed moments of time given in a nonlocal condition are found by means of estimates of the components of the Green's function of the general boundary value problem for the $2b$-parabolic equation. Taking into account the obtained estimates and constraints on coefficients in multipoint problem, estimates of the solution of the multipoint problem for the $2b$-parabolic equations and its derivatives in Holder spaces are established. In addition, the uniqueness and integral image of the solution of the general multipoint problem for $2b$-parabolic equations is justified. The obtained result is applied to the study of the optimal system control problem described by the general multipoint boundary value problem for $2b$-parabolic equations. The case of simultaneous internal, initial and boundary value control of solutions to a multipoint parabolic boundary value problem is considered. The quality criterion is defined by the sum of volume and surface integrals. The necessary and sufficient conditions for the existence of an optimal solution of the system described by the general multipoint boundary value problem for $2b$-parabolic equations with limited internal, initial and boundary value control are established.