Bukovinian Math. Journal. 2022, **10**, 2, 195–203 Буковинський матем. журнал 2022, Т.10, №2, 195–203

Працьовитий М. В., Карвацький Д. М.

**Множина неповних сум модифікованого ряду Гатрі-Німана**

У роботі вивчаються тополого-метричні властивості множини неповних сум додатного ряду $\sum a_k$, де $a_{2n-1} = 3/4^n + 3/4^{in}$ та $a_{2n} = 2/4^n + 2/4^{in}$, $n \in N$, залежного від натурального параметра $i \geq 2$, який є певним збуренням відомого ряду Гатрі-Німана. Встановлено, що множина неповних сум такого ряду є канторвалом (що є специфічним об'єднанням досконалої ніде не щільної множини нульової міри лебега і нескінченного об'єднання інтервалів), міра Лебега якого обчислюється за формулою: $\lambda(X_i^+) = 1 + \frac{1}{4^i - 3}$. Основна ідея доведення тведження грунтується на відомій теоремі Какея, замкнености множин неповних сум ряду і всюди щільності множини у певному відрізку. У роботі наводиться повне обгрунтування фактів для випадку $i = 2$. Для обгрунтування основних фактів використовується співвідношення між членами та залишками ряду. Для $i = 2$ маємо $r_0 = \sum a_k = 2$, $a_{2n} - r_{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$ $r_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$. Актуальність вивчення об'єкта продиктована задачами геометрії числових рядів, фрактального аналізу та фрактальної геометрії одновимірних об'єктів і теорії нескінченних згорток Бернуллі, однієї з проблем якої є проблема сингулярності згортки двох сингулярних розподілів.

*Ключові слова і фрази:* підсума числового ряду, множина неповних сум ряду, ряд Гатрі-Німана, множина канторівського типу, канторвал, арифметична сума числових множин, міра Лебега.

---

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: *prats4444@gmail.com (Pratsiovytyi M.V.), karvatsky@imath.kiev.ua (Karvatsky D.M.)*

## Вступ

Розглядається абсолютно збіжний числовий ряд:

$$r_0 = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = u_1 + u_2 + \dots + u_n + r_n = s_n + r_n. \tag{1}$$

Нагадаємо, що число

$$x = x\,(M) = \sum_{n \in M \subseteq N} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \varepsilon_n = \begin{cases} 1 \text{ при } & n \in M, \\ 0 \text{ при } & n \notin M, \end{cases} \tag{2}$$

називається *неповною сумою (підсумою) ряду* (1), визначеною множиною $M$. Множина $E = E[u_n]$ усіх чисел виду (2) називається множиною неповних сум (підсум) ряду (1).

УДК 517.5+515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A05.

Очевидно, що $0 \in E[u_n] \subset [0; r_0]$, $r_0 \in E$, всі члени ряду $(u_n)$, послідовність його частинних сум $(S_n)$ і послідовність залишків ряду $(r_n)$ належать множині $E[u_n]$. Просто доводиться континуальність та замкненість множини неповних сум ряду. Робота Какея [5] поклала початок дослідженням тополого-метричних властивостей множин неповних сум абсолютно збіжних числових рядів. На даний момент загальна теорія (а ми її називаємо геометрією числових рядів) є достатньо бідною. Серед фактів цієї теорії теорема Какея і теорема про топологічну структуру множини неповних сум. Разом з цим для окремих класів рядів отримано повні розв'язки тополого-метричних задач і задач про фрактальні властивості множини неповних сум [10, 11, 13].

У 1988 році Дж. Гатрі та Дж. Німан [4] довели, що множина неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \dots \tag{3}$$

містить відрізок $[3/4, 1]$, проте не є скінченним об'єднанням відрізків. Такі множини стали називати **канторвалами** (M-канторвалами), вони також зустрічаються при вивченні арифметичних сум двох множин канторівського типу [7].

Також канторвал можна означити як

$$X \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де $C$ – класична множина Кантора, $G_k$ – об'єднання усіх центральних третин, які вилучаються із відрізка $[0, 1]$ на $k$-ому кроці побудови множини $C$.

У роботах [4] та [6] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду належить одному з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків; гомеоморфною множині Кантора; M-канторвалом (симетричним канторвалом).

На сьогоднішній день необхідні і достатні умови того, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є канторвалом або є гомеоморфною множині Кантора (з додатною мірою Лебега або нульової міри Лебега та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) залишаються невідомими. Тому науковці розв'язують цю задачу для певних класів рядів (бігеометричних, мультигеометричних [1], рядів з узагальнених чисел Фібоначчі [12], рядів з певною умовою однорідності [8, 9]) тощо.

Оскільки канторвал містить цілі відрізки, то природньою є задача про міру Лебега такої множини. Структура канторвалу $X$, що є множиною неповних сум ряду Гатрі-Німана (3), визначається співвідношеннями між $X$-інтервалами та $X$-щілинами (детальніше у [2]). Для такого канторвалу добре вивчені топологічні та метричні властивості. Зокрема встановлено, що частини множини подібні самій множині $X$ з коефіцієнтом подібності $1/4^n$. На основі цього була обчислена міра Лебега такого канторвала $X$. Вона дорівнює 1 [2].

Ще одним цікавим напрямом дослідження у цій області є вивчення властивості підмножини $U \subset X$ усіх чисел, які мають єдине представлення за допомогою неповної суми ряду (3). Для ряду Гатрі-Німана встановлені критерії приналежності числа підмножині $U$. Доведено, що множина $U$ є всюди щільною в $X$ та вивчені деякі її властивості [3].

Окрім канторвалу $X$, який має відносно просту топологічну структуру, зарубіжними та вітчизняними математиками активно вивчаються канторвали, що породжені рядами з певними умовами однорідності. У роботі [1] вивчаються канторвали, що є множинами неповних сум ряду $k_1+k_2+\cdots+k_m+k_1q+k_2q+\cdots+k_mq+\cdots+k_1q^n+\cdots+k_mq^n+\ldots$, де $k_1,k_2,\ldots,k_m$ – фіксовані натуральні числа, $q\in(0,1/2)$. Члени такого ряду утворюють мультигеометричну прогресію зі знаменником $q$.

Стаття [9] присвячена дослідженню канторвалів, які є множинами неповних сум рядів $\sum a_n$, для яких

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1 \quad \text{та} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{a_{n+k}}=+\infty.$$

Встановлено, що для будь-якого $\varepsilon>0$ в такій сім'ї існує ряд, міра Лебега множини неповних сум якого є більшою за $1-\varepsilon$.

Підсумовуючи результати цього розділу інтерес до вивчення канторвалів зараз досить високий. Зокрема, для канторвалу $X$, що породжений рядом Гатрі-Німана розв'язаний ряд топологічних, метричних та ймовірнісних задач. У цьому контексті будь-які модифікації ряду (3) потенційно можна використати для моделювання канторвалів та подальшого їх дослідження.

## 1 Збурений ряд Гатрі-Німана

Розглядається збіжний додатний ряд

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{16}\right)+\left(\frac{3}{4^2}+\frac{3}{16^2}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}\right)+\left(\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}\right)+\ldots, \tag{4}$$

який є певною модифікацією ряду Гатрі-Німана. Чи збереже ряд при цьому свої тополого-метричні властивості? Для членів та залишків ряду (4) виконуються наступні співвідношення:

$$r_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^n}+\frac{5}{16^n}\right)=2,$$

$$r_{2n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^k}+\frac{5}{16^k}\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16^n}<\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}=a_{2n},$$

$$r_{2n-1}=\frac{2}{4^n}+\frac{2}{16^n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^k}+\frac{5}{16^k}\right)=\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{16^n}>\frac{3}{4^n}+\frac{3}{16^n}=a_{2n-1}.$$

для довільного $n\in N$. Враховуючи нерівності $a_{2n}>r_{2n}$ та $a_{2n-1}<r_{2n-1}$, доходимо до висновку, що множина неповних сум ряду (4) не є скінченним об'єднанням відрізків (не виконуються необхідні та достатні умови для цього). Таким чином, $E[a_n]$ є канторвалом або множиною канторівського типу. Конкретизує висновок наступне твердження.

**Теорема 1.** *Множина $E$ неповних сум ряду* (4) *є канторвалом, причому вона містить відрізок* $\left[\frac{15}{16},1\right]$.

*Доведення.* Очевидно, що множина всіх чисел виду

$$\Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{4^n} + \frac{\alpha_n}{16^n}\right), \tag{5}$$

де $\alpha_n \in \{0, 2, 3, 5\}$, збігається з множиною неповних сум ряду (4). Покажемо, що вона всюди щільна у четвірковому циліндрі другого рангу $\Delta^4_{33} = \left[\frac{15}{16}, 1\right]$, тобто множині чисел, які мають вигляд четвіркового представлення (зображення):

$$x = \Delta^4_{33c_3c_4\ldots} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{c_n}{4^n}, \text{ де } c_i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

З цією метою скористаємось означенням всюди щільної множини. Покажемо, що

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\forall x = \Delta^4_{33c_3c_4\ldots c_n(0)}) \quad (\exists y = \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)}) \quad |x - y| < \varepsilon.$$

Побудуємо число $y = \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(0)}$ за наступним алгоритмом:

$$\alpha_n = \begin{cases} c_n, & \text{якщо } \ c_n \in \{0, 2, 3\}, \\ 5, & \text{якщо } \ c_n = 1, \end{cases}$$

$$\alpha_{n-1} = \begin{cases} c_{n-1}, & \text{якщо } \ c_n, c_{n-1} \in \{0, 2, 3\}, \\ c_{n-1} - 1, & \text{якщо } \ c_n = 1, c_{n-1} \neq 2, \\ 5, & \text{якщо } \ c_n = 1, c_{n-1} = 2, \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} c_1, & \text{якщо } \ c_2 \in \{0, 2, 3\}, \\ c_1 - 1, & \text{якщо } \ c_2 = 1. \end{cases}$$

Це число $y = \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}$ називатимемо першим наближенням до числа $x$ та позначатимемо через $\Delta^*(1)$. Матимемо при $y = \Delta^*(1)$

$$x - y = \Delta^4_{33c_3c_4\ldots c_n(0)} - \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{16^i}.$$

У свою чергу таку різницю можна подати у вигляді $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{16^i} = \Delta^4_{0\alpha_10\alpha_2\ldots0\alpha_n(0)}$ та аналогічним чином побудувати до нього наближення $\Delta^*_{0\alpha_10\alpha_2\ldots0\alpha_n(0)}$. Число

$$\Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} - \Delta^*_{0\alpha_10\alpha_2\ldots0\alpha_n(0)} = \Delta^*_{\underbrace{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_3(\alpha_4-\alpha_2)\ldots0\alpha_n}_{2n}(0)}$$

будемо називати 2-им наближенням до числа $x$ та позначатимемо через $\Delta^*(2)$.

Наближенням $k$-ого порядку до числа $x$ називатимемо число $\Delta^*(k) = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots\gamma_{2^kn}(0)}$, де цифри $\gamma_i, i = \overline{1, 2^kn}$ визначаються наступним чином:

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \gamma_3 = \alpha_3, \quad \gamma_4 = \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_1,$$

$$\gamma_5 = \alpha_5, \quad \gamma_6 = \alpha_6 - \alpha_3, \quad \gamma_7 = \alpha_7, \quad \gamma_8 = \alpha_8 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_i = \alpha_i + (-1)^{i-1}\mu_i, \quad \text{де} \quad \mu_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq 2m, \\ \alpha_{\frac{i}{2}} + \mu_{\frac{i}{2}}, & \text{якщо } i = 2m. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$|x - \Delta^*(k)| = \sum_{i=k}^{n} \frac{\alpha_i}{16^{2i}} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Варто зауважити, що $\gamma_i$ не завжди є цифрами алфавіту $\{0, 2, 3, 5\}$. Тому залишається привести зображення числа $\Delta^*(k)$ до форми (5). Оскільки

$$\frac{4}{4^n} + \frac{4}{16^n} = \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{16^{n-1}}\right) - \frac{3}{4^{2n-1}}, \;\; \frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n} = \left(\frac{4}{4^{n+1}} + \frac{4}{16^{n+1}}\right) + \frac{3}{4^{2n+1}},$$

то справедливими будуть рівності

$$\Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}4\gamma_{n+1}\ldots} = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\ldots(\gamma_{n-1}+1)0\gamma_{n+1}\ldots\gamma_{2n-2}(\gamma_{2n-1}+3)\gamma_{2n}\ldots(\gamma_{4n-1}-3)\ldots},$$

$$\Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{n-1}1\gamma_{n+1}\ldots} = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_{n-1}0(\gamma_{n+1}+4)\ldots\gamma_{2n}(\gamma_{2n+1}-3)\ldots\gamma_{4n}(\gamma_{4n+1}+3)\ldots}.$$

Враховуючи їх, бачимо, що довільне число $\Delta^*(k) = \Delta^*_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\ldots\gamma_{2k_n}(0)}$ можна перетворити (з точністю до $\varepsilon$) у число виду (5). Таким чином множина $E$ є всюди щільною у множині чисел $\Delta^4_{33}$, тобто всюди щільною у відрізку $\left[\frac{15}{16}, 1\right]$. Враховуючи замкненість множини неповних сум ряду, підсумовуємо $\left[\frac{15}{16}, 1\right] \subset E$. Отже, $E$ канторвал. $\square$

**Наслідок 1.** *Множина $E$ неповних сум ряду* (4) *містить відрізок* $\left[1; \frac{17}{16}\right]$.

Твердження випливає з того, що множина неповних сум ряду (4) симетрична відносно середини відрізка $[0; 2]$ — мінімального відрізка, що її містить.

## 2 Міра Лебега канторвала

Для зручності позначимо канторвал, який є множиною неповних сум ряду (4) через $X^+$. Враховуючи співвідношення між членами та залишками ряду

$$a_{2n} - r_{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad r_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$$

множину $X^+$ можна легко виписати послідовність суміжних інтервалів.

Суміжними множині є інтервали $\left(\frac{7}{16}, \frac{10}{16}\right)$ та $\left(\frac{22}{16}, \frac{25}{16}\right)$, які мають довжини $\frac{3}{16}$ та породжені нерівністю $a_2 > r_2$. Наступні шість інтервалів $\left(\frac{27}{256}, \frac{34}{256}\right)$, $\left(\frac{78}{256}, \frac{85}{256}\right)$, $\left(\frac{187}{256}, \frac{194}{256}\right)$, $\left(\frac{318}{256}, \frac{325}{256}\right)$, $\left(\frac{427}{256}, \frac{434}{256}\right)$ та $\left(\frac{478}{256}, \frac{485}{256}\right)$ мають довжину $\frac{7}{256}$ та породжені нерівністю $a_4 > r_4$. Наступні інтервали породжені нерівністю $a_{2n} > r_{2n}$ та мають довжину, що не перевищує величину $1/4^n$. І т.д.

Введемо позначення

$$A(n) = \sum_{k>n} \left(\frac{2}{4^k} + \frac{2}{16^k}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad A(0) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{4}{5},$$

$$B(n) = \sum_{k>n} \left(\frac{3}{4^k} + \frac{3}{16^k}\right) = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad B(0) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5},$$

$$C(n) = \sum_{k>n} \left( \frac{5}{4^k} + \frac{5}{16^k} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16^n} \quad \text{та} \quad C(0) = 2.$$

Для опису відрізків, що належать канторвалу $X^+$ розглянемо наступні множини

$$K_n = \left[ \frac{4}{5}, \frac{6}{5} \right] \bigcap \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\alpha_i}{4^i} + \frac{\alpha_i}{16^i} \right) : \alpha_i \in \{0, 2, 3, 5\}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Не важко переконатися, що $K_1 = \left\{ \frac{15}{16} \right\}$ та $K_2 = \left\{ \frac{211}{256}, \frac{15}{16}, \frac{245}{256}, \frac{274}{256}, \frac{291}{256} \right\}$. У загальному ж випадку враховуючи, що $A(0) = \frac{4}{5}$ та $A(n) < \frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n}$ робимо висновок, що число

$$f_1^n = \left( \frac{3}{4^n} + \frac{3}{16^n} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{2}{4^i} + \frac{2}{16^i} \right)$$

є найменшим у множині $K_n$. З іншого боку, враховуючи $C(n) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16^n} < \frac{2}{4^n} + \frac{2}{16^n}$ та $B(0) = \frac{6}{5}$ робимо висновок, що

$$f_{|K_n|}^n = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{3}{4^i} + \frac{3}{16^i} \right) < \frac{6}{5}$$

є найбільшим дійсним числом у множині $K_n$ ($|K_n|$ – кількість елементів множини).

**Теорема 2.** *Відстань між елементами множини $K_n$ не перевищує величину $d(n) = \frac{2}{4^n}$, а кількість елементів множини $K_n$ обчислюється за формулою*

$$|K_n| = \frac{1}{3} (4^n - 1) \quad \text{та} \quad |K_{n+1}| = 4|K_n| + 1.$$

*Доведення.* Оскільки $|K_1| = 1$ та $|K_2| = 5$, то теорема справедлива для $n = 1, 2$. Припустимо, що $K_{n-1} = \left\{ f_1^{n-1}, f_2^{n-1}, \ldots, f_{|K_n|}^{n-1} \right\}$, де

$$f_1^{n-1} = \left( \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{3}{16^{n-1}} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} \left( \frac{2}{4^i} + \frac{2}{16^i} \right), \quad f_{j+1}^{n-1} - f_j^{n-1} < \frac{2}{4^{n-1}} + \frac{2}{16^{n-1}}$$

для $0 < j < |K_{n-1}| - 1$, причому $f_{|K_n|}^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{3}{4^n} + \frac{3}{16^n} \right)$. Розглянемо об'єднання множин

$$K_{n-1} \bigcup \left( \frac{2}{4^n} + \frac{2}{16^n} + K_{n-1} \right) \bigcup \left( \frac{3}{4^n} + \frac{3}{16^n} + K_{n-1} \right) \bigcup \left( \frac{5}{4^n} + \frac{5}{16^n} + K_{n-1} \right).$$

Видалимо з цієї множини число

$$\left( \frac{5}{4^n} + \frac{5}{16^n} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{3}{4^i} + \frac{3}{16^i} \right) > \frac{4}{5}$$

і додамо до неї числа

$$f_1^n = \left( \frac{3}{4^n} + \frac{3}{16^n} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{2}{4^i} + \frac{2}{16^i} \right), \quad f_3^n = \left( \frac{5}{4^n} + \frac{5}{16^n} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{2}{4^i} + \frac{2}{16^i} \right).$$

В результаті отримаємо шукану множину

$$K_n = \left\{ f_1^n, f_2^n, \ldots, f_{\frac{1}{3}(4^n - 1)}^n \right\}. \qquad \square$$

**Наслідок 2.** *Відрізок* $\left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right]$ *міститься в канторвалі* $X$.

*Доведення.* Покажемо, що $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\forall x \in [4/5, 6/5])$ $(\exists n \in N)$ $(\exists y \in K_n)$ $|x - y| < \varepsilon$. Дійсно, якщо вибрати $n > (1 - \log_2 \varepsilon)/2$, то згідно з теоремою 2 елементи множини $K_n$ будуть знаходитися на відстані, що не перевищує $2/4^n$. Отже, множина $K_n$ всюди щільна на відрізку $[4/5, 6/5]$. Оскільки $\bigcup K_n \subset X^+$, то і відрізок $[4/5, 6/5]$ належать цьому канторвалу. □

Легко довести наступне твердження.

**Лема 1.** *Множина* $X^+ \setminus \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right]$ *є об'єднанням двох неперетинних ізометричних фігур, подібних множині* $X^+$. *Множина* $X^+ \setminus \left(\left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right) \bigcup \left(\frac{7}{40}, \frac{21}{80}\right) \bigcup \left(\frac{139}{80}, \frac{73}{40}\right)\right)$ *є об'єднанням шести неперетинних ізометричних копій* $D = \left[0, \frac{7}{40}\right] \bigcap X^+$, *які подібні множині* $X^+$.

**Теорема 3.** *Міра Лебега канторвала* $X^+$ *рівна 14/13.*

*Доведення.* Враховуючи лему 1, підрахуємо суму довжин усіх суміжних $X^+$ інтервалів

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1}(a_{2n} - r_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n}\right) = \frac{2}{3} + \frac{10}{39} = \frac{12}{13}.$$

Отже, $\lambda(X^+) = 2 - l = \frac{14}{13}$.

З іншого боку, сума довжин усіх суміжник множині $X^+$ інтервалів дорівнює

$$I = B(0) - A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} \left(B(n) - A(n)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{16^n}\right) = \frac{14}{13}.$$

□

**Зауваження 1.** *Аналогічно чином можна довести, що множина неповних сум ряду*

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4^i}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4^i}\right) + \left(\frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^{2i}}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{4^n} + \frac{3}{4^{ni}}\right) + \left(\frac{2}{4^n} + \frac{2}{4^{ni}}\right) + \ldots,$$

$n \in N$, *є деяким канторвалом* $X_i^+ (X^+ \equiv X_2^+)$ *та обчислити його міру Лебега використовуючи міркування, розглянуті вище. Матимемо* $\lambda(X_i^+) = 1 + \frac{1}{4^i - 3}$.

## Список літератури


[**1**] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals. Central European Journal of Mathematics. 2014, 12 (7), 1000-1007. https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.4218

[**2**] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances. European Journal of Mathematics. 2018, 2, 687–698. https://doi.org/10.1007/s40879-017-0199-4

[**3**] *Głąb S., Marchwincki J.* Set of uniqueness for cantorvals. – 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.12479

[**4**] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series. Colloq. Math. 1988, 55 (2), 323-327.

[**5**] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series.* Tohoku Sci Rep., 1914, **3** (4), P. 159–164, DOI:10.11429/PTMPS1907.7.14250.

[**6**] *Nymann J., Saenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series. Colloq. Math. 2000, 83 (1), 1-4.

[**7**] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets. Nonlinearity. 1994, 7 (2), 329-343.

[**8**] *Pratsyovitiy M. V., Karvatskiy D. M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications. Algebra and discrete mathematics. 2017, 24 (1), 169–180. https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/297/pdf

[**9**] *Виннишин Я. Ф., Маркітан В. П., Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. Proceedings of the International Geometry Center. 2019, 12 (2), 26-42. https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455

[**10**] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. 2005, 6, 210–224.

[**11**] *Корсунь Н.О., Працьовитий М.В.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел. Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. 2009, 10, 28–39. http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/13868/1/korsun28-39.pdf

[**12**] *Працьовитий М. В., Карвацький Д. М.* Властивості множини неповних сум одного ряду, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2019, 16 (3), 7-18. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/478/483

[**13**] *Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Множина неповних сум числового ряду з однією нелінійною властивістю однорідності. Буковинський математичний журнал. 2014, 2(2-3), 196–202. https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/91/91

## Список літератури

[**1**] *Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals. Central European Journal of Mathematics. 2014, 12 (7), 1000-1007. https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.4218

[**2**] *Bielas W., Plewik S., Walczyńska M.* On the center of distances. European Journal of Mathematics. 2018, 2, 687–698. https://doi.org/10.1007/s40879-017-0199-4

[**3**] *Głąb S., Marchwincki J.* Set of uniqueness for cantorvals. – 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.12479

[**4**] *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series. Colloq. Math. 1988, 55 (2), 323-327.

[**5**] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series.* Tohoku Sci Rep., 1914, **3** (4), P. 159–164, DOI:10.11429/PTMPS1907.7.14250.

[**6**] *Nymann J., Saenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series. Colloq. Math. 2000, 83 (1), 1-4.

[**7**] *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets. Nonlinearity. 1994, 7 (2), 329-343.

[**8**] *Pratsyovitiy M. V., Karvatskiy D. M.* Jacobsthal-Lucas series and their applications. Algebra and discrete mathematics. 2017, 24 (1), 169–180. https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/297/pdf

[**9**] *Vinishin Y., Markitan V., Pratsiovytyi M., Savchenko I.* Positive series, whose sets of subsums is a cantorvals. Proceedings of the International Geometry Center. 2019, 12 (2), 26-42. (in Ukrainian) https://doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455

[**10**] *Goncharenko Ya.V., Pratsiovytyi M.V., Torbin G.M.* Topological, metric and fractal properties of the set of incomplete sums of the positive series and distributions on it. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky. 2005, 6, 210–224.

[**11**] *Korsun N.O., Pratsyovity M.V.* About set of incomplete sums of positive series with one condition of homogeneity and generalization of the binary representation of numbers. Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser 1. Fiz.-Mat. Nauky. 2009, 10, 28–39. http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/13868/1/korsun28-39.pdf

[**12**] *Pratsiovytyi M., Karvatsky D.* The property of the set of subsums for series whose terms are elements of generalized Fibonacci sequence. Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2019, 16 (3), 7-18. (in Ukrainian) https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/478/483

[**13**] *Pratsiovytyi M.V., Savchenko I.O.* The set of incomplete sums of a numerical series with one nonlinear homogeneity property. Bukovinsk Mathematical Journal. 2014, 2(2-3), 196–202. https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/91/91

*Надійшло 29.12.2022*

---

Pratsiovytyi M.V., Karvatsky D.M. *The set of incomplete sums of the modified Guthrie-Nymann series*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 195–203.

In this paper we study topological and metric properties of the set of incomplete sums for positive series $\sum a_k$, where $a_{2n-1} = 3/4^n + 3/4^{in}$ and $a_{2n} = 2/4^n + 2/4^{in}$, $n \in N$. The series depends on positive integer parameter $i \geq 2$ and it is some perturbation of the known Guthrie-Nymann series. We prove that the set of incomplete sums of this series is a Cantorval (which is a specific union of a perfect nowhere dense set of zero Lebesgue measure and an infinite union of intervals), and its Lebesgue measure is given by formula: $\lambda(X_i^+) = 1 + \frac{1}{4^i - 3}$. The main idea of ??proving the theorem is based on the well-known Kakey theorem, the closedness of sets of incomplete sums of the series and the density of the set everywhere in a certain segment. The work provides a full justification of the facts for the case $i = 2$. To justify the main facts, the ratio between the members and the remainders of the series is used. For $i = 2$ we have $r_0 = \sum a_k = 2$, $a_{2n} - r_{2n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$ $r_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16^n}$. The relevance of the study of the object is dictated by the problems of the geometry of numerical series, fractal analysis and fractal geometry of one-dimensional objects and the theory of infinite Bernoulli convolutions, one of the problems of which is the problem of the singularity of the convolution of two singular distributions.