Процах Н.П.[1], Івасюк Г.П.[2], Фратавчан Т.М.[2]

ПРО ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА

У статті розглянуто задачі для систем рівнянь та рівнянь типу Ейдельмана, які були великою частиною наукових досліджень С.Д. Івасишена. Наведено огляд результатів досліджень задач Коші, мішаних та обернених задач для такого типу рівнянь в обмежених та необмежених областях. Результатами є оцінки розв'язків, інтегральні зображення розв'язків, теореми існування, єдиності та стійкості розв'язків.

Ключові слова і фрази: параболічна за Ейдельманом система рівнянь, матриця Ґріна, задача Коші, мішана задача, обернена задача, простір Гельдера, простір Соболєва, існування та єдиність розв'язків, стійкість розв'язків.

[1] Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна.
e-mail: *protsakh@ukr.net, h.ivasjuk@chnu.edu.ua, t.fratavchan@chnu.edu.ua*

Вступ

У 1960 році проф. С.Д. Ейдельман у праці [22] узагальнив рівняння, параболічні за Петровським, ввівши новий клас систем рівнянь

$$\frac{\partial^{n_i}u}{\partial t^{n_i}}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k_0+\frac{k_1}{2b_1}+\dots+\frac{k_n}{2b_n}\le n_j} A_{ij}\frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n}u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}},\qquad (1)$$
$$i=1,\ 2,\dots,\ N,$$

які названо $2\vec{b}$ – параболічними (параболічними за Ейдельманом) в області G, якщо для довільних $(x_1,x_2,\dots,x_n,t)\in G$ і $\sigma_1,\ \sigma_2,\dots,\sigma_n$ таких, що $\sigma_1^{2b_1}+\sigma_2^{2b_2}+\dots+\sigma_n^{2b_n}=1$, система рівнянь

$$\det\left\|\sum_{k_0+\frac{k_1}{2b_1}+\dots+\frac{k_n}{2b_n}\le n_j} A_{ij}\lambda^{k_0}(i\sigma)^k\right\|-\left\|\begin{matrix}\lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N}\end{matrix}\right\|=0$$

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K52, 35B53.

має корені $\lambda_i(t,x,\sigma)$, дійсні частини яких задовольняють нерівності $\operatorname{Re}\lambda_i(t,x,\sigma)<-\delta$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, $2\vec{b}=(2b_1,2b_2,\ldots,2b_n)$, $\delta>0$.

У 1968 р. з'явилась фундаментальна в теорії $2\vec{b}$-параболічних систем праця С.Д. Івасишена та С.Д. Ейдельмана [8], в якій проведено досить повне та точне дослідження властивостей фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) задачі Коші та породжених нею потенціалів, знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо неоднорідності систем і початкових функцій, встановлено локальну розв'язність нелінійних систем і вивчено питання про продовження їх розв'язків на ширший часовий інтервал, одержано внутрішні оцінки розв'язків та доведено гіпоеліптичність $2\vec{b}$-параболічних систем. Детальний огляд таких систем та результатів для них є у монографії [23].

Пізніше системи рівнянь (1) узагальнювалися багатьма вченими. Зокрема, С.Д. Івасишеним та Г.П. Івасюк розглянуто новий клас систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, який поєднує у собі структури систем, параболічних за Солонниковим і Ейдельманом [12]. У цих системах порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати від j та від k, крім того диференціювання за різними просторовими змінними мають загалом різну вагу стосовно диференціювання за часовою змінною. Для таких систем рівнянь доведено теореми про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, а також у відповідних просторах Соболєва-Слободецького для дещо вужчого класу [13].

1 Про лінійні $2\vec{b}$-параболічні системи рівнянь

$2\vec{b}$-параболічні системи рівнянь в обмежених за часом областях

У працях С.Д. Івасишена [6], [7] знайдено необхідні і достатні умови, за яких розв'язки однорідних $2\vec{b}$-параболічних систем зображаються у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір зі спеціальних вагових просторів. Сукупності цих функцій та узагальнених мір є множинами початкових значень досліджуваних розв'язків. У цих працях з'ясовано також, в якому сенсі ці розв'язки задовольняють початкові умови. Доповнено властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для загальних $2\vec{b}$-параболічних систем першого порядку за часовою змінною, зокрема, знайдено формули, які виражають коефіцієнти системи через ФМР, у праці С.Д. Івасишена та Г.П. Івасюк [11].

$2\vec{b}$-параболічні системи довільних порядків диференціювання за часовою змінною розглядалися у праці С.Д. Івасишена та О.С. Кондур [9]. Зокрема, там описана структура матриці Гріна задачі Коші для загальних $2\vec{b}$-параболічних систем та охарактеризовані деякі класи розв'язків таких систем як класи відповідних інтегралів Пуассона функцій зі спеціальних вагових просторів Соболєва. У праці Г.П.Івасюк [14] одержано оцінки півнорм у просторах Гельдера швидко зростаючих функцій об'ємного потенціалу та інтеграла Пуассона, породжених фундаментальним розв'язком модельного $2\vec{b}$-параболічного рівняння довільного порядку за всіма змінними.

С.Д. Івасишен та Г.С.Пасічник займалися випадком $\vec{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами [10]. На системи, що ними розглядалися, накладалися два набори умов, перший з яких вимагає певної гладкості коефіцієнтів системи, а другий – гельдеровість відносно $\vec{2b}$-параболічної відстані коефіцієнтів та спеціальні обмеження на характеристику дисипації. Для таких систем побудована фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші та одержані її оцінки. У цих працях також розглянутий клас $\vec{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами, які можна звести до дисипативних і для яких також існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші. Встановлені її оцінки, властивість нормальності та формула згортки.

$\vec{2b}$-параболічні системи рівнянь в необмежених за часом областях

У спільних роботах Івасишена С.Д., Балабушенко (Фратавчан) Т.М. розглядалися $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи рівнянь в областях, необмежених за часовою змінною. Для них були одержані такі результати:

- введені спеціальні $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умови в термінах оцінок фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) і матриці Гріна задачі Коші (праці [2] – [3]);

- наведені приклади класів систем як першого, так і довільних порядків, які задовольняють $\Lambda_\delta^{m,r}$ -умови (праці [2] – [3]);

- встановлені інтегральні зображення та оцінки розв'язків, а також коректна розв'язність задачі Коші і задачі без початкових умов відповідно у півпросторах $t > 0$ і $t \leq T$ (праці [1] – [4]);

- доведені теореми про стійкість розв'язків задачі Коші та теореми типу Ліувілля (праці [1] – [4]);

- здійснена побудова та одержані оцінки ФМР поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породженої $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою (праця [5]).

Для короткого формулювання результатів будемо використовувати такі позначення. Нехай $n, b_1, \dots, b_n$ – задані натуральні числа, причому $n \geq 2$, b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$; $m_j := b/b_j, j \in \{1, \dots, n\}$; $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \dots, k_n)$; $\|k\| := \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; $\|\bar{k}\| := 2bk_0 + \|k\|$, якщо $\bar{k} := (k_0, k)$, де $k_0 \in \mathbb{Z}_+^1, k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Нехай далі $N, n_1, ..., n_N$ – задані натуральні числа, $a_{k_0k}(t,x) = (a_{k_0k}^{lj}(t,x))_{l,j=1}^N$ – матриці порядку N, елементами яких є комплекснозначні функції, залежні від часової та просторової змінних $t \in \mathbb{R}$ і $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ відповідно, і нехай $u(t,x) = col(u_1(t,x), ..., u_N(t,x))$ – невідомий, а $f(t,x) = col(f_1(t,x), ..., f_N(t,x))$ – заданий стовпці.

Позначимо через $\Pi_m := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in H_m, x \in \mathbb{R}^n\}$, $m \in \{1,2\}$, де $H_1 = (0, \infty)$, $H_2 = (-\infty, T]$. Розглянемо в $\Pi_m, m \in \{1,2\}$, $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему рівнянь довільних порядків вигляду

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t,x) = f(t,x), \tag{2}$$

де $A(t, x, \partial_t, \partial_x) := (A_{lj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{l,j=1}^N$ і

$$A_{lj}(t,x,\partial_t,\partial_x) := \delta_{lj}\partial_t^{n_l} - \sum_{\substack{2bk_0+\|k\|\le 2bn_j \\ (k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0k}(t,x)\partial_t^{k_0}\partial_x^k.$$

У працях [2], [3] було введено означення $\Lambda^{m,r}_\delta$ -умов для систем вигляду (2).

Означення 1. *Система (2) задовольняє $\Lambda^{m,r}_\delta$ -умову, $\delta\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}_2$, $r\in\mathbb{Z}^1_+\bigcup\{\infty\}$, якщо для неї існує в Π_m матриця Гріна задачі Коші $G=(G_0,G_1,...,G_N)$, елементи якої мають похідні $\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_0^{lj}$, $\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_j^{l\mu}$, $2bk_0+||k||\le 2bn_l+r$, $k_0\le n_l, \mu\in\mathbb{N}_{n_j}$, $\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N$, і справджуються оцінки*

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_0^{lj}(t,x,\tau,\xi)|\le C_{k_0k}\prod_{\nu=1}^n(\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu+2bp^{lj}_{0k_0}(t-\tau)/M}e^{\delta(t-\tau)}\widehat{E}_c(t-\tau,x-\xi),$$

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^kG_j^{l\mu}(t,x,\tau,\xi)|\le C_{k_0k}\prod_{\nu=1}^n(\alpha_\nu(t-\tau))^{-1-k_\nu+2bp^{l\mu}_{jk_0}(t-\tau)/M}e^{\delta(t-\tau)}\widehat{E}_c(t-\tau,x-\xi),$$

$$\{t,\tau\}\subset\overline{H}_m,\ \tau<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 2bk_0+||k||\le 2bn_l+r,\ k_0\le n_l-1,$$

$$\mu\in\mathbb{N}_{n_j},\quad \{l,j\}\subset\mathbb{N}_N, \tag{3}$$

де $C_{k_0k}>0$, $c>0$, $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$ – невід'ємні неспадні функції такі, що $\alpha_\nu(0)=0$ і $\alpha_\nu(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, $\widehat{E}_c(t,x) := \exp\left\{-c\sum\limits_{j=1}^n(\alpha_j(t))^{-q_j}|x_j|^{q_j}\right\}$, а $p^{lj}_{0k_0}$ і $p^{l\mu}_{jk_0}$ – деякі кусково-сталі функції.

Отримані оцінки ФМР мали своє застосування до дослідження властивостей розв'язків $\overrightarrow{2b}$ - параболічних систем в необмежених за часом областях. Зокрема у працях [1], [4], встановлені інтегральні зображення та оцінки розв'язків в необмежених за часом областях. Наведемо їх в теоремах 1 і 2.

Для будь-яких $t\ge 0$, $p\in[1,\infty]$ і $\eta:=(\eta_1,...,\eta_n)$ з $\eta_\nu\ge 0$, $\nu\in\mathbb{N}_n$, означимо норми

$$||v(t,\cdot)||_{p,\eta} := ||v(t,\cdot)\Phi_\eta(\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де

$$\Phi_\eta(x) := \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^n\eta_\nu|x_\nu|\right\},\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Теорема 1. *Нехай система (2) задовольняє $\Lambda^{1,0}_\delta$ -умову зі сталими $c>0$, $\delta\in\mathbb{R}$, функціями $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, $p^{lj}_{0k_0}$ і $p^{l\mu}_{jk_0}$, $k_0\in\mathbb{N}_{n_l-1}$, $\mu\in\mathbb{N}_{n_j}$, $\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N$, і нехай $u=col(u_1,...,u_N)$ – такий регулярний розв'язок цієї системи, що для фіксованих p і η виконуються умови:*

1) $\forall T_0>0\ \exists C>0\ \forall t\in[0,T_0]\ \forall j\in\mathbb{N}_N\ \forall\mu\in\mathbb{N}_{n_j}:\ ||\partial_t^{\mu-1}u_j(t,\cdot)||_{p,\eta}\le C$,

2) $\forall\ \{l,j\}\subset\mathbb{N}_N\ \forall t\in H_1$:

$$||f_j(t,\cdot)||_{p,\eta}<\infty,\ \ \int\limits_0^\infty\prod_{\nu=1}^n(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p^{lj}_{00}(t-\tau)}||f_j(\tau,\cdot)||_{p,\eta}e^{-\delta\tau}d\tau<\infty.$$

Тоді для компонент розв'язку u в Π_1 правильні зображення

$$u_l(t,x)=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} G_0^{lj}(t,x;\tau,\xi)f_j(\tau,\xi)d\xi+\sum_{\mu=1}^{n_j}\int_{\mathbb{R}^n} G_j^{l\mu}(t,x;0,\xi)\varphi_j^{\mu}(\xi)d\xi\right),\ l\in\mathbb{N}_N,$$

де $\varphi_j^{\mu}(x):=\partial_t^{\mu-1}u_j(0,x),\ x\in\mathbb{R}^n$, *та оцінки*

$$||u_l(t,\cdot)||_{p,\eta}\le C\exp\left\{\delta t+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(\eta_\nu\alpha_\nu(t))^{2b_\nu}}{2b_\nu(c_0q_\nu)^{2b_\nu-1}}\right\}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{N}\int_0^t\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}||f_j(\tau,\cdot)||_{p,\eta}e^{-\delta\tau}d\tau+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{n_j}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t))^{\frac{2b}{M}p_{j0}^{l\mu}(t)}||\varphi_j^{\mu}(\cdot)||_{p,\eta}\right),$$

де c_0 *– фіксована стала з проміжку (0,c).*

Розглянемо набір функцій

$$\widehat{k}_\nu(t,a_\nu):=\begin{cases}c_0a_\nu(c_0^{2b_\nu-1}-(\alpha_\nu(t))^{2b_\nu}a_\nu^{2b_\nu-1})^{1-q_\nu},\ 0\le t\le T,\\ c_0a_\nu(c_0^{2b_\nu-1}+(\alpha_\nu(|t|))^{2b_\nu}a_\nu^{2b_\nu-1})^{1-q_\nu},\ t<0,\ \nu\in\mathbb{N}_n,\end{cases}$$

де $c_0\in(0,c)$, стала c і функції $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, з $\Lambda_\delta^{2,0}$-умови, $a_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, – невід'ємні числа такі, що $\alpha_\nu(T)<\left(\frac{c_0}{a_\nu}\right)^{1/q_\nu}$, і означимо для будь-яких $t\in H_2$ і $p\in[1,\infty]$ норми

$$||v(t,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t,a)}:=||v(t,\cdot)\widehat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $\widehat{k}(t,a):=(\widehat{k}_1(t,a_1),...,\widehat{k}_n(t,a_n)),\ \widehat{\Psi}_z(t,x):=\exp\left\{z\sum\limits_{\nu=1}^{n}\widehat{k}_\nu(t,a_\nu)|x_\nu|^{q_\nu}\right\}$,
$t\in H_2,\ x\in\mathbb{R}^n,z\in\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Нехай система (2) задовольняє* $\Lambda_\delta^{2,0}$ *-умову зі сталими* $c>0,\ \delta\in\mathbb{R}$, *функціями* $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, *та функціями* $p_{0k_0}^{lj}$ *і* $p_{jk_0}^{l\mu}$. *Далі, нехай* $u=col(u_1,...,u_N)$ *– такий регулярний розв'язок цієї системи, що для фіксованого* $p\in[1,\infty]$ *виконуються умови:*

1) $\exists C>0\ \forall\mu\in\mathbb{N}_{n_j}\ \forall\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N\ \forall\{t,t_0\}\subset H_2,\ t_0<t:$

$$R_j^{l\mu}(t,t_0):=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-t_0))^{\frac{2b}{M}p_{j0}^{l\mu}(t-t_0)}e^{-\delta t_0}||\partial_{t_0}^{\mu-1}u_j(t_0,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t_0,a)}\le C,$$

причому для $p=\infty$ $R_j^{l\mu}(t,t_0)\to 0$ *при* $t_0\to-\infty$;

2) функції $f_j:=\sum\limits_{l=1}^{N}A_{jl}(t,x,\partial_t,\partial_x)u_j,\ l\in\mathbb{N}_N$, *наперервні та задовольняють умови*

$$\forall\{l,j\}\subset\mathbb{N}_N\ \forall t\in H_2:\ ||f_j(t,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t,a)}<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{t}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M}p_{00}^{lj}(t-\tau)}e^{-\delta\tau}||f_j(\tau,\cdot)||_p^{\widehat{k}(\tau,a)}d\tau<\infty.$$

Тоді для $u_l, l \in \mathbb{N}_N$ правильні зображення

$$u_l(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{lj}(t,x;\tau,\xi) f_j(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_2,$$

та оцінки

$$||u_l(t,\cdot)||_p^{\widehat{k}(t,a)} \leq Ce^{\delta t} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t-\tau))^{\frac{2b}{M} p_{00}^{lj}(t-\tau)} ||f_j(\tau,\cdot)||_p^{\widehat{k}(\tau,a)} d\tau, \ t \in H_2.$$

У тих же працях [1] – [4] доведено теорему про стійкість розв'язків задачі Коші для системи (2). Для її формулювання розглянемо в Π_2 однорідну систему (2), тобто систему вигляду

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = 0. \tag{4}$$

Для неперервних функцій $v : \overline{\Pi_1} \to \mathbb{C}$ означимо норми

$$||v||_{p,\eta}^{g(\cdot)} := \sup_{t \geq 0} (g(t)||v(t,\cdot)||_{p,\eta}),$$

де $p \in [1,\infty], \eta := (\eta_1,...,\eta_n), \eta_\nu \geq 0, \nu \in \mathbb{N}_n$ і $g : \overline{H_1} \to H_1$ – деяка неперервна функція.

Розглядатимемо розв'язки $u := col(u_1,...,u_N)$ системи (4) у Π_1, які задовольняють умову

$$\forall T_0 > 0 \ \exists C > 0 \ \forall t \in [0,T_0] : \quad |||u(t,\cdot)|||_{p,\eta} := \max_{\mu \in \mathbb{N}_{n_j}, j \in \mathbb{N}_N} ||\partial_t^{\mu-1} u_j(t,\cdot)||_{p,\eta} \leq C. \tag{5}$$

Означення 2. *Нульовий розв'язок системи (4) називатимемо $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$– стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\Delta > 0$, що для будь-якого розв'язку u цієї системи, який задовольняє умову (5) та умову $|||u(0,\cdot)|||_{p,\eta} < \Delta$, справджується нерівність $\max_{l \in \mathbb{N}_N} ||u_l||_{p,\eta}^{g(\cdot)} < \varepsilon$.*

Теорема 3. *Нехай система (4) задовольняє $\Lambda_\delta^{1,0}$ -умову зі сталими $c > 0, \ \delta \in \mathbb{R}$, функціями α_ν, і $p_{jk_0}^{l\mu}$. Тоді її нульовий розв'язок є $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$– стійким з довільним $p \in [1,\infty]$ і $\eta_\nu \geq 0, \nu \in \mathbb{N}_n$ та функцією*

$$g(t) := \exp\left\{-\left(\delta t + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\eta_\nu \alpha_\nu(t))^{2b_\nu}}{2b_\nu (c_0 q_\nu)^{2b_\nu - 1}}\right)\right\} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{n_j} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu(t))^{-\frac{2b}{M} p_{j0}^{l\mu}(t)}, \ t > 0,$$

де $c_0 \in (0,c)$, сталі c і δ з $\Lambda_\delta^{1,0}$- умови.

У працях [1] – [4] доведені теореми типу Ліувілля для розв'язків систем, які задовольняють $\Lambda_\delta^{2,r}$- умови. Наведемо одну з них.

Теорема 4. *Нехай система (4) задовольняє $\Lambda_0^{2,r}$ -умову з досить великим $r \geq 0$ і нехай $u := col(u_1,...,u_N)$ – розв'язок цієї системи, для компонент якого виконується умова*

$$\exists C > 0 \ \forall (t,x) \in \Pi_2 \ \forall \mu \in \mathbb{N}_{n_l} \ \forall l \in \mathbb{N}_N : |\partial_t^{\mu-1} u_l(t,x)| \leq C \prod_{\nu=1}^{n} (1+|x_\nu|)^{\beta_\nu}, \tag{6}$$

де $\beta_\nu \geq 0, \nu \in \mathbb{N}_n$. Тоді u_l, як функція x_ν, є многочленом степеня, не вищого β_ν.

У праці [5] наведені результати побудови та оцінки фундаментальної матриці розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породженої $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою.

Розглядаються стаціонарні $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи вигляду

$$A(x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \tag{7}$$

і

$$A(x, \partial_t + \mu, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \tag{8}$$

де μ -комплексний параметр.

Цим системам відповідає поліноміальна в'язка $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем

$$\sum_{j=1}^{N} L^{\mu}_{lj}(x, \partial_x)u_j(x) := \sum_{j=1}^{N}\left(- \sum_{\substack{2bk_0+||k||\le 2bn_j \\ (0\le k_0<n_j)}} a^{lj}_{k_0 k}(x)\mu^{k_0}\partial_x^k u_j(x) + \delta_{lj}\mu^{n_j}u_l(x)\right) =$$

$$= g_l(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{N}_N. \tag{9}$$

Теорема 5. *Нехай $Z(t, x, \xi) = (Z(t, x, \xi))^N_{l,j=1}, t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, – фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи (7), яка задовольняє $\Lambda^{1,r}_\delta$ -умову з $\delta \in \mathbb{R}$, функціями $\alpha_\nu = t^{1/(2b_\nu)}, t > 0$, і $p^{lj}_{00} = \begin{cases} p^{lj}_1,\ t \le 1, \\ p^{lj}_2,\ t > 1. \end{cases}$. Тоді формулою*

$$E^\mu(x, \xi) = \int_0^\infty e^{-\mu\beta}Z(\beta, x, \xi)d\beta,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ x \ne \xi, \tag{10}$$

визначається фундаментальна матриця розв'язків системи (9) з $\mu \in \mathbb{C}$ таким, що $Re\mu > \delta$. Для елементів $E^\mu_{lj}, \{l, j\} \subset \mathbb{N}_N$, матриці E^μ справджуються оцінки

$$|\partial_x^k E^\mu_{lj}(x, \xi)| \le \begin{cases} C, \quad M + ||k|| < 2b(p^{lj}_1 + 1), \\ Cln[x - \xi]_q^{-1} + C_1, \quad M + ||k|| = 2b(p^{lj}_1 + 1), \\ C[x - \xi]_q^{2b(p^{lj}_1+1)-M-||k||}, \quad M + ||k|| > 2b(p^{lj}_1 + 1), \end{cases}$$

$$[x - \xi]_q \le 1, \tag{11}$$

$$|\partial_x^k E^\mu_{lj}(x, \xi)| \le C \exp\{-h_\mu[x - \xi]_q^{q/q''}\},\ [x - \xi]_q > 1, \tag{12}$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ x \ne \xi, ||k|| \le 2bn_l + r,\ \{l, j\} \subset \mathbb{N}_N,$$

де $C > 0,\ C_1 > 0,\ h_\mu > 0,\ q := 2b/(2b - 1),\ q'' := 2b''/(2b'' - 1),\ b'' := \min\limits_{\nu\in\mathbb{N}_n} b_\nu$,

$[x]_q := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{q_j}\right)^{1/q}$.

У випадку, коли $Re\mu = \delta$ інтеграл (10), взагалі кажучи, розбігається. У цьому випадку регуляризацію інтеграла (10) можна здійснювати за допомогою многочленів, які є частинними сумами рядів Тейлора для функцій $Z_{lj}, \{l,j\} \subset \mathbb{N}_N$:

$$E^{\mu}_{lj}(x,\xi) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu\beta}(Z_{lj}(\beta,x,\xi) - P_{2b(p^{lj}_{01}+1)-M}(Z_{lj})(\beta,x,\xi))d\beta, \tag{13}$$

де для функції $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ і $l >= 0$

$$P_{\alpha}(h)(x) := \sum_{||k||\le\alpha} \frac{(x-\xi)^k}{k!}\partial^k_y h(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 6. *Нехай система (7) задовольняє $\Lambda^{1,r}_{\delta}$ -умову з $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha_{\nu}(t) = t^{1/(2b_{\nu})}, t > 0$, і $p^{lj}_{0k_0}(t) = \begin{cases} p^{lj}_1, \ t \le 1, \\ p^{lj}_2, \ t > 1, \end{cases}$ такими, що $p^{lj}_1 > p^{lj}_2$, $\{l,j\} \subset \mathbb{N}_N$, а $Z(t,x,\xi) = (Z_{lj}(t,x,\xi))^n_{l,j=1}$, $t > 0, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_n$ – її фундаментальна матриця розв'язків. Тоді формулою (13) визначаються елементи фундаментальної матриці розв'язків E_{μ} системи (9) з $\mu \in \mathbb{C}$ таким, що $Re\mu = \delta$. При цьому для елементів E^{μ}_{lj} виконуються при $[x-\xi]_q \le 1$ оцінки (11), а при $[x-\xi]_q > 1$ і $M + ||k|| > 2b(p^{lj}_1 + 1)$ – оцінки*

$$|\partial^k_x E^{\mu}_{lj}(x,\xi)| \le C[x-\xi]_q^{2b(p^{lj}_2+1)-M-||k||}, \ \{l,j\} \subset \mathbb{N}_N.$$

2 Про нелінійні рівняння типу Ейдельмана

Використовуючи ідеї С.Д. Івасишена, львівська наукова школа проф. С.П. Лавренюка розпочала вивчення задач для нелінійних рівнянь типу Ейдельмана (в (1) числа $N = 1, \ j = 1, \ k_0 = 0$). Для задачі Коші, мішаних та обернених задач для таких типів рівнянь встановлювалися умови існування та єдиності узагальнених розв'язків в просторах Соболєва та Лебега, знаходилися оцінки цих розв'язків. Нижче наведемо їх огляд.

Нехай $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ і $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$ – області, причому $\partial\mathcal{D}_x \in C^1$ і $\partial\mathcal{D}_y \in C^1$, $k, \ m \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення: $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, $Q_{\tau} = \Omega \times (0,\tau)$, $S_{\tau} = \partial\Omega \times (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$, $T < \infty$.

Мішані задачі для нелінійних рівнянь типу Ейдельмана

В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$u_t + \sum_{i,j=1}^{k}(a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{p-2}u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n}(b_i(z,t)|u_{z_i}|^{q-2}u_{z_i})_{z_i} + \\ + c(z,t)|u|^{r-2}u + g(z,t,u) = f(z,t), \tag{14}$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)} = 0, \tag{15}$$

$$u(z,0) = u_0(z), \qquad z \in \Omega, \tag{16}$$

де $z=(x,y)\in\mathbb{R}^n$, $x\in\mathcal{D}_x$, $y\in\mathcal{D}_y$, $n=k+m$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)$, числа $p>1,\ q>1,\ r>1$, а g – нелінійна функція, яка може містити степеневі нелінійності.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (14) виконуються умови:

(A): $a_{ij}\in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(z,t)\ge a_0>0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$, $i,j\in\{1,\dots,k\}$;

(B): $b_i\in L^\infty(Q_T)$, $b_i(z,t)\ge b_0>0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$, $i\in\{1,\dots,n\}$;

(C): $c\in L^\infty(Q_T)$, $c(z,t)\ge c_0>0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$;

(F): $f\in C(Q_T)$;

(U): $u_0\in H_0^1(\Omega)$, $u_{0x_ix_j}\in L^2(\mathcal{D}_x)$, $i,j\in\{1,\dots,k\}$.

Означення 3. *Функцію $u\in V(Q_T)$, яка задовольняє інтегральну рівність*

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_tv+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)|u_{x_ix_j}|^{p-2}u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(z,t)|u_{z_i}|^{q-2}u_{z_i}v_{z_j}+c(z,t)|u|^{r-2}uv+$$
$$+g(z,t,u)v-f(z,t)v\Big]\,dxdt=0$$

для всіх $\tau\in(0,T]$, для всіх функцій $v\in C([0,T];C_0^2(\Omega))$, і початкову умову (16), назвемо узагальненим розв'язком задачі (14)–(16). Простір V означено пізніше щодо кожної задачі.

Нехай $q>1,\ p>1,\ r>1$, функція $g\equiv0$, а області $\mathcal{D}_x,\ \mathcal{D}_y$ – обмежені. У праці [18] встановлено, що за умов (A), (B), (C), (F), (U) існує узагальнений розв'язок задачі (14)–(16), такий, що $u\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, $u\in L^p((0,T);V_0^2(\Omega))\cap L^q((0,T);V_0^1(\Omega))\cap L^{r_0}(Q_T)$, де $V_0^1(\Omega)=W_0^{1,q}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, $V_0^2(\Omega)=L^p(\mathcal{D}_y;W_0^{2,p}(\mathcal{D}_x))\cap L^2(\Omega)$. Якщо ж $p\ge2$ і $q\ge\frac{2n}{n+2}$, то $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Для розв'язків u цієї задачі виконуються такі оцінки:

Теорема 7. *Нехай $p\ge2$, а $f(z,t)\equiv0$. Тоді:*

1) якщо $q>2$, то

$$\int_\Omega|u|^2\,dz\le\mu_1\left(\frac{R^{\theta_0}}{t}\right)^{\frac{2}{q-2}},$$

де стала μ_1 залежить від $q,\ n,\ b_0$ та радіуса R найменшої кулі, яка містить область Ω, $\theta_0=\frac{qn+2(q-n)}{2}$;

2) якщо $\frac{2n}{n+2}\le q<2$, то $u(z,t)=0$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T\backslash Q_{t_0}$, де $t_0=\mu_2\left(\int\limits_\Omega|u(z,0)|^2\,dz\right)^{\frac{2-q}{2}}$, а стала μ_2 залежить від $q,\ n,\ b_0,\ \Omega$.

У праці [16] в обмеженій області Q_T розглянуто мішану задачу для рівняння (14) з $q = 2,\ p = 2,\ r > 1$ та інтегральним доданком $g(z,t,u) = \int\limits_0^t g(t-s)\sum\limits_{i=1}^n u_{z_iz_i}(z,s)ds$, де $g \in C^1([0,T])$. Встановлено, що за умов $b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$, $a_{ijt},\ b_{ijt},\ c_t \in L^\infty(Q_T)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (14)–(16). Для цього розв'язку u виконуються такі оцінки:

Теорема 8. *Нехай коефіцієнти a_{ij}, b_{ij}, c не залежать від t, а $f \equiv 0$. Тоді*

1) якщо існує така стала $c > 0$, що $g(t) \le g(0)e^{-ct}$, то

$$\int\limits_{\Omega_t} [u^2 + u_t^2]dz \le \left(\int\limits_{\Omega_0} [u^2 + u_t^2]dz + \frac{M}{\delta|\mu - 2c|}\right) e^{-\kappa t},$$

де

$$\kappa = \min\{2c; \mu\}, \quad M = \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n (u_{0z_i})^2 dz,$$

$$\mu = \frac{2a_0}{c_2^2} + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right),$$

δ – мале число, таке, що $\mu > 0$,

$$\kappa = \min\{2c; \mu\},$$

сталі $c_1,\ c_2$ залежать тільки від n та Ω, і визначаються нерівностями Фрідріхса:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u\,dz \le c_1 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n u_{z_i}\,dz,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^k (u_{x_i})^2\,dz \le c_2 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^k (u_{x_ix_i}^N)^2\,dz.$$

2) якщо $g'(t) \le -c_3[g(t)]^{1+\frac{1}{s}}, s \ge 1,\ c_3 > 0$, то існує така стала $c_4 \ge 0$, що для розв'язку задачі (14)–(16) виконується оцінка

$$\int\limits_{\Omega_t} [u^2 + u_t^2]dz \le \frac{c_4}{(t+1)^{2s-1}}.$$

Нехай $q > 1,\ p = 2,\ r = 2$, області $\mathcal{D}_x,\ \mathcal{D}_y$ – обмежені, а функція $g(z,t,u) = -g(z,t)|u|^{s-2}u$. У праці [21] встановлено умови існування та єдиності локального узагальненого розв'язку задачі (14)–(16), а також умови, за яких глобальний розв'язок задачі не існує:

Теорема 9. *Нехай $u_0 \in L^{2(s-1)}(\Omega) \cap L^2(\mathcal{D}_y;\ H_0^2(\mathcal{D}_x) \cap H^4(\mathcal{D}_x)) \cap W_0^{1,2(q-1)}(\Omega)$, $|u_{0,z_i}|^{q-2}u_{0,z_i} \in H^1(\Omega)$ для всіх $i \in \{1,\dots,n\}$, $2 < q < s \le \frac{2n+2}{n}$ при $n > 2$ і $2 < q < s$ при $n \in \{1,2\}$, $n \le \frac{qs}{s-q}$, $f,\ f_t \in L^2(Q_{t_0})$ для довільного $t_0 > 0$. Тоді знайдеться таке $T > 0$, що в області Q_T існує узагальнений розв'язок задачі (14)–(16), причому T залежить від коефіцієнтів, вільного члена і початкової умови задачі.*

Теорема 10. *Нехай коефіцієнти задачі не залежать від t, а $f \equiv 0$. Виконуються умови $u_0 \in L^{2(s-1)}(\Omega) \cap L^2(\mathcal{D}_y; H_0^2(\mathcal{D}_x) \cap H^4(\mathcal{D}_x)) \cap W_0^{1,2(q-1)}(\Omega)$, $|u_{0,z_i}|^{q-2} u_{0,z_i} \in H^1(\Omega)$ для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$. Тоді якщо $2 < q < s$, $n \le \frac{qs}{s-q}$ і*

$$\int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z)(u_{x_i x_j})^2 + \frac{1}{2} c(z) u^2 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} b_i(z) |u_{z_i}|^q - \frac{1}{s} g(z) |u|^s \right] dz < 0$$

то не існує глобального розв'язку задачі (14)–(16) та

$$\lim_{t \to T-0} \int_{Q_t} |u|^s \, dz = +\infty.$$

Нехай $g(z,t,u) \equiv 0$, $q = 2$, $p \in (1,2]$, $r > 2$, а області $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$ – необмежені. У праці [17] встановлено умови однозначної розв'язності задачі (14)–(16) в необмеженій області:

Теорема 11. *Нехай $u_0 \in L^2_{loc}(\Omega)$, $f \in L^2((0,T), L^2_{loc}(\Omega))$, $n < \min\left\{\frac{2p}{2-p}, \frac{2pr}{r-p}, \frac{2r}{r-2}\right\}$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (14)–(16) такий, що $u \in C([0,T]; L^2_{loc}(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^{1,0}_{loc}(\Omega)) \cap L^p((0,T); V^p_{loc}(\Omega)) \cap L^r((0,T); L^r_{loc}(\Omega))$. Тут $V^p_{loc}(\Omega) = \{u : u_{x_i x_j} \in L^p(\Omega^R), i,j \in \{1, \dots, k\},\ u|_{(\partial\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_x^R) \times \mathcal{D}_y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{(\partial\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_x^R) \times \mathcal{D}_y} = 0,\ R > 0\}$, $\Omega^R = \mathcal{D}_x^R \times \mathcal{D}_y^R$, $\mathcal{D}_x^R = \mathcal{D}_x \cap \{x \in \mathbb{R}^k :\ |x| < R\}$, $\mathcal{D}_y^R = \mathcal{D}_y \cap \{y \in \mathbb{R}^m :\ |y| < R\}$.*

Обернені задачі для слабко нелінійних рівнянь типу Ейдельмана

Нехай $\mathcal{D}_x$ і $\mathcal{D}_y$ — обмежені області, $p = 2$, $q = 2$, $r = 2$, а функція g задовольняє умову Ліпшиця за змінною u. У працях [20, 24] в області Q_T розглянуто такі задачі: встановити достатні умови існування та єдиності пари функцій $(u(z,t),\ c(t))$, (або $(u(z,t),\ f_2(t))$), яка задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t) u_{x_i x_j})_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t) u_{z_i})_{z_j} + \\ + (c(t) + q(z)) u + g(z,t,u) = f_1(z) f_2(t), \end{aligned} \tag{17}$$

а також початкові і крайові умови

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \Omega, \tag{18}$$

$$u|_{S_T} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)} = 0 \tag{19}$$

та умову перевизначення

$$\int_{\Omega} K(z) u(z,t) \, dz = E(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Означення 4. *Пару функцій $(u(z,t),c(t))$ (чи $(u(z,t),f_2(t))$) назвемо узагальненим розв'язком задачі (17) – (20), якщо $u \in L^2(0,T;V_1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q_T)$, $c \in C([0,T])$ (чи $f_2 \in C([0,T])$), вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg(u_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u_{x_i x_j} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) u_{z_i} v_{z_j} + (c(t)+q(z))uv +$$

$$+ g(z,t,u)v \Bigg)\, dz\, dt = \int\limits_{Q_\tau} (f_1(z) f_2(t)) v \, dz\, dt$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, і всіх функцій $v \in L^2(0,T;V_1(\Omega))$, та виконуються умови (18), (20). Тут $V_1(\Omega) = \left\{ u : u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \ u_{x_i x_j} \in L^2(\Omega), i,j \in \{1,\dots,k\}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y} = 0 \right\}$.

Нехай коефіцієнти рівняння (17) і початкові умови задовольняють умови:

(A 1): $a_{ij} \in C([0,T];L^\infty(\Omega))$, $a_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(z,t) \ge a_0 > 0$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$;

(B 1): $b_{ij} \in C([0,T];L^\infty(\Omega)), b_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$, $\ i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \ge b_0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, $b_0 > 0$;

(C 1): $c \in C([0,T])$, $c(t) \ge c_0$ для всіх $t \in [0,T]$, де c_0 – стала;

(Q 1): $q \in L^\infty(\Omega)$, $q(z) \ge q_0$ для майже всіх $z \in \Omega$, де q_0 – стала;

(G 1): $g(z,t,\xi)$ – вимірна за змінними (z,t) в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$
і неперервна за змінною ξ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, крім того, існує така додатна стала g_0, що $|g(z,t,\xi) - g(z,t,\eta)| \le g_0|\xi - \eta|$
для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$;

(F 1): $f_1 \in C([0,T])$;

(F 2): $f_2 \in L^2(\Omega)$;

(U 1): $u_0 \in V_1(\Omega)$;

(K): $K \in V_1(\Omega)$, $K_{x_i x_i x_j x_j} \in L^2(\Omega), K_{z_r z_s} \in L^2(\Omega)$, $i,j \in \{1,\dots,k\}, r,s \in \{1,\dots,n\}$;

(E): $E \in W^{1,2}(0,T)$, $\ E(0) = \int\limits_\Omega K(z) u_0(z)\, dz.$

Теорема 12. *Нехай $c(t)$ – задана функція і виконуються умови (A 1), (B 1), (C 1), (Q 1), (G 1), (F 1), (U 1), (K), (E) та $\int\limits_\Omega K(z) f_1(z)\, dz \neq 0$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок $(u(z,t),f_2(t))$ задачі (17) – (20) в області Q_T.*

Теорема 13. *Нехай $f_2(t)$ – задана функція, виконуються умови (A 1), (B 1), (Q 1), (F 1), (F 2), (U 1), (K), (E) та $a_{ij,x_i x_j} \in C([0,T];L^2(\Omega))$, $b_{rs,z_r} \in C([0,T];L^2(\Omega))$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$, $r,s \in \{1,\dots,n\}$, а функція $E(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0,T]$. Тоді існує таке число $0 < T_0 \le T$, що узагальнений розв'язок $(u(z,t),c(t))$ задачі (17) – (20) в області Q_{T_0} існує та єдиний.*

Задача Коші для напівлінійного параболічного за Ейдельманом рівняння

Нехай тепер $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. У працях [19, 15] розглянуто задачу Коші для рівняння (14), в якому функція $g(z,t,u) \equiv 0$, з початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

За умов (A), (B), (C), (F), (U) отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в класі Тихонова (у праці [15] $p = q = 2,\ r \in (1,2]$, а в [19] $p \geq 2,\ q \geq 2,\ r \geq 1$). Крім того, встановлено умови компактності носія розв'язку.

Позначимо $\omega_k(T) = \sup\limits_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} u(\cdot,T)\}$, $S_{k,f}(T) = \sup\limits_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \operatorname{supp} f,\ t \in (0,T)\}$, $S_k(T) = \sup\{S_{k,f}(T)k(0)\}$, $\mathcal{E}_k(\xi) = \int\limits_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} (\sum\limits_{i,j=1}^{k} |u_{x_i x_j}|^q + \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q)(x_k - \xi)^s \, dz \, dt$, $a = \frac{q-2}{2q}\big(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+|q|+1}\big)^{-1}$.

Теорема 14. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (F), (U), $S_m(t) < +\infty$, $p = q$. Тоді існує таке число x_k^0, що*

$$\mathcal{E}_0(\xi) \leq \mu \exp\left[-\frac{\xi - x_k^0}{\mu(1+T^{1-\alpha})^{1/q}} \right]$$

при $\xi \geq \max\{(1+T^{1-\alpha})^{1/q}; x_k^0\}$, де стала μ залежить від коефіцієнтів задачі.

Для отримання умов однозначної розв'язності задачі Коші для нелінійних рівнянь Ейдельмана, мішаних та обернених задач, використано властивості функцій з просторів Соболєва, методи монотонності, компактності, послідовних наближень.

3 Висновки

У статті проведено огляд результатів, отриманих С.Д. Івасишеним та його учнями, при дослідженні задачі Коші для лінійних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем рівнянь. Ці результати знайшли своє продовження у дослідженнях нелінійних узагальнень рівнянь типу Ейдельмана львівськими математиками.

Список літератури

[1] Балабушенко Т. М. *Властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем в областях, необмежених відносно часової змінної.* Мат. студії. 2002, **18** (1), 69–78.

[2] Балабушенко Т. М. *Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування.* Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". **411**. Прикладна математика. 2000, 6–11.

[3] Балабушенко Т. М. *Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.* Мат. студії. 2002, **17** (2), 163–174.

[4] Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. *Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях* Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002, **45** (4), 19 – 26.

[5] Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. *Побудова та оцінки фундаментальних матриць розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою.* Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. **160**. Математика. Чернівці: Рута, 2003, 5–10.

[6] Ивасишен С. Д. *Об интегральных представлениях и свойстве Фату для решений параболических систем.* Успехи мат. наук. 1986. **41** (4), 173–174.

[7] Ивасишен С. Д. *Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем.* Укр. мат. журн. 1990. **4** (4), 500 – 506.

[8] Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. *$\vec{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.* К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. **1**, 3 – 175, 271 – 273.

[9] Івасишен С. Д., Кондур О.С. *Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку.* Мат. студії. 2000. **14** (1), 73–84.

[10] Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами.* Укр. мат. журн. 2000. **52** (11), 1484 – 1496.

[11] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. *Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.* Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. **349**. Математика. Чернівці: Рута, 2007, 32–36.

[12] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. *Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури.* Укр. мат. журн. 2006. **58** (11), 1501 – 1510.

[13] Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. *Параболічні початкові задачі Солонникова-Ейдельмана.* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **74**, 2011, 98–108.

[14] Івасюк Г. П. *Про властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку.* Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. **288**. Математика. Чернівці: Рута, 2006, 51–56.

[15] Коркуна О.Є. *Задача Коші для напівлінійного параболічного за Ейдельманом рівняння.* Укр. мат. журн. 2008. **60** (5), 586–602.

[16] Коркуна О.Є. *Мішана задача для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком.* Карпатські математичні публікації. 2012. **4** (2), 275–283.

[17] Коркуна О.Є., Лавренюк С.П. *Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області.* Доповіді НАН України. 2008. **4**, 24–30.

[18] Коркуна О.Є., Лавренюк С.П. *Про деякі властивості розв'язку мішаної задачі для нелінійного 2b параболічного рівняння.* Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. Математика. 2006. **314-315**, 100–104.

[19] Коркуна О., Лавренюк С. *Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного 2b-параболічного рівняння.* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2007. **67**, 153–165.

[20] Процах Н.П. *Обернена задача для слабко нелінійного рівняння типу Ейдельмана з невідомим молодшим коефіцієнтом.* Нелінійні коливання. 2020. **23** (2), 253–265.

[21] Торган Г.Р. *Неіснування глобального розв'язку змішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана.* Прикл. проблеми механіки і математики. 2008. **6**, 98–103.

[22] Эйдельман С. Д. *Об одном классе параболических систем.* Доклады АН СССР. 1960. **133** (1), 40–43.

[23] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Birkhäuser Verlag. 2004, 390 pp.

[24] Protsakh N. P., Parasiuk-Zasun O. E. *Inverse problem for semilinear Eidelman type equation.* Mat. Stud. 2020. **53** (1), 48–58.

Список літератури

[1] Balabushenko T.M. *Properties of solutions of* $\overrightarrow{2b}$*- parabolic systems in domains unbounded with respect to the time variable.* Math. Stud. 2002, **18** (1), 69–78.

[2] Balabushenko T.M. *Estimates of the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems in unbounded domains with respect to the time variable and their application.* Herald of the National Lviv Polytechnic University. **411**, Applied Mathematics. 2000, 6–11.

[3] Balabushenko T.M. *On estimates in unbounded relative to time variable domains of the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for* $\overrightarrow{2b}$*- parabolic systems.* Math. Stud. 2002, **17** (2), 163–174.

[4] Balabushenko T.M., Ivasyshen S.D. *On the properties of solutions of* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems in domains unbounded by the time variable.* Math. methods and phys.-mech. fields. 2002, **45** (4), 19 – 26.

[5] Balabushenko T.M., Ivasyshen S.D.*Construction and evaluation of the fundamental matrices of solutions of the polynomial combination of* $\overrightarrow{2b}$*- elliptic systems generated by* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems.* Scien. bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. **160**, Mathematics, Chernivtsi: Ruta, 2003, 5–10.

[6] Ivasyshen S.D. *On integral representations and the Fatou property for solutions of parabolic systems.* Advances in Math. Sciences. 1986, **41** (4), 173–174.

[7] Ivasyshen S.D. *Integral representation and initial values of solutions of* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems.* Ukr. Math. Journal 1990, **42** (4), 500 – 506.

[8] Ivasyshen S.D.,Eidelman S.D. $2\vec{b}$*-parabolic systems.* Proceedings of the Seminar on Functional Analysis. K.: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1968, **1**, 3 – 175, 271 – 273.

[9] Ivasyshen S.D., Kondur O.S. *On the Green's matrix of the Cauchy problem and the characterization of some classes of solutions for* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems of arbitrary order.* Math. Stud. 2000, **14** (1), 73 – 84.

[10] Ivasyshen S.D., Pasichnyk H.S. *On the Cauchy problem for* $\overrightarrow{2b}$*-parabolic systems with increasing coefficients.* Ukr. Math. Journal 2000, **52** (11), 1484 – 1496.

[11] Ivasyshen S. D., Ivasyuk G. P. *On properties for the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for* $2\vec{b}$*-parabolic systems.* Scien. bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. **349**, Mathematics, Chernivtsi: Ruta, 2007, 32–36.

[12] Ivasyshen S. D., Ivasyuk G. P. *Solonnikov parabolic systems of quasi-homogeneous structure.* Ukr. Math. Journal 2006, **58** (11), 1501 – 1510.

[13] Ivasyshen S. D., Ivasyuk G. P. *Parabolic initial Solonnikov-Eidelman problems.* Visnyk Lviv. Univ. Ser. mech.-math. 2011. **74**, 98–108.

[14] Ivasyuk G. P. *On properties of the potentials of model* $2\vec{b}$*-parabolic equation of arbitrary order.* Scien. bulletin of Chernivtsi University: Collection of scientific works. **288**, Mathematics, Chernivtsi: Ruta, 2006, 51–56.

[15] Korkuna O.E. *Cauchy problem for a semilinear Eidel'man parabolic equation.* Ukr. Math. J. 2008. **60**, 671–691. https://doi.org/10.1007/s11253-008-0081-0

[16] Korkuna O.E. *Mixed problem for nonlinear Eidelman equation with integral term.* Carpathian Math. Publ. 2012. **4** (2), 275–283.

[17] Korkuna O.E., Lavrenyuk S.P. *Mixed prblem for a nonlinear Eidel'man type equation in an unbounded domain.* Reports NAS of Ukraine. 2008. **4**, 24–30.

[18] Korkuna O.E., Lavrenyuk S.P. *On properties of solution for mixed problem for nonlinear 2b-parablic equation.* Nauk. Visnyk Cherniv. Univ. Mathematics. 2006. **314-315**, 100–104.

[19] Korkuna O., Lavrenyuk S. *On a support of solution for the Cauchy problem for nonlinear* $2b$*-parabolic equation.* Visnyk Lviv. Univ. Ser. mech.-math. 2007. **67**, 153–165.

[20] Protsakh N.P. *Inverse Problem for a Weakly Nonlinear Eidelman-Type Equation with Unknown Minor Coefficient.* J. Math. Sci. (United States). 2021. **258** (5), 698–712.

[21] Torgan G.R. *Non-existance of a global solution for mixed problem for Eidelman type equation.* Prykl. problemy mech. math. 2008. **6**, 98–103.

[22] Eidelman S.D. *On a class of parabolic systems.* Reports USSR Acad. Sci. 1960. **133** (1), 40–43.

[23] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Birkhäuser Verlag. 2004, 390 pp.

[24] Protsakh N. P., Parasiuk-Zasun O. E. *Inverse problem for semilinear Eidelman type equation.* Mat. Stud. 2020. **53** (1), 48–58.

Надійшло 15.12.2022

Protsakh N.P., Ivasiuk H.P., Fratavchan T.M. *On problems for Eidelman type equations and system of equations*, Bukovinian Math. Journal. **10**, 2 (2022), 213–228.

The problems for Eidelman type equations and systems of equations are considered in this paper. They were the large part of scientific interests for Prof. Ivasyshen S.D. The results of investigations of Cauchy problem, initial-boundary and the inverse problems for this type of equations in bounded or unbounded domains are given. The results are represented as the estimates of the solutions, the integral representations of solutions, theorems of the existence, uniqueness and stability of solutions.