МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.3:330.46

Циганчук Р.О.,
аспірант,
Університет банківської справи

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ДИСКРЕТНИХ У ЧАСІ

Циганчук Р.О. Моделювання періодичних економічних процесів, дискретних у часі. У статті розглянуто математичне моделювання і комп'ютерну симуляцію періодичних економічних процесів, дискретних у часі. Приведено методологію заміни диференціальних рівнянь різницевими. Досліджено модель вирівнювання цін за рівнем активу. Розв'язання та аналіз виконано двома чисельними способами, а саме методом невизначених коефіцієнтів і розв'язанням крайової задачі.

Ключові слова: неперервний час, дискретний час, математична модель, вузлова функція, економічна динаміка, періодичність.

Цыганчук Р.О. Моделирование периодических экономических процессов, дискретных во времени. В статье рассмотрены математическое моделирование и компьютерная симуляция периодических экономических процессов, дискретных во времени. Приведена методология замены дифференциальных уравнений разностными. Исследована модель выравнивания цен по уровню актива. Решение и анализ выполнены двумя числовыми способами, а именно методом неопределенных коэффициентов и решением краевой задачи.

Ключевые слова: непрерывное время, дискретное время, математическая модель, узловая функция, экономическая динамика, периодичность.

Tsyhanchuk R.O. Modelling of periodic economic processes discrete in time. Mathematical modelling and computer simulation of periodic economic processes discrete in time are considered in the article. The methodology of replacement of the differential equations is described. The model of an equation of prices on asset level is investigated. The decision and the analysis are made in two numerous ways: by the method of uncertain coefficients and solution of a boundary problem.

Key words: continuous time, discrete time, mathematical model, nodal function, economic dynamics, periodicity.

Постановка проблеми. Економічна наука включає в себе як необхідні інструментальні засоби математичні методи й моделі. Їх використання дає змогу формалізувати найважливіші зв'язки економних систем і на цій основі проводити їх аналіз, здійснювати прогнозування та оптимізацію. Математичні й економетричні методи дають змогу отримувати нові знання про економічний об'єкт і його поведінку, оцінити форму і параметри залежностей його змінних [1; 2; 3].

Задачі, які розв'язують економічна наука і практика, поділяються залежно від урахування фактору часу на статичні та динамічні. Статика вивчає стан економічних об'єктів у певний момент часу без врахування зміни їх параметрів у часі. В динамічних задачах відображаються не лише залежність змінних від часу, але й їх взаємозв'язок у часі. Як приклад наведемо залежність динаміки величини основного капіталу від динаміки інвестицій, що приведе до зміни обсягу випуску.

В економічній динаміці використовують неперервний та дискретний час. Неперервний час зручний для моделювання, оскільки дає змогу використовувати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час – зручний час для розв'язання прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і відносяться до конкретних одиниць часу. Для дискретного часу використовується апарат різницевих рівнянь. До речі, відомі моделі економічної динаміки існують як у неперервному, так і в дискретному варіантах. В обох випадках вони мають приблизно однакову точність, а рівень складності самих моделей практично однаковий.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделювання економіки – розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей і рішень математичних моделей економічних процесів. У деяких випадках ці моделі можуть розглядатися як частина математичної теорії на стику з економічною наукою. Моделювання економіки відділяється зазвичай від економетрики, що займається статистичною оцінкою та аналізом економічних залежностей і моделей на основі вивчення емпіричних даних. У моделюванні економіки досліджуються теоретичні моделі, засновані на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність та інші залежності, конкретні формули взаємозв'язку величин). Моделювання економіки не займається вивченням ступеня обґрунтованості того, що дана залежність має той чи інший вид (наприклад, що величина споживання є лінійною зростаючою функцією доходу), це залишається для економетрики. Завданням моделювання економіки є вивчення питання про існування рішення моделі, умови її невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це зазвичай здійснюється, як і в математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків (теорем) з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Зрозуміло, предметна область, методологія та інструментарій економічної науки не вичерпуються підходами моделювання економіки та економетрики, адже зазвичай в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні, евристичні підходи, що перемежовуються з елементами моделювання економіки та економетрики. Таким чином, моделювання економіки виступає і як самостійний розділ економічної науки, і як один з її інструментів. При цьому розділи моделювання економіки, що досліджувалися раніше в суто теоретичному плані, все більше стають теоретичною базою та елементами прикладних досліджень.

Серед моделей економіки можна виділити два великі класи, а саме моделі рівноваги в економічних системах і моделі економічного зростання. Моделі рівноваги (наприклад, модель Ерроу-Дебре, модель «витрати-випуск» В. Леонтьєва) допомагають дослідити стани економічних систем, в яких рівнодіюча всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Це загалом статичні моделі, тоді як економічна динаміка описується за допомогою моделей зростання (модель Харрода-Домара, модель Солоу, моделі магістрального типу тощо). Ключовим моментом дослідження моделей зростання є аналіз і відшукання траєкторій стаціонарного росту (зростання з постійними в тому чи іншому сенсі структурними характеристиками), до виходу на які зазвичай прагне описувана моделлю економічна система. Дослідження траєкторії стаціонарного зростання є одночасно базою для аналізу більш складних типів росту і сполучною ланкою з моделями економічної рівноваги.

Детерміновані моделі передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі. Стохастичні моделі допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

Більшість економіко-математичних моделей характеризується статичним підходом до вивчення економіки, коли її стан досліджується в заданий момент часу. Під статичною економічною системою розуміється така система, координати якої на досліджуваному відрізку часу можуть вважатися сталими. Відповідно, під час формулювання статичної економіко-математичної моделі припускається, що всі залежності відносяться до одного моменту часу, а система, що моделюється, є незмінною в часі. При цьому ігноруються можливі, а інколи й неминучі зміни, оскільки їх врахування не вимагається поставленою метою моделювання.

Крім того, припускається, що всі процеси, які протікають в системі, не вимагають для свого аналізу розгортання в часі, оскільки можуть бути з достатнім ступенем точності охарактеризовані незалежними від часу величинами. Тому в статичній моделі час не вводиться явно. Статичні моделі характеризують економічну систему на будь-якому фіксованому моменті часу. Оскільки статичні моделі у формалізованому вигляді не містять фактору часу, вони завжди простіші динамічних моделей тих самих економічних систем, які тією чи іншою мірою враховують цей фактор.

У практичній діяльності використовуються багатогалузеві динамічні моделі розвитку економіки, виробничі функції, теорія економічного зростання.

Диференціальні рівняння знаходять досить широке застосування в моделях динамічної економіки, в яких відображаються не лише залежність змінних від часу, але й їх взаємозв'язок у часі.

Аналіз динамічних систем та їх математичне моделювання базуються на чисельних методах розв'язування систем диференціальних рівнянь. Особливе місце серед чисельних методів розв'язування динамічних моделей з дискретним часом посідає метод скінченних різниць. Універсальність, можливість застосування в лінійних і нелінійних задачах роблять метод скінченних різниць найбільш поширеним методом із застосовуваних в цей час наближених методів. Але не лише надзвичайна загальність різницевого методу приваблює дослідників. Мабуть, це найбільш зручний та прозорий чисельний метод, завдяки якому майже завжди можна отримати уяву про шуканий розв'язок.

Формулювання цілей статті. Для зменшення кількості кінцево-різницевих рівнянь, які апроксимують диференціальні рівняння, а також під час збереження потрібної точності результатів дослідження необхідно скористатися апроксимаціями, які враховують не лише перший член розкладання шуканого рішення в ряд Тейлора, але й наступні його члени. Коефіцієнти таких апроксимацій можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів. Метою роботи є розроблення раціонального способу, що значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу, дискретного в часі, різницевими рівняннями.

Виклад основного матеріалу. Найбільш загальний спосіб побудови кінцево-різницевих рівнянь полягає в тому, що відповідним різницевим відношенням апроксимується не кожна похідна зокрема, а відразу весь диференціальний оператор. За заданого набору вузлів складають кінцево-різницеве рівняння, яке апроксимує дане диференціальне рівняння в m-й вузловій точці, яка знаходиться посередині сукупності вузлів з номерами $m-k,...,m,...,m+k(k=1,2,...)$, а також яке загалом можна подати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &a_{m-k}Y_{m-k}+...+a_mY_m+...+a_{m+k}Y_{m+k}= \\ &=h(b_{m-k}Y'_{m-k}+...+b_mY'_m+...+b_{m+k}Y'_{m+k})+R_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Число k називається порядком цього рівняння, а число p – його ступенем. Залишковий член R_k означає різницю між лівою та правою частинами виразу і визначає помилку апроксимації.

Розкладаємо точкові функції $Y_{m-k},...,Y_m,...,Y_{m+k}$ та їх похідні $Y'_{m-k},...,Y'_m,...,Y'_{m+k}$ за формулою Тейлора до членів з похідними ступеня $p+1$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} &Y_{m+k}=Y_m+khY'_m+\frac{(kh)^2}{2!}Y''_m+...+ \\ &+\frac{(kh)^p}{p!}Y_m^p+\frac{(kh)^{p+1}}{(p+1)!}Y_m^{p+1}+0(h^{p+1}), \end{aligned} \tag{2}$$

$$Y'_{m+k} = Y'_m + khY''_m + \frac{(kh)^2}{2!}Y''_m + ... +$$
$$+\frac{(kh)^{p-1}}{(p-1)!}Y^p_m + \frac{(kh)^p}{p!}Y^{p+1}_m + 0(h^p).$$

Поставимо вимогу, щоб після підстановки коефіцієнти при похідних у правій частині виразу співпали з коефіцієнтами при відповідних похідних лівої частини. В результаті отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_0^K a_K = 0, \quad \sum_1^K a_K K^S - Sb_K K^{S-1}) = 0,$$
$$(S = 2,3,...,p), \quad \sum_1^K a_K K - \sum_0^K b_K = 0. \tag{3}$$

Всього маємо $p+1$ однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $2(K+1)$ невідомих $a_{m\pm K}, b_{m\pm K}$. Якщо ця система рівнянь має рішення, то задача побудови кінцево-різницевого рівняння, апроксимуючого задане диференціальне, може вважатись розв'язаною.

Знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів значення коефіцієнтів a і b для рівнянь різного порядку K.

Візьмемо $K = 1$. Тоді рівняння (5) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} a_{m-1} + a_{m+1} + a_m &= 0; \\ -a_{m-1} + a_{m+1} &= h\cdot 1(b_{m-1} + b_{m+1} + b_m); \\ a_{m-1} + a_{m+1} &= h\cdot 2(-b_{m-1} + b_{m+1}); \\ -a_{m-1} + a_{m+1} &= h\cdot 3(b_{m-1} + b_{m+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Враховуючи, що для заданої дискретизації аргументу можна побудувати безліч різницевих схем, еквівалентних за порядком апроксимації, і не впливаючи на загальність результату в системі рівнянь, приймемо $a_m = 1, \quad b_m = 0.$ Результатом розв'язування буде формула:

$$2y_{m-1} - 4y_m + 2y_{m+1} = h(y'_{m-1} + y'_{m+1}) + \frac{1}{24}h^4 y^4_m. \tag{5}$$

Отримано різницеві рівняння підвищеної точності. Інформацію в точці отримуємо на основі інформації в точках $m-1$ та $m+1$.

Розглянемо різницеве рівняння для порядку апроксимації k = 1 із похибкою п'ятого порядку, яку записуємо так:

$$-3y_{m-1} + 3y_{m+1} = h(y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}) + \frac{1}{30}h^5 y^{(5)}_m, \tag{6}$$

де m– номер вузлової точки;

h – крок дискретизації;

y_{m-1}, y_m, y_{m+1} – сіткові функції;

y'_{m-1}, y'_m, y'_{m+1} – їхні похідні.

Кінцево-різницева формула (6) пов'язує шукану функцію в $(m-1)$-му і $(m+1)$-му вузлах через значення її похідних в $(m-1)$-му, (m)-му, $(m+1)$-му вузлах. Спробуємо отримати апроксимуючі формули, розв'язані відносно функцій, тобто такі, що визначають функцію в m-му вузлі через значення її похідних у трьох інших вузлах. Розглянемо метод отримання таких виразів на прикладі рівняння (6).

Для економічних процесів, які характеризуються періодичністю вигляду $y_m(t) = y_m(t + 180°)$ як інтервал повторюваності, доцільно прийняти півперіод, що скоротить час розв'язування задачі. Мінімальна кількість вузлів на періоді для тривузлової апроксимації дорівнює чотирьом ($n = 4$) Записуємо рівняння (6) для всіх вузлових точок періоду з урахуванням граничних умов, які для періодичних економічних процесів будуть такі:

$$y_{n+1} = -y_1. \tag{7}$$

В результаті розв'язання системи різницевих рівнянь відносно вузлових функцій отримаємо:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{h}{3}\left(-2y'_2 - y'_3 - 2y'_4\right), \\ y_2 &= \frac{h}{3}\left(2y'_1 - 2y'_3 + y'_4\right), \\ y_3 &= \frac{h}{3}\left(y'_1 + 2y'_2 - 2y'_4\right), \\ y_4 &= \frac{h}{3}\left(2y'_1 + 4y'_2 + 2y'_3\right), \end{aligned} \tag{8}$$

або в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} & -2 & -1 & -2 \\ 2 & & -2 & -1 \\ 1 & 2 & & -2 \\ 2 & 1 & 2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Апробація теоретичних результатів на прикладі розв'язання моделі вирівнювання цін за рівнем активу.

q – рівень активу;

s – пропозиція;

d – попит;

p – ціна.

Зміна рівня активу q' пропорційна різниці між пропозицією та попитом:

$$q' = k(s-d), k > 0. \tag{10}$$

Зміна ціни p' пропорційна відхиленню активу q від деякого фіксованого рівня q_0, тобто:

$$p' = -m(q - q_0), m > 0. \tag{11}$$

Модель вирівнювання цін за рівнем активу має вигляд:

$$\frac{dq}{dt} = k(s_{(p)} - d_{(p)}), \tag{12}$$

$$\frac{dp}{dt} = -m(q - q_0) = m(q_0 - q). \tag{13}$$

Залежність пропозиції та попиту від ціни має вигляд:

$$s_{(p)} = ap + s_0; d_{(p)} = cp + d_0. \tag{14}$$

Для значень $k = 0,3;\ m = 0,1;\ q_0 = 20;\ a = 20;\ s_0 = 10;\ d_0 = 50;\ c = -10.$

Початкові умови: $q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2.$

<u>*Розв'язання*</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 0,3\times\left[(20\times p + 10) - (-10\times p + 50)\right]; \\ \dfrac{dp}{dt} = 0,1\times(20 - q); \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 9\times p - 12; \\ \dfrac{dp}{dt} = 2 - 0,1\times q; \end{cases} \tag{16}$$

<u>*Кінцево-різницевий метод*</u>.

Визначення наступного значення невідомого через попереднє значення за заданих початкових умов $q_{(0)} = 19,\ p_{(0)} = 2$ – це розрахунок <u>*перехідного процесу*</u>.

$$\begin{cases} \dfrac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = 9\times p_n - 12; \\ \dfrac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = 2 - 0,1\times q_n; \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + (9p_n - 12)\cdot \Delta t; \\ p_{n+1} = p_n + (2 - 0{,}1q_n)\cdot \Delta t. \end{cases} \qquad (18)$$

Якщо не фіксувати період T, то графічні зображення результатів обчислення виразів (18) за початкових умов будуть мати такий вигляд (рис. 1).

Із наведених результатів можна зробити висновок про перехідний процес.

<u>*Розв'язання крайової задачі на основі моделі вирівнювання цін за рівнем активу*</u>.

Різницевий триточковий шаблон для функції $\frac{dy}{dt} = f(y;t)$, де y – це q або p, буде мати вигляд:

$$-y_{m-1} + y_{m+1} = \frac{h}{3}\times(y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}); \qquad (19)$$

Тоді:

$$-q_{m-1} + q_{m+1} = \frac{h}{3}\times\left[9p_{m-1} - 12 + 4\times(9p_m - 12) + 9p_{m+1} - 12\right]; \qquad (20)$$

$$-p_{m-1} + p_{m+1} = \frac{h}{3}\times\left[2 - 0{,}1q_{m-1} + 4\times(2 - 0{,}1q_m) + 2 - 0{,}1q_{m+1}\right]; \qquad (21)$$

Візьмемо 10 точок на періоді, де $n = 10$ – число вузлів на періоді; $N = 2$ – число диференціальних рівнянь; $n \cdot N = 20$ – порядок системи різницевих рівнянь; після чого різницеві рівняння (20), (21) перетворяться у систему різницевих рівнянь для триточкового шаблону і набудуть вигляду:

$$\begin{cases}
-q_1 + q_3 = h\times(3p_1 + 12p_2 + 3p_3 - 24); \\
-q_2 + q_4 = h\times(3p_2 + 12p_3 + 3p_4 - 24); \\
-q_3 + q_5 = h\times(3p_3 + 12p_4 + 3p_5 - 24); \\
-q_4 + q_6 = h\times(3p_4 + 12p_5 + 3p_6 - 24); \\
-q_5 + q_7 = h\times(3p_5 + 12p_6 + 3p_7 - 24); \\
-q_6 + q_8 = h\times(3p_6 + 12p_7 + 3p_8 - 24); \\
-q_7 + q_9 = h\times(3p_7 + 12p_8 + 3p_9 - 24); \\
-q_8 + q_{10} = h\times(3p_8 + 12p_9 + 3p_{10} - 24); \\
-q_9 + q_{11} = h\times(3p_9 + 12p_{10} + 3p_{11} - 24); \\
-q_{10} + q_{12} = h\times(3p_{10} + 12p_{11} + 3p_{12} - 24);
\end{cases} \qquad (22)$$

$$\begin{cases}
-p_1 + p_3 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_1 - 0{,}4q_2 - 0{,}1q_3); \\
-p_2 + p_4 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_2 - 0{,}4q_3 - 0{,}1q_4); \\
-p_3 + p_5 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_3 - 0{,}4q_4 - 0{,}1q_5); \\
-p_4 + p_6 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_4 - 0{,}4q_5 - 0{,}1q_6); \\
-p_5 + p_7 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_5 - 0{,}4q_6 - 0{,}1q_7); \\
-p_6 + p_8 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_6 - 0{,}4q_7 - 0{,}1q_8); \\
-p_7 + p_9 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_7 - 0{,}4q_8 - 0{,}1q_9); \\
-p_8 + p_{10} = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_8 - 0{,}4q_9 - 0{,}1q_{10}); \\
-p_9 + p_{11} = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_9 - 0{,}4q_{10} - 0{,}1q_{11}); \\
-p_{10} + p_{12} = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_{10} - 0{,}4q_{11} - 0{,}1q_{12});
\end{cases} \qquad (23)$$

Задаємося визначальними величинами

$$Y = (q_1, q_3, p_1, p_3)^t.$$

Далі запусуємо розв'язки по рекурентних формулах:

$$\begin{cases}
p_2 = 2 - \frac{(q_1 - q_3)}{12h} - \frac{(p_1 + p_3)}{4}; \\
p_3 = 2 - \frac{(q_2 - q_4)}{12h} - \frac{(p_2 + p_4)}{4}; \\
p_4 = 2 - \frac{(q_3 - q_5)}{12h} - \frac{(p_3 + p_5)}{4}; \\
p_5 = 2 - \frac{(q_4 - q_6)}{12h} - \frac{(p_4 + p_6)}{4}; \\
p_6 = 2 - \frac{(q_5 - q_7)}{12h} - \frac{(p_5 + p_7)}{4}; \\
p_7 = 2 - \frac{(q_6 - q_8)}{12h} - \frac{(p_6 + p_8)}{4}; \\
p_8 = 2 - \frac{(q_7 - q_9)}{12h} - \frac{(p_7 + p_9)}{4}; \\
p_9 = 2 - \frac{(q_8 - q_{10})}{12h} - \frac{(p_8 + p_{10})}{4}; \\
p_{10} = 2 - \frac{(q_9 - q_{11})}{12h} - \frac{(p_9 + p_{11})}{4}; \\
p_{11} = 2 - \frac{(q_{10} - q_{12})}{12h} - \frac{(p_{10} + p_{12})}{4};
\end{cases} \qquad (24)$$

$$\begin{cases}
q_2 = 30 - \frac{(q_1 + q_3)}{4} + \frac{15\times(p_1 - p_3)}{2h}; \\
q_3 = 30 - \frac{(q_2 + q_4)}{4} + \frac{15\times(p_2 - p_4)}{2h}; \\
q_4 = 30 - \frac{(q_3 + q_5)}{4} + \frac{15\times(p_3 - p_5)}{2h}; \\
q_5 = 30 - \frac{(q_4 + q_6)}{4} + \frac{15\times(p_4 - p_6)}{2h}; \\
q_6 = 30 - \frac{(q_5 + q_7)}{4} + \frac{15\times(p_5 - p_7)}{2h}; \\
q_7 = 30 - \frac{(q_6 + q_8)}{4} + \frac{15\times(p_6 - p_8)}{2h}; \\
q_8 = 30 - \frac{(q_7 + q_9)}{4} + \frac{15\times(p_7 - p_9)}{2h}; \\
q_9 = 30 - \frac{(q_8 + q_{10})}{4} + \frac{15\times(p_8 - p_{10})}{2h}; \\
q_{10} = 30 - \frac{(q_9 + q_{11})}{4} + \frac{15\times(p_9 - p_{11})}{2h}; \\
q_{11} = 30 - \frac{(q_{10} + q_{12})}{4} + \frac{15\times(p_{10} - p_{12})}{2h};
\end{cases} \qquad (25)$$

Прирівнюємо наші визначальні величини до 0.

Тепер по два рівняння систем (22), (23), тобто дев'яті і десяті визначають остачу розв'язку, тобто нев'язки:

$$\begin{cases} \Delta_{11}^0 = h\times(3p_9 + 12p_{10} + 3p_{11} - 24) + q_9 - q_{11}; \\ \Delta_{12}^0 = h\times(3p_{10} + 12p_{11} + 3p_{12} - 24) + q_{10} - q_{12}; \end{cases} \qquad (26)$$

$$\begin{cases} \Delta_{21}^0 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_9 - 0{,}4q_{10} - 0{,}1q_{11}) + p_9 - p_{11}; \\ \Delta_{22}^0 = \frac{h}{3}(12 - 0{,}1q_{10} - 0{,}4q_{11} - 0{,}1q_{12}) + p_{10} - p_{12}; \end{cases} \qquad (27)$$

Нульові нев'язки $\Delta_0 = (\Delta_{11}^0, \Delta_{12}^0, \Delta_{21}^0, \Delta_{22}^0)$ після розв'язку систем рекурентних рівнянь, будуть мати вигляд:

$$\Delta_0 = (-61{,}28006144; -58{,}32972217; 9{,}961630512; 9{,}839955372).$$

Аналогічно знаходимо нев'язки для чотирьох випадків, почергово прирівнюючи одну з визначаль-

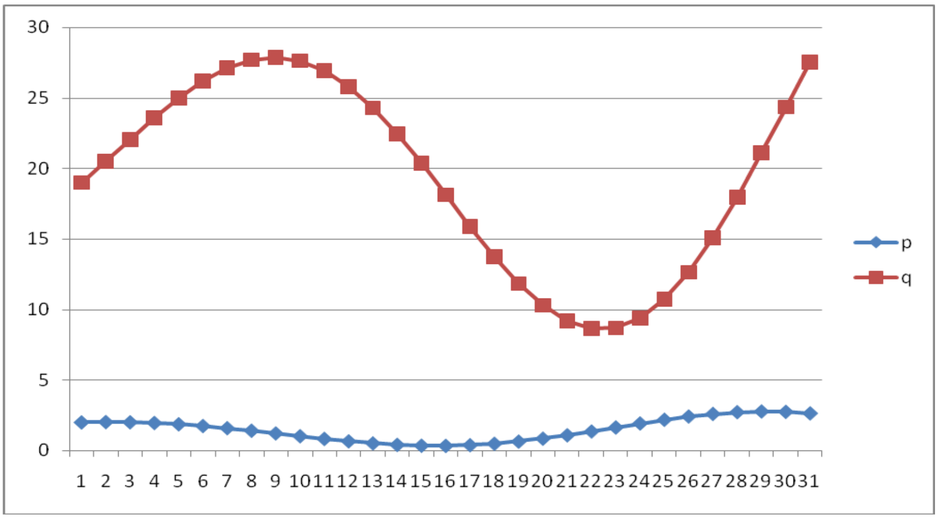

Рис. 1. Результат моделювання вирівнювання цін за рівнем активу (кінцево-різницевим методом)

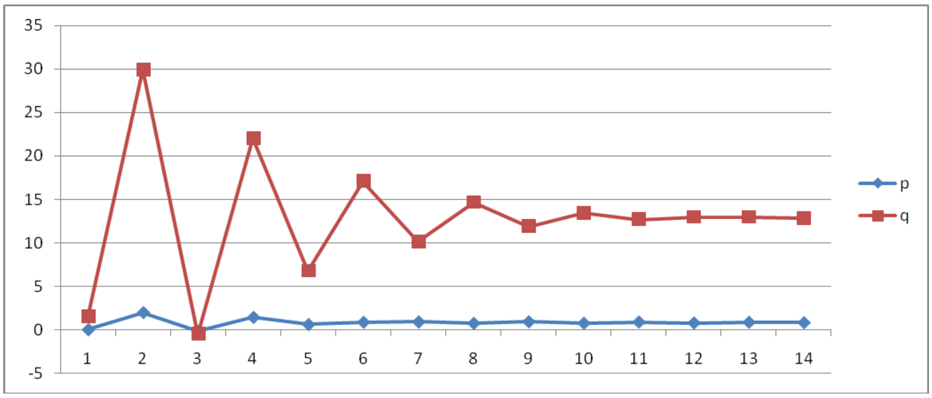

Рис. 2. Результат моделювання вирівнювання цін за рівнем активу (розв'язання крайової задачі)

них величин до 1, а решту до 0. Після цього формуємо систему рівнянь нев'язок:

$$Y = \Delta^{-1} \times \Delta_0 . \qquad (28)$$

Підставивши істинні значення у систему рекурентних рівнянь, проілюструємо отримані результати (рис. 2).

Висновки. Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь різницевими під час моделювання економічних процесів, дискретних у часі. Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів і в кінцевому підсумку вимагають менших обчислювальних затрат.

Розв'язання кінцево-різницевих рівнянь підвищеної точності відносно вузлових функцій значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевими рівняннями.

Запропонований метод отримання різницевих рівнянь підвищеної точності є загальним і може бути поширений на будь-яку кількість вузлів дискретної сітки.

Чисельне рішення моделі вирівнювання цін за рівнем активу підтвердило високу точність запропонованих кінцево-різницевих рівнянь.

Список використаних джерел:

1. Математические методы в экономике : [учебник] / [О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных]. – М. : МГУ, ДИС, 1997. – 453 с.
2. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В. Лотов. – М. : Наука, 1984. – 283 с.
3. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : [учеб. пособие для вузов] / С.И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 240 с.