УДК 624.121.54

ПРОГНОЗ ДЕФОРМАЦІЙ МАСИВНОГО ПРИРОДНОГО ВОДОНАСИЧЕНОГО СХИЛУ ПРИ ЙОГО ОСУШЕННІ

Кузло М.Т.

Національний університет водного господарства та природокористування
м. Рівне, Україна

АНОТАЦІЯ: Наведено результати математичного моделювання деформацій природного водонасиченого схилу при його осушенні.

АННОТАЦИЯ: Приведены результаты математического моделирования деформаций естественного водонасыщенного уклона при его осушении.

ABSTRACT: The results of mathematical modeling of natural water saturated slope under its drainage have been pointed out.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вертикальні зміщення, напружено-деформований стан, конформне відображення.

ВСТУП

Під час проектування основних споруд Канівської гідроакумулюючої електростанції (ГАЕС) виникла необхідність в осушенні нижньої частини водонасиченого природного схилу (рис. 1)

Відомо, що в процесі осушення в ґрунтовому масиві від дії внутрішніх об’ємних сил (гідродинамічних сил фільтраційного потоку, зміни власної ваги ґрунту) виникають додаткові деформації, що можуть суттєво змінювати важливі проектні позначки розміщення будівлі ГАЕС і анкерних гравітаційних опор сталезалізобетонних напірних водоводів. Ці деформації ускладнюють нормальну експлуатацію, а в деяких випадках призводять до аварій будівель і споруд та можуть приносити значний економічний збиток.

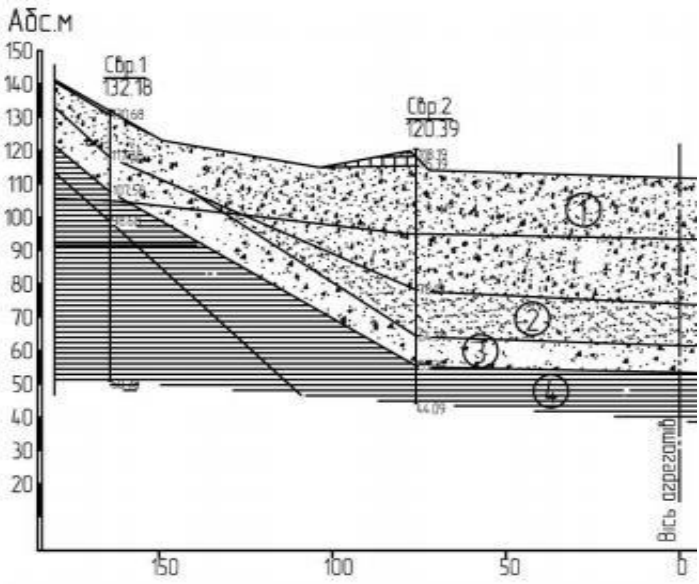

Рис. 1. Інженерно-геологічний розріз об’єкта будівництва

Започатковано розв’язання цієї проблеми в роботах [1 - 4], основними результатами яких є розробка нових та вдосконалення існуючих математичних моделей і методів їх рішень з визначення параметрів фільтраційного потоку, напружено-деформованого стану (НДС) грантових масивів при дії фільтраційного потоку води. Однак, для сумісного розв’язання задач фільтрації і НДС водонасичених грунтових масивів при зміні гідрогеологічних умов, необхідний їх подальший розвиток.

Метою роботи є прогноз деформацій природного водонасиченого схилу при його осушенні під час проектування Канівської ГАЕС.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Математична модель, що описує цю проблему, складається з диференціальних рівнянь фільтраційного потоку і рівнянь НДС грунтового масиву, які записуються в переміщеннях.

У роботі розглядається задача повного осушення грунтового масиву з відомим початковим рівнем поверхні грунту і грунтових вод. Кінцеве розміщення грунтових вод знаходиться на рівні водоопору.

Для розв’язання поставленої задачі необхідно встановити поле напорів фільтраційного потоку, НДС грунтового масиву та визначити його зміщення після осушення в заданих точках.

Рівняння фільтраційного потоку води на початковий та у кінцевий момент часу для двовимірному випадку записується у вигляді:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

де $H(x,z)$ – напір води в точці (x,z) грунтового масиву.

Математична модель НДС грунтового масиву у момент часу після настання стабілізації рівня грунтових вод в області нижче рівня ґрунтових вод $\Omega_t=\{(x,z)\,|\,x\in(0,r),z\in(0,h(x,t))\}$ описується наступними диференціальними рівняннями [5]:

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)=\gamma_w\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\mu\Delta w+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\gamma_{sb}+\gamma_w\frac{\partial H}{\partial z} \tag{3}$$

при таких граничних умовах

$$u(x,0)=0,\quad w(x,0)=0, \tag{4}$$

$$u(0,z)=0,\quad u(r,z)=0, \tag{5}$$

$$\tau_{xz}(0,z)=0,\ \tau_{xz}(r,z)=0, \tag{6}$$

$$\tau_n(x,l_1(x))=0,\qquad \sigma_n(x,l_1(x))=\gamma_n(l_1(x)-l(x)). \tag{7}$$

Тут $h(x,t)$ – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу t; $H(x,z)$ – напір у точці (x,z) у момент часу t; Δ – оператор Лапласа; λ,μ – пружні сталі; $u(x,z)$ – горизонтальні, а $w(x,z)$ – вертикальні зміщення точки, яка у момент t знаходиться в точці (x,z); $\gamma_w=\rho_w g$ – питома вага води; γ_{sb} – питома вага ґрунту в насиченому стані; τ_{xz} – головні дотичні напруження; σ_n – нормальні напруження; τ_n – дотичні напруження; $l_1(x)$ – рівень ґрунтових вод; $l(x)$ – шукана висота (глибина) ґрунтового масиву в момент часу t; γ_n – питома вага ґрунту в природному стані. Для того, щоб знайти зміщення у ґрунтовому масиві, необхідно знати напори в усіх точках масиву в початковий та кінцевий моменти часу. Позначимо загальну ширину розглядуваної області, що розглядається через r.

Для визначення напорів в області Ω_t знайдемо розв'язок диференціального рівняння стаціонарної фільтрації (1) при таких граничних умовах:

$$H(0,z)=H_0(z),\qquad H(r,z)=H_r(z), \tag{8}$$

$$\frac{\partial H(x,0)}{\partial z}=0, \qquad H(x,h(x,t))=h(x,t), \qquad (9)$$

де $H_0(z), H_r(z)$ – напори на лівій та правій межі ґрунтового масиву (відомі функції).

Чисельний розв'язок крайової задачі (1), (8)-(9) отримано шляхом побудови на сітці параметричного прямокутника в площині $\xi O\eta$ різницевої схеми з використанням шаблону типу «хрест» та розв'язавши її ітераційним методом послідовної верхньої релаксації. Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області $\Omega_t=\{(x,z)\,|\,x\in(0,r), z\in(0,h(x,t))\}$ на параметричний прямокутник у площині $\xi O\eta$. Гідродинамічна сітка області фільтрації на момент осушення грунтового масиву наведена на рис. 2.

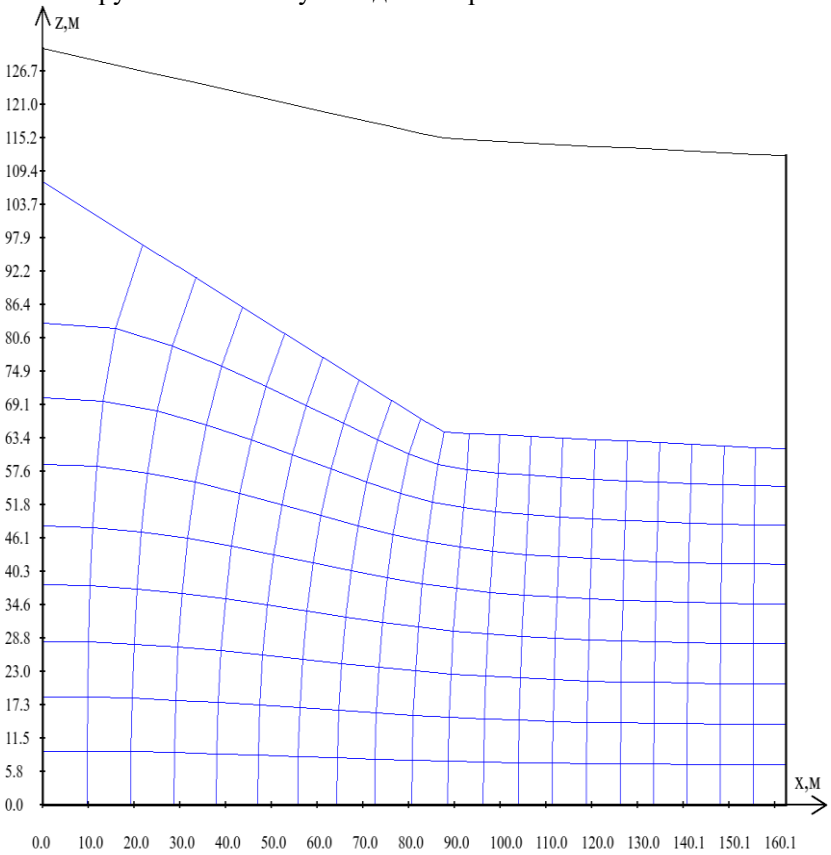

Рис. 2. Гідродинамічна сітка області фільтрації на момент осушення грунтового масиву

Розв’яжемо задачу (2)-(7). Для цього виразимо напруження через зміщення:

$$\tau_{xz} = \mu\varepsilon_{xz} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Згідно (5), $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=r} = 0$, тому $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x=r} = 0$, отже, (6) набуде вигляду:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=r} = 0. \tag{11}$$

Мають місце формули [5]

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^{\,2} + \sigma_z n_z^{\,2} + 2\tau_{xz} n_x n_z,\ \tau_n = \sqrt{P_x^{\,2} + P_z^{\,2} - \sigma_n^{\,2}}, \tag{12}$$

де $P_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z$, $P_z = \tau_{zx} n_x + \sigma_z n_z$ – складові вектора напружень; n_x, n_z – напрямні косинуси вектора нормалі до верхньої межі Ω_t, а саме:

$n_x = -\sin\alpha,\ n_z = \cos\alpha,$ де $\alpha = arctg\left(l_1'(x)\right)$.

Врахувавши (12) і виразивши напруження через зміщення, із залежності (7) отримаємо

$$\left(2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)n_x n_z + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(n_x^{\,2} - n_z^{\,2}\right)\right)\Bigg|_{z=l_1} = 0, \tag{13}$$

$$\left(\left(\lambda\left(n_x^{\,2} + n_z^{\,2}\right) + 2\mu n_x^{\,2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\lambda\left(n_x^{\,2} + n_z^{\,2}\right) + 2\mu n_z^{\,2}\right)\frac{\partial w}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \mu n_x n_z\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\Bigg|_{z=l_1} = \gamma_n\left(l_1(x) - l(x)\right). \tag{14}$$

Позначимо v – вертикальне зміщення у точці $\left(x, l_1(t_1)\right)$ відносно початкової поверхні ґрунту в момент часу t_1. У початковий момент часу рівень поверхні ґрунту відомий – заданий функцією $l(x,0)$. У момент часу t_1 l залежить від початкового рівня поверхні, зміщень відносно початкового рівня. Зміщення $l(x,t_1) - l(x,0)$ складаються із двох компонентів – зміщення ґрунту під РҐВ v та зміщення осушеного ґрунту h_1, тому має місце формула:

$$l(x,t_1) = l(x,0) + v + h_1. \tag{15}$$

У рівнянні (15) ми нехтуємо впливом горизонтальних зміщень, що значно менші від вертикальних.

Знайдемо значення v. Позначимо $v_0 = w_0\left(x, l_1(t_1)\right)$, $v_{t_1} = w_{t_1}\left(x, l_1(t_1)\right)$ – вертикальні зміщення, знайдені в результаті розв'язку задачі (2)-(7) у моменти часу 0 та t_1 відповідно.

Позначимо *G* – частинка ґрунту, що знаходиться в момент часу t_1 у точці $\left(x, l_1(t_1)\right)$; *F* – частинка ґрунту, що знаходиться в момент часу 0 у точці $\left(x, l_1(t_1)\right)$. Тоді v_0 – початкове зміщення частинки *F;* v_{t_1} – кінцеве зміщення частинки *G*. Щоб знайти реальне зміщення частинки *G* v необхідно від v_{t_1} відняти початкове зміщення *G*. У початковий момент часу частинка *G* знаходиться на відстані v над своїм кінцевим розташуванням. Оскільки v поки що невідоме, для його відшукання можна використати різні підходи, зокрема: ітераційний метод та спосіб з використанням $\frac{dw_0\left(x, l_1(t_1)\right)}{dz}$. Для цього розкладемо w_0 у ряд Тейлора в околі точки $\left(x, l_1(t_1)\right)$:

$$w_0\left(x, l_1(t_1) - v\right) = v_0 - v\frac{dw_0\left(x, l_1(t_1)\right)}{dz} + O\left(v^2\right). \tag{16}$$

Оскільки значення v досить мале, останнім доданком у формулі (16) можна нехтувати. Вираз $w_0\left(x, l_1(t_1) - v\right)$ описує початкове зміщення *G*. Отже, має місце формула $v = v_{t_1} - w_0\left(x, l_1(t_1) - v\right)$. Остаточно маємо:

$$v = v_{t_1} - \left(v_0 - v\frac{dw_0\left(x, l_1(t_1)\right)}{dz}\right). \tag{17}$$

Отже, у рівності (17) зміна положення точки, що знаходиться на поверхні грунтових вод у момент часу t_1 відносно $t = 0$, врахована за допомогою похідної по вертикальних зміщеннях.

Виразивши v із рівняння (17), отримаємо:

$$v = \frac{v_{t_1} - v_0}{1 - \frac{dw_0\left(x, l_1(t_1)\right)}{dz}}. \tag{18}$$

У рівнянні (18) v_0 та $\frac{dw_0\left(x, l_1(t_1)\right)}{dz}$ невідомі, оскільки конформні сітки різні для початкового та кінцевого моменту часу. Для знаходження цих величин використаємо інтерполяцію на конформній сітці при $t = 0$. У

вузлах початкової конформної сітки $\frac{dw_0}{dz}$ знайдемо, використовуючи стандартні скінченно-різницеві апроксимації другого порядку точності.

Початкова висота частини ґрунту, яка виявиться осушеною в кінцевий момент часу, рівна $l_1(0)-l_1(t_1)+v$. Звідси зміщення осушеного ґрунту у зв'язку із зміною пористості рівне:

$$h_1=\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(l_1(0)-l_1(t_1)+v\right). \tag{19}$$

Тут $\alpha=\frac{1+e_0}{1+e_1}$, де e_0 та e_1 – коефіцієнти пористості водонасиченого ґрунту та ґрунту, що знаходиться у природному стані, відповідно.

Для розв'язання задачі (2)-(5), (11), (13), (14) перейдемо до змінних ξ,η.

$$\frac{\mu}{J_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+$$
$$\left.+\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}\right)=\gamma_w\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{20}$$

$$\frac{\mu}{J_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+\right.$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+$$
$$\left.+\frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)=\gamma_{sb}+\gamma_w\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{21}$$

де $J_1=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2$ – якобіан оберненого відображення.

Аналогічні переходи здійснимо також у крайових умовах. Провівши заміну перших і других похідних функцій ξ,η по x,z через похідні x,z по ξ,η [6]; знайшовши похідні x,z по ξ,η на конформній сітці за допомогою стандартних скінченно-різницевих апроксимацій другого порядку точності; замінивши похідні від функцій u,w по змінних ξ,η їх скінченно-різницевими аналогами другого порядку точності у рівняннях та

крайових умовах, отримаємо СЛАР із квадратною матрицею системи. Розв'язавши СЛАР одним із стандартних чисельних методів (наприклад, модифікованим методом Гауса), знайдемо значення горизонтальних і вертикальних зміщень у кожній точці сітки.

Для чисельного розв'язання задачі нами створена програма на мові програмування С++ [7]. Згідно з описаним алгоритмом, проведені чисельні експерименти. Вихідні дані з фізико-механічних властивостей грунту були наступні: $\lambda = 18493 КПа$; $\mu = 15748\ КПа$; $e_0 = 0{,}672$; $e_1 = 0{,}664$; $\gamma_w = 10 кН/м^3$; $\gamma_{sb} = 9{,}63 кН/м^3$; $\gamma_n = 16{,}48\, кН/м^3$.

Результати чисельного моделювання наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Значення вертикальних зміщень грунтового масиву при його осушенні в заданих точках (*x,м*)

x, м	0	33,4	52,8	69,0	82,6	93,2	106,7
l, см	2,60	12,6	14,22	15,7	19,0	26,7	32,3
x, м	120,7	134,8	148,92	162,5			
l, см	36,1	38,3	39.2	39,7			

ВИСНОВКИ

У даній роботі розв'язана інженерна задача з прогнозу деформацій водонасиченого ґрунтового масиву при будівництві ГАЕС в результаті його осушення. За результатами чисельних експериментів встановлено вплив осушення ґрунту на вертикальні його зміщення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кремез В. С. Моделирование фильтрации грунтовых вод на основе уточнённого уравнения Буссинеска / В. С. Кремез // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: зб. Наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип.31. – С. 160 – 165.
2. Хулбарян М.Г. Приближённое аналитическое решение задачи нестационарной фильтрации со свободной поверхностью / М. Г. Хулбарян, О. О. Юшманов // Водные ресурсы. – 1982. - №1. – С.107 – 112.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
4. Кузло М.Т. Моделювання деформацій природного схилу при його осушенні / М.Т. Кузло // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2013. - Вип. 3(38). - Том 1. – С. 199–207.

5. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецький, В. С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
6. Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с „плавающими" узлами / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – К., 1989. – 55 с.
7. Кузло М.Т. Комп'ютерна програма "Моделювання деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ (Shift") / М.Т. Кузло, І.О. Кушнір // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 53884 від 28.02.2014 – К.: Державна служба інтелектуальної власності України, 2014.

REFERENCES

1. Kremez V. S. Modelling of soil water filtration on the basis of Bussineck's defined equation / V. S. Kremez // Hydromelioration and hydrotechnical construction: Collected scientific articles. – Rivne:NUWMNRU, 2006. – Ed. 31 – P.160 – 165.
2. Khulbarjan M.H. Approximate analytical solution of nonstationary filtration problem with free surface / M. H. Khulbarjan, O. O. Jushmanov//Water resources. – 1982. №1. – P.107 – 112.
3. Polubarinova-Kochina P. Ja. Theory of soil water movement / P. Ja. Polubarinova-Kochina. – M.: Nauka, 1977. – 664 p.
4. Kuzlo M.T. Modelling of deformations of natural slope under its drainage /M. T. Kuzlo // Collected scientific articles (branch mechanical engineering, construction) / Polt. nat. techn. un-ty named after Jurija Kondratjuka. Ed. 3(38). Vol 1. – Poltava : PNTU, 2013. – P. 199–207.
5. Serhienko I. V. Mathematical modeling and investigation of processes in heterogeneous environments / I. V. Skopets'kiju, V. S. Deineka. – K.: Scient. notion, 1991. – 432 p.
6. Vlasiuk A.P. Automatic building of conformed and quasiconformed reflections of fourangle areas with the help of computational mesh with „swimming " bonds / A.P. Vlasiuk, V.H. Myhalchuk. – K.: 1989.– 55 p.
7. Kuzlo M.T. Computer program "Modeling of water saturated soil massifs deformations and basis (Shift") / M. T. Kuzlo, I. O. Kushnir // Certificate about registration of author's right on the product № 53884 from 28.02.2014 – K.: State service of intellectual property of Ukraine, 2014.

Стаття надійшла до редакції 24.06.2016 р.