

УДК 514.18

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПРОСТОРОВОГО ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Семків О.М., к.т.н.

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків),

Челомбитько В.Ф., к.т.н.

Харківський національний університет радіоелектроніки (Україна)

*Розглядається вибір значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу просторових пружинних маятників.*

*Ключові слова: просторовий пружинний маятник, рівняння Лагранжа 2-го роду, траєкторія переміщення вантажу.*

**Постановка проблеми.** Математичні просторові пружинні маятники є універсальними моделями для дослідження процесів, описаних певним класом диференціальних рівнянь [1-3]. Ці маятники трактуються як приклад двох лінійних систем, пов'язаних параметрично і нелінійно. Показано, що при відношенні частот 2:1 цих систем відбувається повне перекачування енергії кутових коливань в енергію вертикальних і назад.

Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати під час розрахунку різноманітних конструкцій (висячі мости, вантово-балкові системи, канатні дороги, лінії електропередачі, різні космічні тросові системи для утримання об'єктів, гнучкі шланги, різноманітні антени і т.д.). Модель просторового пружинного маятника знаходить застосування в будівельній механіці для аналізу умов, за яких виявляються ефекти втрати динамічної стійкості надзвукових літаків, швидкохідних кораблів тощо [1,2].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Існує значна кількість публікацій, присвячених математичним просторовим пружинним маятникам [1-3]. Для ілюстрації розв'язків цих рівнянь необхідно вміти будувати просторові форми траєкторій переміщення (центра) вантажу пружинних маятників [3].

Тоді за аналогією розв'язки можна використати і в подібних за змістом задачах. Тому ці дослідження доцільно було б доповнити розробкою способу графічного унаочнення траєкторій коливань вантажу як результату розв'язання диференціальних рівнянь для їх опису з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

**Формулювання цілей статті.** Розробити графічний

комп'ютерний метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу просторових пружинних маятників.

**Основна частина.** Для опису динаміки коливань пружинного маятника в декартових координатах  $Ouvw$  використовуємо [3] систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} u(t) &= - \frac{k (\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2} - L0) u(t)}{m \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2}} ; \\ \frac{d^2}{dt^2} v(t) &= - \frac{k (\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2} - L0) v(t)}{m \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2}} ; \\ \frac{d^2}{dt^2} w(t) &= - \frac{k (\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2} - L0) w(t)}{m \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2 + w(t)^2}} - g . \end{aligned} \quad (1)$$

Тут використано такі позначення:  $u(t)$ ,  $v(t)$  і  $w(t)$  – координати (центра) вантажу пружинного маятника в момент часу  $t$ ;  $L0$  – довжина пружини у ненавантаженому стані;  $k$  – коефіцієнт жорсткості пружини;  $m$  – маса вантажу;  $g = 9,81$ . Точка кріплення маятника знаходиться на початку координат.

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь будемо чисельним методом Рунге-Кутти з умовами:  $u0$ ,  $v0$  і  $w0$  – початкові координати вантажу в «нульовий» момент часу;  $du0$ ,  $dv0$  і  $dw0$  – початкові швидкості маятника у напрямках відповідних координат.

Для визначення значень параметрів  $u0$ ,  $v0$ ,  $w0$ ,  $du0$ ,  $dv0$  і  $dw0$ , які б забезпечили *нехаотичну просторову траєкторію* руху вантажу маятника, застосуємо метод проєкційного фокусування [4]. Для цього чисельним методом із обраними (наприклад) початковими умовами  $u0 = 1$ ;  $du0 = 0$ ;  $v0 = 0$ ;  $w0 = 1.1$ ;  $dw0 = 0$  і з урахуванням значень параметрів  $k = 9$ ;  $m = 1$  і  $L0 = 1$  розв'язуємо систему рівнянь (1) і будуємо зображення інтегральної кривої у фазовому просторі.

Спочатку побудуємо зображення у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$  залежно від певного значення «керуючого» параметра. Як «керуючий» можна обрати будь-який параметр задачі (наприклад,  $dv0$ ) за умови, що всі інші значення параметрів будуть фіксованими. При випадкових значеннях параметрів у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$  утвориться «плутана» інтегральна крива (рис. 1,а). Спроєктуємо її на фазову площину  $\{u, Du\}$ , де також спостерігаємо відповідну «плутану» фазову траєкторію.

У разі зміни значень «керуючого» параметра має змінюватися і характер фазової траєкторії. При певному критичному значенні характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться в «закономірну» криву (рис. 1, б). На фазовій площині

спостерігатиметься ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій. Завдяки цій аналогії запропоноване знаходження критичних значень параметрів названо проєкційним фокусуванням [4].

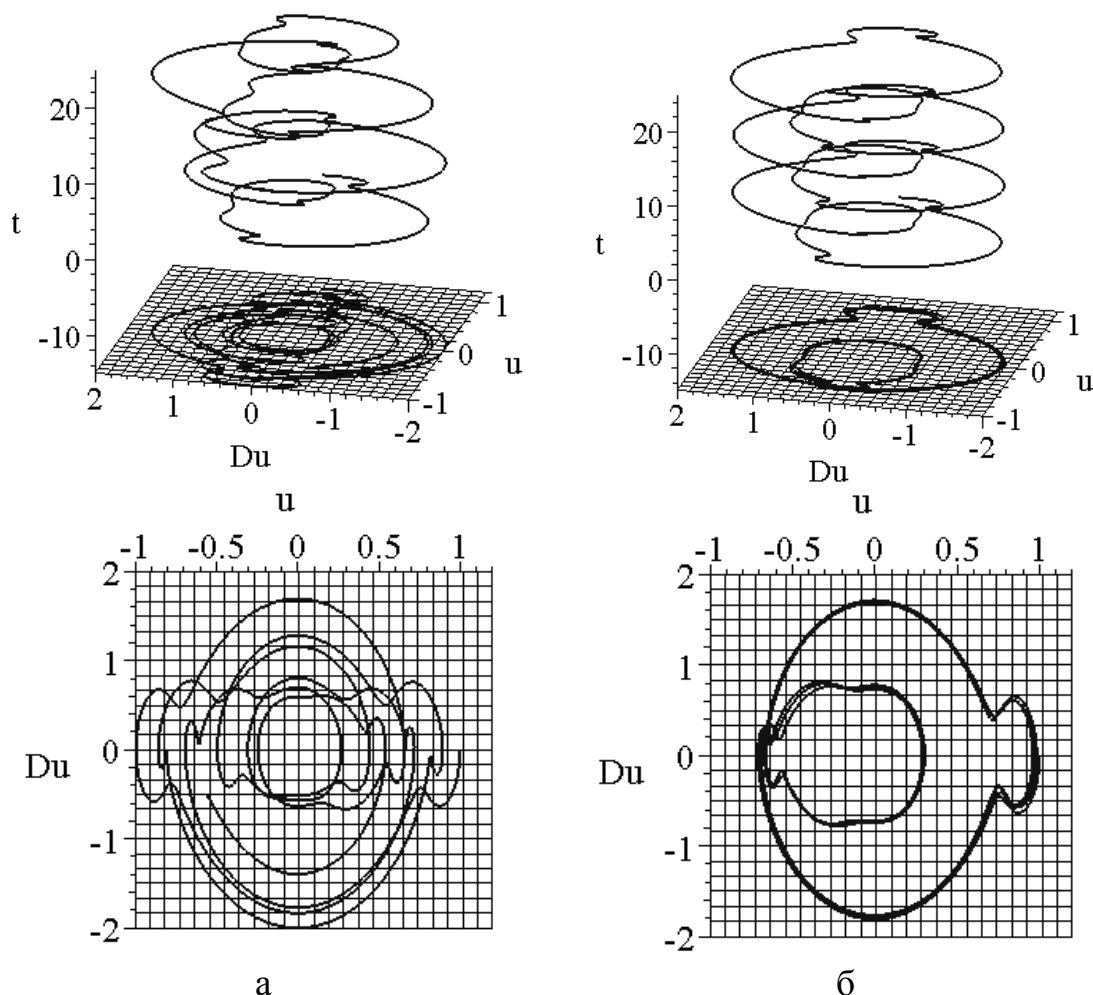


Рис. 1. Фазові траєкторії як проєкції інтегральних кривих:

- а) для довільного значення параметра ( $dv0 = 0,48$ );
- б) для критичного значення параметра ( $dv0 = 0,587$ )

Все це має місце і для побудови зображення інтегральної кривої у фазовому просторі  $\{v, Dv, t\}$ . На рис. 2, а зображено фазові траєкторії як проєкції інтегральних кривих для випадкового значення  $dv0 = 0,48$ , а на рис. 2,б – для критичного значення «керуючого» параметра  $dv0 = 0,587$ .

Урахування значення параметра  $dv0 = 0,587$  у процесі розв'язання системи рівнянь (1) спричинить обчислення координат точок у просторі  $\{u, v, w\}$  (рис. 3), які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії (або близькій до неї).

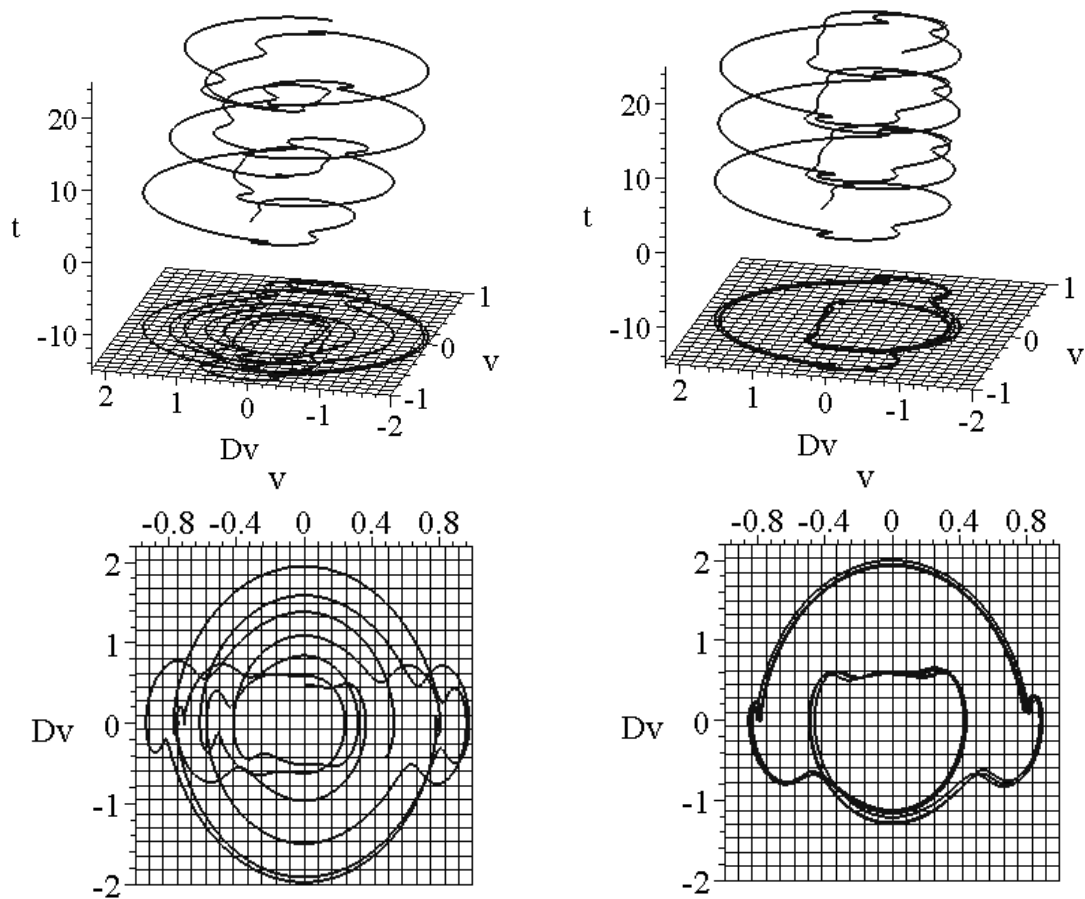


Рис. 2. Фазові траєкторії як проєкції інтегральних кривих:

- а) для довільного значення параметра ( $dv\theta = 0,48$ );  
 б) для критичного значення параметра ( $dv\theta = 0,587$ )

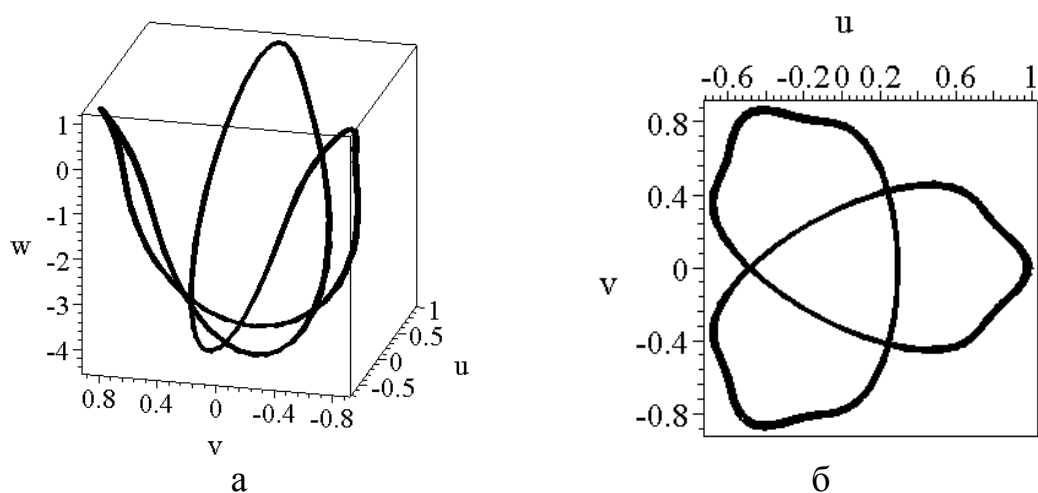


Рис. 3. Просторова траєкторія руху вантажу (а)  
та її проєкція на площину  $Ouv$  (б)

**Висновки.** Розроблений спосіб дозволяє вибрати значення параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу пружинного маятника. Подальші дослідження будуть пов'язані з вибором параметрів для забезпечення необхідної форми траєкторії.

*Література*

1. Булдакова Д.А. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники / Д.А. Булдакова, А.В. Кирюшин // Ученые заметки Тихоокеанского государственного университета. – Хабаровск, 2015. – Том 6. – № 2. – С. 238–243.
2. Бубнович Э.В., Молдагананова А.Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити [Электронный ресурс] / Э.В. Бубнович, А.Г.Молдагананова // Режим доступа: <http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананова%20.pdf>.
3. Xiao O. Dynamics of the Elastic Pendulum. [Электронный ресурс] / O. Xiao, S. Xia // Режим доступа: [http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math\\_485/Midterm\\_Presentations/Elastic\\_Pedulum.pdf](http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/Midterm_Presentations/Elastic_Pedulum.pdf).
4. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника / О.М. Семків // Вісник ХНАДУ/ХНАДУ. – Харків, 2015. – № 71. – С. 36-44.
5. Semkiv O.M. Computer graphics of the oscillation trajectories of 2d spring pendulum weight/ O.M. Semkiv// European Applied Sciences: challenges and solutions. – ORT Publishing: Stuttgart, 2015. –С.63–70.
6. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d-пружинного маятника / О.М. Семкив // VII Международная конференция по научному развитию Евразии.– Вена, 2015.– С. 214-217.

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА**

Семкив О.М. , Челомбитько В.Ф.

*Рассматривается выбор значений параметров для получения нехаотических траекторий колебаний груза пространственных пружинных маятников.*

*Ключевые слова: пространственный пружинный маятник, уравнение Лагранжа 2-го рода, траектория перемещения груза.*

## **GEOMETRICAL DESIGN OF VIBRATIONS SPATIAL SPRING PENDULUM**

O. Semkiv, V. Chelombitko

*The choice of values of parameters is examined for the receipt of unchaotic trajectories of vibrations of load of spatial spring pendulums.*

*Keywords: a spatial spring pendulum, equalization of Lagrange 2th family, trajectory of moving of load.*