УДК 514.18

ІЗОТРОПНІ ФУНДАМЕНТАЛЬНІ СПЛАЙНИ

Аушева Н. М., д.т.н.
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут"

Робота висвітлює спосіб побудови ізотропних фундаментальних сплайнів. Знайдено умови ізотропності для просторового сплайну, що формується на основі чотирьох точок точкового ряду. Наведено приклад розрахованого сплайну та графіки функцій кривини і скруту.

Ключові слова: фундаментальний сплайн, ізотропна крива, умови ізотропності, сплайн Катмалл-Рома.

Постановка проблеми. При побудові необмеженої мінімальної поверхні на основі метода Вейєрштрасса [1], виникає проблема знаходження просторової ізотропної кривої, яка суттєво впливає на результуючу поверхню. При створенні інтерактивного режима користувача доцільно використовувати криві Без'є, які дозволяють керувати формою кривою, але тоді необхідно виконувати додаткові обчислення для розрахунку дотичних. Для уникнення цих обчислень можна застосувати фундаментальні сплайни, що спираються тільки на інформацію з точкового ряду [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Робота [3] висвітлює метод побудови сім'ї необмежених мінімальних поверхонь за допомогою рівняння Вейєрштрасса з напрямною у вигляді ізотропної кривої Без'є 3-го порядку. Знайдено умови ізотропності, представлені у вигляді системи п'яти нелінійних рівнянь. У роботі [4] пропонується застосувати для моделювання плоскої сітки ізотропну криву за годографом Піфагора (PH). Побудова сітки здійснюється на основі конфорної та квізіконформної заміни параметра. Автори статті [5] досліджують модифікацію періодичного В-сплайну з нормалізованою параметризацією для формування кривих з нульовою довжиною. Точки характеристичного многокутника визначаються у комплексному вигляді. Визначені умови для формування ізотропних кривих.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є розробка способу конструювання ізотропної кривої на основі рівняння фундаментального сплайну.

Основна частина. Побудуємо криву нульової довжини на основі рівняння фундаментального сплайну [2]. Ділянка фундаментального сплайну задається положенням чотирьох точок заданого точкового каркасу, а дотичні в кожній точці обчислюються за координатами двох сусідніх точок. Нехай фундаментальний сплайн задається у вигляді:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= [(\mathbf{r}_{j+1}-\mathbf{r}_{j-1})(t^3-2t^2+t)+(\mathbf{r}_{j+2}-\mathbf{r}_j)(t^3-t^2)]s+\\&+[\mathbf{r}_j(2t^3-3t^2+1)+\mathbf{r}_{j+1}(-2t^3+3t^2)],\end{aligned} \tag{1}$$

де $\mathbf{r}_{j-1}$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_{j+1}$, $\mathbf{r}_{j+2}$ - точки заданого точкового каркасу (рис.1), $s=\frac{1-u}{2}$, u - параметр натягу сплайну. Якщо $u=0$, маємо різновид фундаментального сплайну, а саме сплайн Катмалл-Рома (Catmull-Rom slines).

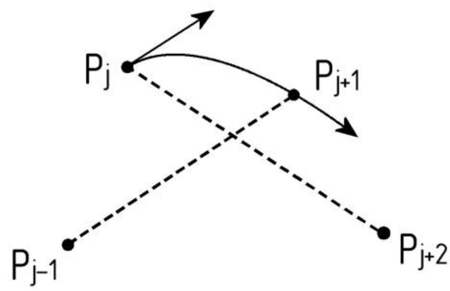


Рис. 1. Формування фундаментального сплайну за чотирма точками

Візьмемо похідну від виразу (1):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (\mathbf{r}_{j+1}-\mathbf{r}_{j-1})s+2t[-2s(\mathbf{r}_{j+1}-\mathbf{r}_{j-1})-s(\mathbf{r}_{j+2}-\mathbf{r}_j)+3(\mathbf{r}_{j+1}-\\&-\mathbf{r}_j)]+3t^2[s(\mathbf{r}_{j+1}-\mathbf{r}_{j-1})+s(\mathbf{r}_{j+2}-\mathbf{r}_j)-2(\mathbf{r}_{j+1}-\mathbf{r}_j)].\end{aligned} \tag{2}$$

Підставимо похідну в умову для кривих нульової довжини:

$$x(t)'^2+y(t)'^2+z(t)'^2=0. \tag{3}$$

Умова (3) буде виконуватись та не залежати від значення параметра, якщо коефіцієнти при всіх степенях t дорівнюють 0. Для того, щоб спростити вирази, введемо додаткову умову:

$$\sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)^2=0. \tag{4}$$

Одержимо наступні коефіцієнти:

- коефіцієнт при t^0 :

$$\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})^2=0, \tag{5}$$

- коефіцієнт при t^1 :

$$-s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+2}-r_j)+3\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+1}-r_j)=0, \tag{6}$$

- коефіцієнт при t^2 :

$$18\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_j)^2-12s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)(r_{j+1}-r_j)+ \\ s^2\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+2}-r_j)=0 , \tag{7}$$

- коефіцієнт при t^3 :

$$-s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+2}-r_j)+3\sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)(r_{j+1}-r_j)=0, \tag{8}$$

- коефіцієнт при t^4 :

$$4\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_j)^2-s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)(r_{j+1}-r_j)- \\ s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+1}-r_j)=0 , \tag{9}$$

Підставимо вираз (6) у (8) та будемо мати:

$$\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+1}-r_j)=\sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)(r_{j+1}-r_j). \tag{10}$$

Якщо одержані залежності (9) та (10) підставити в умову (7) тоді отримаємо вираз, який дорівнюватиме або (8), або (6). У результаті виконаних спрощень умовою ізотропності буде:

$$\begin{cases} \sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})^2=0, \\ \sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)^2=0, \\ -s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+2}-r_j)+3\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+1}-r_j)=0, \\ \sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+1}-r_j)=\sum_{r=x,y,z}(r_{j+2}-r_j)(r_{j+1}-r_j), \\ 2\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_j)^2-s\sum_{r=x,y,z}(r_{j+1}-r_{j-1})(r_{j+1}-r_j)=0. \end{cases} \tag{11}$$

Приклад. Побудуємо одну дійсну та одну уявну криву з сім'ї ізотропних кривих, якщо задано значення: $x_{j-1}=1+2i$, $x_j=3+3i$, $x_{j+1}=5+4i$, $y_{j-1}=1-2i$, $y_i=3+i$, $y_{j+1}=3-1i$, $z_{j-1}=4+1i$ та параметр натягу $u=-0.8$. Знайдемо координати однієї ізотропної кривої за умовами (11): $z_{j+1}=1.764+5.472i$, $z_j=4.37+3.702i$, $x_{j+2}=11.861+9.389i$, $y_{j+2}=1.374-8.581i$, $z_{j+2}=-5.747+10.837i$. Довжина кривої у комплексному просторі дорівнює 0, а довжини дійсної та уявної кривих дорівнюють одна одній $R_{kr\,\mathrm{Re}}=R_{kr\,\mathrm{Im}}=3.54$. На рис.2. відображено дійсну криву, на рис.3. – графіки кривини та скруту для дійсної та уявної частини. Як бачимо, графіки скруту збігаються.

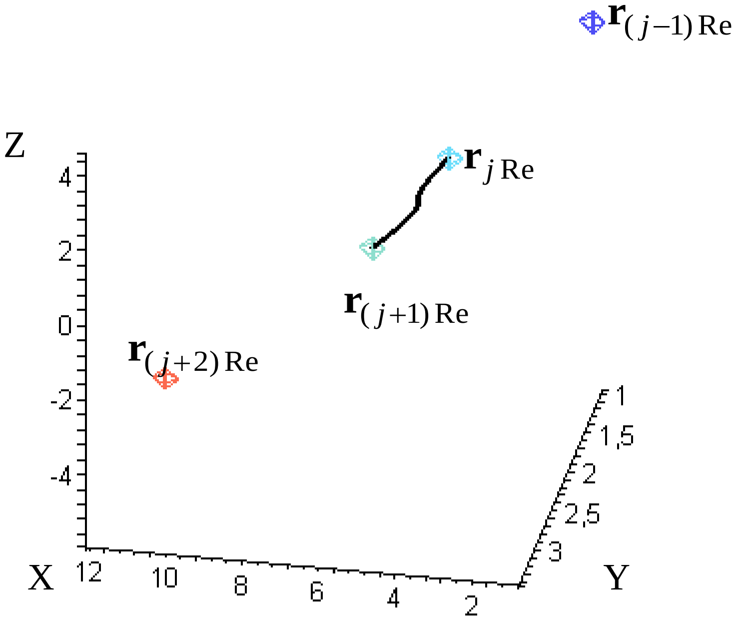
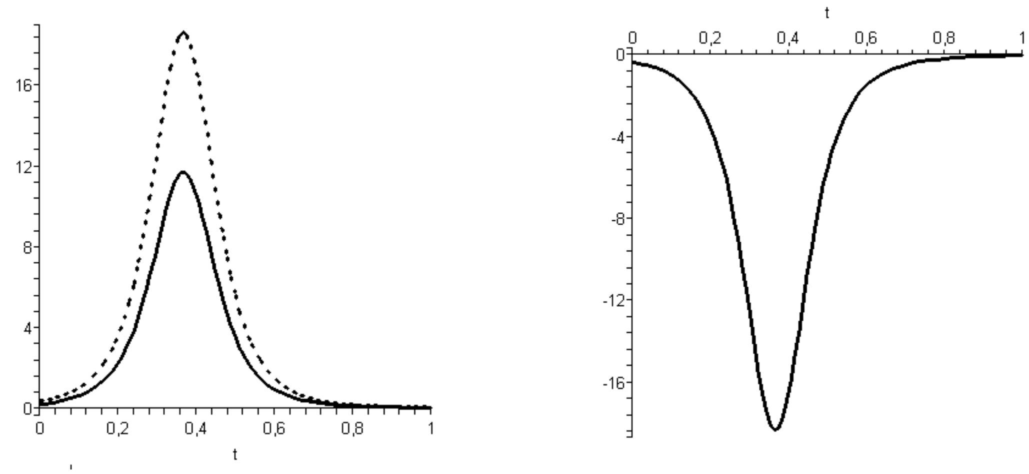


Рис. 2. Дійсна частина ізотропного просторового фундаментального сплайну



а) б)

Рис.3. Графіки функцій а) кривини, б) скруту для дійсної та ізотропної частин фундаментального сплайну

Висновки. В результаті виконаних досліджень було знайдено умови ізотропності для фундаментального сплайну. Було побудовано дійсну частину ізотропного сплайну та знайдено графіки кривини та скруту. Графіки скруту співпадають для дійсної та уявної частин. Подальші дослідження пов’язані з моделюванням чотирикутних порцій на основі ізотропних кривих.

Література

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна / В. Бляшке. – Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. – 330с.
2. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт OpenGl / Д. Херн, Паулин М. Бейкер, 3–е издание.: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1168 с.
3. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без’є / Н.М.Аушева // Міжвідом. наук.-техн. збірник „Прикл. геометрія та інженерна графіка”. – Вип. 88. – К.: КНУБА, 2011. – С.57-61.
4. Аушева Н. М. Моделювання плоских сіток на основі ізотропних кривих за годографом Піфагора/ Н.М. Аушева // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Вип.48. – Луцьк:ЛНТУ, 2015. – С.13-17.
5. Аушева Н. М. Моделювання плоских сіток на основі ізотропних В-сплайнів/ Н.М. Аушева, А.Л. Гурін // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Вип.3 (54). – Херсон: ХНТУ, 2015. – С.528-533.

ИЗОТРОПНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Аушева Н.Н.

Работа посвящена разработке способа построения изотропных фундаментальных сплайнов. Найдены условия изотропности для пространственного сплайна, который формируется на основе четырех точек точечного ряда. Приведен пример рассчитанного сплайна и графики функций кривизны и кручения.

Ключевые слова: фундаментальный сплайн, изотропная кривая, условия изотропности, сплайн Катмалл-Рома.

THE FUNDAMENTAL ISOTROPIC SPLINES

N. Ausheva

In the paper is highlighted the way to build the fundamental isotropic splines. The conditions of isotropy for spatial spline based on four points of point row are found. The example of calculated spline and graphics of curvature and twisting functions are given.

Keywords: fundamental spline, isotropic curve, isotropy conditions, Catmull-Rom spline.