УДК 519.85

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЧЁТКОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЁТКОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ ПРИ ЧЁТКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Барышевский С.О., к.ф.-м.н.
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого (Украина)

Рассмотрен графоаналитический метод решения задач нечёткого параметрического программирования с нечёткой целевой функцией при чётко заданных ограничениях на основе свойств двойственных задач и теорем двойственности.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткие точки, нечеткая прямая, двойственная задача, нечеткая система линейных алгебраических уравнений.

Постановка проблемы. Человек более способен усматривать свойства и особенности, характерные для геометрических объектов, чем выводить те же свойства из совокупности формул. Ему также легче преобразовывать геометрические фигуры, чем осуществлять последовательность аналитических преобразований некоторых формул. Поэтому для более чёткого понимания принципов решения задач параметрического программирования (ПП) [1] и нечёткого параметрического программирования (НПП) [2] аналитическими средствами важно хорошо усвоить графические методы их решения, которые в свою очередь являются наглядными и довольно простыми методами решения задач ПП и НПП, содержащие не более трёх переменных.

Анализ последних исследований и публикаций. Решение задач принятия решений (ПР) при нечёткой информации и модели ПР в этих условиях основывается на аппарате нечёткой математики [3] и нечёткой логики [4]. В работе [5] изложены аналитические методы решения задач линейного и выпуклого программирования. Основное внимание уделено проблемам ПР при нечёткой и недостоверной информации. Описаны задачи ПР на основе лингвистических переменных, нечёткого математического программирования и методы их решения в основном без геометрической интерпретации. В работе[3] особое внимание уделяется прикладным задачам нечёткой математики. Рассматриваются нечёткие системы линейных алгебраических уравнений, элементы нечёткой теории вероятностей и теория ПР, аналитические методы решения нечётких задач математического программирования, но, как и в [5], в основном без геометрической интерпретации.

В работе [2] проведено рассмотрение графоаналитических методов решения задач НПП с чёткой целевой функцией при нечётко заданных ограничениях. Постановленная в данной работе задача, по нашему мнению, может быть сведена к решению задачи, которая рассмотрена в работе [2] путём применения свойств двойственных задач и теорем двойственности.

Формулирование целей статьи. В данной работе предлагается рассмотрение графоаналитического метода решения задач нечёткого параметрического программирования с нечёткой целевой функцией при чётко заданных ограничениях на основе свойств двойственных задач и теорем двойственности.

Основная часть. Практически графическим методом решают задачи НПП с двумя переменными, представленные в неканоническом виде или сводящиеся к ним. Так как число ограничений одной двойственной задачи равно числу переменных другой двойственной задачи, то в дальнейшем целесообразно проводить рассмотрение системы, содержащей два ограничения.

Рассмотрим такую задачу НПП: найти экстремум нечёткой целевой функции

$$Z(\bar{y}) = a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + \cdots + a_{n3}y_n \to (max, min). \tag{1}$$

Где параметры $a_{i3}, i = \overline{1, n}$ целевой функции (1) являются гауссовыми нечёткими числами с функциями принадлежности:

$$\mu(a_{i3}) = \exp\left\{-\frac{(a_{i3} - a_{i3}^0)^2}{2\sigma_i^2}\right\}, \tag{2}$$

где a_{i3}^0 – модальное значение (ядра) нечётких чисел a_{i3}, σ_i- коэффициенты концентрации. При чётких ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \geq c_1 + d_1 t \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \geq c_2 + d_2 t \end{cases}, \tag{3}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Здесь свободные члены являются линейными функциями параметра $t, t \in [\alpha, \beta]$.

Найдём двойственную задачу для задачи (1)-(3) используя следующие свойства двойственности[1]:

1) число неизвестных одной задачи равно числу ограничений другой задачи;
2) матрица коэффициентов системы ограничений получается одна из другой путём транспонирования;

3) неравенства в системах ограничений имеют противоположный смысл;

4) свободные члены системы ограничений одной из задач становятся коэффициентами целевой функции другой задачи, коэффициенты превращаются в свободные члены системы ограничений;

5) целевые функции в задачах имеют противоположный смысл;

6) (первая теорема двойственности) если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет. Причём экстремальные значения целевых функций совпадают.

Найти экстремум чёткой целевой функции z:

$$z_t = (c_1 + d_1 t)x_1 + (c_2 + d_2 t)x_2 \rightarrow (min, max), \tag{4}$$

в которой коэффициенты при переменных являются линейными функциями параметра $t, t \in [\alpha, \beta]$. При нечётких ограничениях:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq a_{23} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \leq b_n; \end{gathered} \tag{5}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \tag{6}$$

В данном случае определить оптимальный план нельзя, так как он может изменяться при различных параметрах t. Поэтому задачу можно сформулировать следующим образом: требуется разбить отрезок $[\alpha, \beta]$ на конечное число интегралов, в которых целевая функция z_t достигает максимума (минимума) в одной и той же нечёткой вершине нечёткого многогранника решений. Проведем геометрическую интерпретацию задачи НПП по аналогии с геометрической интерпретацией задачи чёткого параметрического программирования, проведенной в работе [1,с.376-378]. Полагая $t = \alpha$ получаем обычную задачу нечёткого линейного программирования.

Решение такой задачи НЛП начинают с построения области допустимых решений (ОДР). С графической точки зрения такая область представляет собой пересечение нечётких полуплоскостей (или нечётких прямых), которые определяются системой (2). Проблема заключается в том, что до сих пор не существует общепринятых способов изображения и построения нечётких точек и нечётких прямых, проходящих через эти точки.

Нечёткое множество можно рассматривать как объединение его составляющих одноточечных нечётких множеств, носители которых состоят из одной точки. Под нечёткой точкой будем понимать множество точек пространства, которое представляет собой объединение одноточечных нечётких множеств в окрестности ядра нечёткой точки. Под нечёткой прямой, которая проходит через точку

А, будем подразумевать цилиндрическое множество $\widetilde{\mathrm{A}}$ (пучок прямых) с основанием А и с функцией принадлежности $\mu\breve{\mathrm{A}}(x, y) = \mu A(x)$, где μА – функция принадлежности нечёткой точки А. Нечёткие точки, нечёткие прямые и отрезки будем представлять их соответствующими ядрами, а размытость этих прямых и отрезков определяется их коэффициентами.

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат x_1Ox_2. Тогда каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $(x_1; x_2)$, называемых координатами этой точки. Будем считать, что если хотя бы одна из координат точки M является нечётким числом, то точка M является нечёткой точкой.

Каждому линейному нечёткому уравнению системы (5)

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 = a_{n,n+1} \tag{7}$$

на плоскости соответствует нечёткая прямая. Чтобы по уравнению (7) построить искомую прямую, достаточно на плоскости найти две любые нечёткие точки, которые удовлетворяют уравнению (7), и провести через них нечёткую прямую (рис. 1).

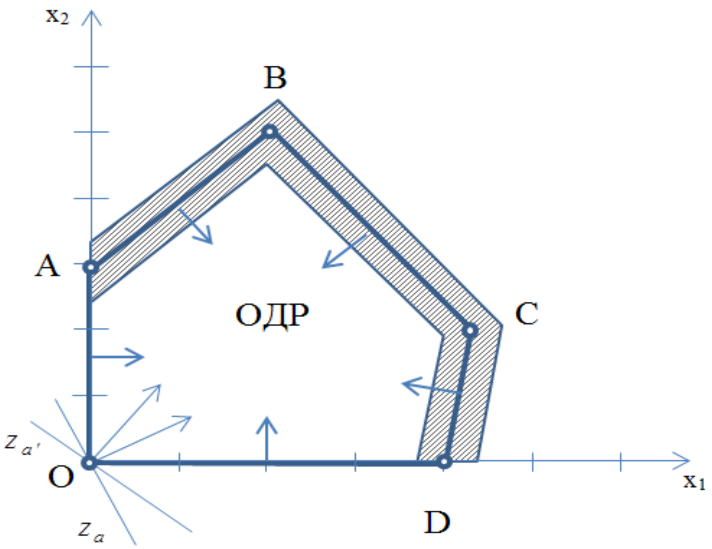

Рис.1. Геометрическая интерпретация задачи

На рис. 1 представлено графическое изображение нечёткой области допустимых решений и линий уровня чёткой целевой функции. Искомые оптимальные решения, которые графически соответствуют координатам экстремальных нечётких точек, можно найти путём совместного решения системы двух нечётких линейных уравнений, которые отвечают нечётким граничным прямым, пересекающимися в этой нечёткой точке. В общем случае требуется найти нечёткое решение нечёткой системы линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) [3].

Выразим решение НСЛАУ (2) через параметры задачи по формулам Крамера:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A},\ k=1,2,...,m, \tag{8}$$

где det A – определитель матрицы $A = (a_{ij}), \det A_k$- определитель матрицы, который получаем при замене k-го столбца матрицы А столбцов свободных членов $(a_{n,n+1}), i = \overline{1,n}$ [3].

Рассмотрим случай, когда нечёткими являются только свободные члены $a_{n,n+1}$. Значения переменных x_k, которые вычисляются по формуле (5), запишем, раскрывая определители $\det A_k$по элементам k-го столбца:

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_{ik} a_{n,n+1}}{\det A} = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_{ik}}{\det A} a_{n,n+1} = \sum_{i=1}^{m} d_{ik} a_{n,n+1}, \tag{9}$$

где: $d_{ik} = \frac{A_{ik}}{\det A}, A_{ik}$- адъюнкта элемента a_{ik} матрицы A, k=1,2,...,m.

Теперь можно получить функции принадлежности компонентов нечёткого решения задачи [3]:

$$\mu(x_k) = \mu\left(\sum_{n=1}^{m} d_{ik} a_{n,n+1}\right) = \exp\left\{-\frac{(x_k - m_k)^2}{2D_k}\right\},$$

$$m_k = \sum_{n=1}^{m} d_{ik} a_{n,n+1}^{(0)}, \tag{10}$$

$$D_k = \sum_{n=1}^{m} d_{ik}^2 \sigma_i^2,\ k=1,2,...,m.$$

Выводы. В данной работе рассмотрен графоаналитический метод решения задач нечёткого параметрического программирования с нечёткой целевой функцией при чётко заданных ограничениях на основе свойств двойственных задач и теорем двойственности. В полученной двойственной задаче целевая функция является чёткой, а линейные ограничения – нечёткими. Изложен достаточно простой графоаналитический метод определения нечётких экстремальных точек путём нахождения нечёткого решения НСЛАУ.

Литература

1. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. Пособие [2-е изд., перераб. и доп.] / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 432 с.
2. Андреева Е.В. Графические методы решения задач нечеткого параметрического программирования с четкой целевой функцией при нечетких ограничениях. / Е. В. Андреева, С. О. Барышевский. – Вестник магистратуры. 2015. – № 12(51). – Том 1. – С. 5-9.
3. Раскин Л. Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.

4. Новак В. Математические принципы нечеткой логики [пер. с англ.: под ред. А .Н. Аверкина] / В. Новак, И. Перфильева, И. Мочкорж. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация / Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1991. – 191с.

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЧІТКОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З НЕЧІТКОЮ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЄЮ ПРИ ЧІТКИХ ОБМЕЖЕНЯХ

Баришевський С.О.

Розглянуто графоаналітичний метод розв'язання завдань нечіткого параметричного програмування з нечіткою цільовою функцією при чітко заданих обмеженнях на основі властивостей двоїстих задач і теорем двоїстості.

Ключові слова: нечітка множина, нечіткі точки, нечітка пряма, двоїста задача, нечітка система лінійних алгебраїчних рівнянь.

GRAPHIC-ANALYTICAL METHOD OF SOLVING THE PROBLEM FUZZY PARAMETRIC PROGRAMMING WITH FUZZY OBJECTIVE FUNCTION WITH CLEAR LIMITATIONS

Barishevskiy S.

Considered graphic-analytical method of solving problems fuzzy parametric programming with fuzzy objective function with clearly defined restrictions based on the properties of the dual problem and duality theorems.

Keywords: fuzzy set, fuzzy point, fuzzy straight dual problem, fuzzy system of linear algebraic equations.