

Пустюльга С.І., Придюк В.М., Самостян В.Р.
Луцький національний технічний університет

МЕТОД ПРІОРИТЕТІВ ФОРМУВАННЯ ДОПУСТИМИХ ОПОРНИХ ПЛАНІВ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ДЛЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

У роботі розроблено метод пріоритетів формування близьких до оптимальних, допустимих опорних планів перевезень для транспортних задач. Цей метод дозволяє комплексно враховувати як вартість перевезень одиниці вантажу, так і можливості джерел постачання та споживання вантажів, що перевозяться. Застосування методу пріоритетів суттєво скорочує кількість ітерацій при пошуку оптимального плану перевезень методом потенціалів. На основі запропонованих алгоритмів в середовищі Mathcad 15 розроблено програму автоматичної генерації близьких до оптимальних, допустимих опорних планів.

Ключові слова: метод пріоритетів, допустимий опорний план, транспортна задача, оптимальний план перевезень.

Постановка проблеми. Аналіз сучасного стану автомобільних вантажних перевезень показує, що на більшості промислових підприємств України витрати, пов'язані з транспортуванням матеріальних ресурсів, як правило, не плануються і не розраховуються [4]. Розрахунок ефективності роботи проводиться за фактичними витратами транспортного підрозділу підприємства. Ця обставина не дозволяє заздалегідь оцінити витрати при плануванні тих чи інших перевезень. Для вирішення вказаної проблеми необхідна розробка простих, доступних алгоритмів, що на інженерному рівні дозволять оптимізувати витрати будь-якого підприємства на транспортну роботу. Основою при цьому може стати математична модель так званої "транспортної задачі" [1].

Під назвою "транспортна задача" об'єднується широке коло математичних задач лінійного програмування, що описуються єдиною моделлю [7]. Класична транспортна задача - логістична задача про найбільш оптимальний, з економічної точки зору, план перевезень вантажів із пунктів виробництва у пункти споживання. Величезна кількість можливих варіантів утруднює отримання оптимального плану перевезень експертним шляхом, тому застосування математичних методів, обчислювальних алгоритмів у плануванні перевезень дає чималий економічний ефект.

Аналіз останніх досліджень. Транспортна задача може бути розв'язана класичним симплекс-методом, однак матриця системи обмежень задачі настільки своєрідна, що для її розв'язання розроблено ряд спеціальних методів. Ці методи, як і симплекс-метод, дозволяють знайти початкове опорне рішення, а потім покращуючи його, отримати оптимальне рішення для конкретного випадку [3,6].

Транспортна задача може розв'язуватись із обмеженнями та без обмежень і бути представлена за допомогою матриць або графів. Класичне формулювання транспортної задачі полягає у наступному.

Є i джерел однорідних або взаємозамінних вантажів і j пунктів їх споживання. Задано об'єми вантажів (потужність) кожного із джерел і розміри попиту кожного споживача. Відомі також витрати, пов'язані із переміщенням одиниці вантажу із джерела i в пункт споживання j . Вимагається скласти план перевезення вантажів із джерел у пункти споживання, при яких загальні витрати, пов'язані із цими перевезеннями будуть мінімальними.

Таким чином, вхідними даними для транспортної задачі є: вектори потужності джерел і пунктів споживання та матриця витрат на перевезення одиниці вантажу із джерел у пункти споживання.

Побудуємо математичну модель сформульованої задачі. Позначимо через $x_{i,j}$ план перевезення вантажів. Тоді сумарні витрати, пов'язані із перевезеннями із усіх джерел в усі пункти споживання, можна подати у вигляді:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} . \quad (1)$$

План $x_{i,j}$ називатиметься оптимальним, якщо він, серед усіх допустимих планів, призводить до мінімальної сумарної вартості перевезень (1).

Найбільш відомими методами знаходження допустимих опорних планів є: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента, метод подвійної переваги і метод апроксимації Фогеля [5,8].

У загальному випадку система обмежень для транспортної задачі повинна містити $n + m - 1$ лінійно незалежних рівнянь, тому невироджений опорний план будь-якої транспортної задачі відповідно містить $n + m - 1$ додатних компонент або перевезень.

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді таблиці (матриці), то клітини, у яких знаходяться відмінні від нуля перевезення, називаються зайнятими, а всі інші - незайнятими. Зайняті клітини відповідають базисним невідомим і для невиродженого опорного плану їх кількість теж рівна $n + m - 1$. "Опорність" плану, при записі умов транспортної задачі у вигляді таблиці, полягає у його ациклічності, тобто в таблиці не можна побудувати замкнутий цикл, усі вершини якого лежать в зайнятих клітинах. Циклом називається набір клітин, у якому дві і тільки дві сусідні клітини розташовані в одному стовпці або одному рядку таблиці, причому остання клітина знаходиться у тому ж рядку або стовпці, що і перша [2]. Побудову циклів починають із будь-якої зайнятої клітини і переходять по стовпцю (рядку) до іншої зайнятої клітини, у якій виконують поворот під прямим кутом і рухаються по рядку (стовпцю) до наступної зайнятої клітини і т. д., намагаючись повернутися до початкової клітини. Якщо таке повернення можливе, то отриманий цикл, а значить і план не є опорним. Клітини, у яких відбувається поворот під прямим кутом, визначають вершини циклу. Будь-який опорний допустимий план транспортної задачі, що містить більше $n + m - 1$ зайнятих клітин, не є опорним, оскільки йому відповідає лінійно залежна система векторів. При такому плані у таблиці завжди можна побудувати замкнутий цикл.

Усі існуючі методи знаходження допустимих опорних планів мають свої переваги і недоліки. А використання угорського методу, дельта-методу, методу потенціалів дає можливість із різною швидкістю і затратами часу знайти, за знайденим допустимим опорним планом, оптимальний план організації перевезень.

Застосування угорського методу, дельта-методу, методу потенціалів для пошуку оптимального плану перевезень із 10-20 постачальниками і 15-20 споживачами вимагає значного часу і трудомісткості обчислень. Це відбувається тому, що існуючі методи складання первинного допустимого опорного плану дозволяють отримати план перевезень, який далекий від оптимального. Тому розробка нових більш ефективних методів формування допустимих опорних планів перевезень, які у комбінації із методами знаходження оптимального плану перевезень суттєво зменшать кількість кроків ітерації, а значить і об'ємів обчислень, є достатньо актуальним завданням.

Аналіз уже відомих методів побудови допустимих опорних планів показав, що метод північно-західного кута зовсім не враховує вартість перевезень, метод мінімального елемента враховує вартість перевезень тільки по стрічкам або стовпцям базових матриць, метод подвійної переваги та метод Фогеля враховує вартість перевезень тільки опосередковано, інші методи також не дають результатів близьких до оптимальних.

Мета роботи. Розробити новий підхід до формування допустимих опорних планів, який враховував би як вартість перевезень, так і можливості джерел постачання та споживання вантажів, що перевозяться, скоротив би кількість ітерацій, а значить і час пошуку оптимального плану перевезень відомими методами. Створити у середовищі **Mathcad 15** програму автоматичної генерації близьких до оптимальних, допустимих опорних планів транспортної задачі.

Основна частина. Пропонуємо новий підхід до формування близьких до оптимальних, допустимих опорних планів транспортної задачі, який ми назвали методом пріоритетів. Суть запропонованого методу полягає у наступному.

Нехай однорідний вантаж зосереджений у m постачальників в об'ємах $A_i = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_m)$. Даний вантаж необхідно перевезти n споживачам в об'ємах $B_j = (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n)$. Відомі ціни на перевезення одиниці вантажу від i постачальника до j споживача:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Необхідно скласти таку матрицю x_{ij} для опорного допустимого плану перевезень

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

щоб сумарна вартість всіх перевезень (1) була максимально наближеною до мінімальної.

Вихідні дані транспортної задачі представимо у вигляді:

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ a_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ a_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \\ & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Алгоритм формування близького до оптимального, допустимого опорного плану перевезень, вибудовує систему черговості пріоритетів для визначення елементів x_{ij} .

На першому етапі, із множини значень векторів $A_i = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_m)$ та $B_j = (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n)$ визначається максимальне $p_k = \max(a_m, b_n)$.

В залежності від того чи максимальне значення p_k пов'язане із запасами постачальника, чи із потребами споживача, на кожному із етапів пріоритетності шукається або матриця стрічка коефіцієнтів ефективності перевезень від постачальника $a_m - k_{mj} = \left(\frac{b_1}{c_{m1}}; \frac{b_2}{c_{m2}}; \frac{b_3}{c_{m3}}; \dots \frac{b_n}{c_{mj}} \right)$, або

матриця стовпець коефіцієнтів ефективності перевезень вантажу до споживачів $b_n - k_{in} = \left(\frac{a_1}{c_{1n}}; \frac{a_2}{c_{2n}}; \frac{a_3}{c_{3n}}; \dots \frac{a_m}{c_{in}} \right)$, із значень яких вибирається $\max k_{nm}$, за яким у план перевезень вписується значення x_{nm} необхідного об'єму вантажів для постачання або споживання.

Рухаючись поступово у бік зменшення пріоритетів - отримуємо близький до оптимального, допустимий опорний план перевезень x_{ij} .

Для перевірки функціонування запропонованого алгоритму формування близького до оптимального, допустимого опорного плану перевезень сформуємо наступне завдання.

На полях 4 фермерських господарств, які є постачальниками, знаходиться зібраний у кагати цукровий буряк в об'ємах $A_4 = (200; 300; 100; 250)$ тон. Даний вантаж необхідно вивезти на 5 цукрових заводів, що є споживачами, автопоїздами вантажопідйомністю 25 тон в об'ємах $B_5 = (200; 200; 100; 100; 250)$ тон. Відомі ціни на перевезення однієї тони вантажу (в умовних один.) від кожного із постачальників до кожного із споживачів, які представлені у вигляді матриці:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 6 & 4 & 4 \\ 22 & 16 & 24 & 32 & 26 \\ 20 & 14 & 8 & 2 & 8 \\ 4 & 14 & 20 & 12 & 22 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний план організації перевезень даного вантажу для фірми перевізника. Відповідно до розробленого алгоритму представимо вихідні дані транспортної задачі у вигляді:

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} 200 & 16 & 10 & 6 & 4 & 4 \\ 300 & 22 & 16 & 24 & 32 & 26 \\ 100 & 20 & 14 & 8 & 2 & 8 \\ 250 & 4 & 14 & 20 & 12 & 22 \\ & 200 & 200 & 100 & 100 & 250 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\sum A_4 = \sum B_5 = 850$ - транспортна задача є збалансованою, а близький до оптимального, допустимий опорний план організації перевезень x_{ij} шукається, з використанням методу пріоритетів, за наступною схемою.

1 пріоритет $p_1 = \max(a_m, b_n) = a_2 = 300$, вектор коефіцієнтів ефективності перевезень від постачальника $a_2 - k_{2n} = (9.1; 12.5; 4.2; 3.13; 9.6)$. $\max k_{22} = 12.5$, $x_{22} = 200$.

$$x_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 200 & x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 100^1 & x_{21} & 200 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 100 & x_{31} & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 250 & x_{41} & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ & 200 & 0^1 & 100 & 100 & 250 \end{pmatrix}.$$

2 пріоритет $p_2 = a_4 = 250$, вектор коефіцієнтів ефективності перевезень від постачальника $a_4 - k_{4n} = (50; \infty; 5; 8.3; 11.4)$. $\max k_{41} = 50$, $x_{41} = 200$.

$$x_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 100^1 & 0 & 200 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 100 & 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 50^2 & 200 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ & 0^2 & 0^1 & 100 & 100 & 250 \end{pmatrix}.$$

3 пріоритет $p_3 = b_5 = 250$, вектор коефіцієнтів ефективності перевезень до споживача $b_5 - k_{m5} = (50; 3.8; 12.5; 2.3)$. $\max k_{15} = 50$, $x_{15} = 200$.

$$x_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 100^1 & 0 & 200 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 100 & 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 50^2 & 200 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ & 0^2 & 0^1 & 100 & 100 & 50^3 \end{pmatrix}.$$

4 пріоритет $p_4 = a_3 = 100$, вектор коефіцієнтів ефективності перевезень від постачальника $a_3 - k_{3n} = (\infty; \infty; 12.5; 50; 12.5)$. $\max k_{34} = 50$, $x_{34} = 100$.

$$x_{ij}^4 = \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 100^1 & 0 & 200 & x_{23} & 0 & x_{25} \\ 0^4 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 50^2 & 200 & 0 & x_{43} & 0 & x_{45} \\ & 0^2 & 0^1 & 100 & 0^4 & 50^3 \end{pmatrix}.$$

5 пріоритет $p_5 = a_2, b_3 = 100$, $x_{23} = 50$, $x_{25} = 50$, $x_{43} = 50$.

$$x_{ij}^5 = \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0^{1.5} & 0 & 200 & 50 & 0 & 50 \\ 0^4 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0^{2.5} & 200 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ & 0^2 & 0^1 & 0^5 & 0^4 & 0^{3.5} \end{pmatrix}.$$

Вартість отриманого допустимого опорного плану перевезень складає $F = 8500$ од. Він настільки близький до оптимального, що дозволяє отримати остаточний план перевезень за допомогою методу потенціалів уже на першій ітерації перерозподілу потенціалів постачальників та споживачів. При цьому оптимальний план перевезень має вигляд:

$$x_{ij}^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де сумарна вартість транспортної роботи складатиме $F^{opt} = 8300$ од.

Висновок. У роботі розроблено метод пріоритетів формування близьких до оптимальних, допустимих опорних планів перевезень для транспортної задачі. Цей метод дозволяє комплексно враховувати як вартість перевезень одиниці вантажу, так і можливості джерел постачання та споживання вантажів, що перевозяться. Застосування методу пріоритетів суттєво скорочує кількість ітерацій при пошуку оптимального плану перевезень методом потенціалів. На основі запропонованих алгоритмів в середовищі **Mathcad 15** розроблено програму автоматичної генерації близьких до оптимальних, допустимих опорних планів.

1. Боборькин В.А. Математические методы решения транспортных задач. Л.: СЗПИ, 1986.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. - М.: Радио и связь, 1988.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1986.
4. Рейнов Ю.И. Математические модели и методы в экономике. СПб.: ЮТАС, 2009.
5. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980.
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. - М.: Мир, 1985.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. М.: ЮРАЙТ, 2010.
8. Ногин В.Д. Методы оптимальных решений. СПб.: ЮТАС, 2006.

REFERENCES

1. Boboryikin, V.A. (1986). *Matematicheskie metodyi resheniya transportnykh zadach*. L.: SZPI,.
2. Bandi, B. (1988). *Metodyi optimizatsii. Vvodnyiy kurs*. - M.: Radio i svyaz,
3. Akulich, I.L. (1986). *Matematicheskoe programmirovaniye v primerakh i zadachah*. - M.: Vysshaya shkola.
4. Reynov, Yu.I. (2009). *Matematicheskie modeli i metodyi v ekonomike*. SPb.: YuTAS,
5. Kuznetsov, Yu., Kuzubov, V., Voloschenko, A. (1980). *Matematicheskoe programmirovaniye*. Moscow.
6. Gill, F., Myurey, U., Rayt, M. (1985). *Prakticheskaya optimizatsiya*. Moscow.
7. Kremer, N., Putko, B., Trishin, I., Fridman, M. (2010). *Issledovaniye operatsiy v ekonomike*. Moscow.
8. Nogin, V.D. (2006). *Metodyi optimalnykh resheniy*. St. Petersburg.

Пустюльга С.І., Придюк В.М., Самостян В.Р. Метод приоритетов формирования допустимых опорных планов перевозок в транспортных задачах.

В работе разработан метод приоритетов формирования близких к оптимальным допустимых опорных планов перевозок для транспортной задачи. Этот метод позволяет комплексно учитывать как стоимость перевозок единицы груза, так и возможности источников снабжения и потребления грузов, которые перевозятся. Применение метода приоритетов существенно сокращает количество итераций при поиске оптимального плана перевозок методом потенциалов. На основе предложенных алгоритмов в среде Mathcad 15 разработана программа автоматической генерации близких к оптимальным допустимых опорных планов.

Ключевые слова: метод приоритетов, допустимый опорный план, транспортная задача, оптимальный план перевозок.

S. Pustiulha, V. Prydiuk, V. Samostyan. Method of Priorities of Forming the Possible Supporting Plans of Transportations in Transport Tasks.

In the article it is worked out the method of priorities of forming which are approximate to the optimal possible supporting, plans of transportation for a transport task. This method allows to take into account both the cost of transportation of load unit and possibilities of sources of supply and consumption of loads which are transported. Application of method of priorities substantially shortens the amount of iterations when searching the optimal plan of transportations by means of method of potentials.

On the basis of the offered algorithms in the sphere of MathCAD 15 the program of automatic generation of approximate to the optimal possible supporting plans is worked out.

Keywords: method of priorities, possible supporting plan, transport task, optimal plan of transportations.

АВТОРИ:

ПУСТЮЛЬГА Сергій Іванович, доктор технічних наук, професор кафедри інженерної та комп'ютерної графіки, декан МБФ, Луцький національний технічний університет, e-mail: mbf.dec@mail.ru

ПРИДЮК Валентин Михайлович, кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобілів та транспортних технологій, Луцький національний технічний університет, e-mail: pred_mbf@mail.ru

САМОСТЯН Віктор Русланович, кандидат технічних наук, доцент кафедри інженерної та комп'ютерної графіки, Луцький національний технічний університет, e-mail: cvmbf@ukr.net

АВТОРЫ:

ПУСТЮЛЬГА Сергей Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры инженерной и компьютерной графики, декан МСФ, Луцкий национальный технический университет, e-mail: mbf.dec@mail.ru

ПРИДЮК Валентин Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобилей и транспортных технологий, Луцкий национальный технический университет, e-mail: pred_mbf@mail.ru

САМОСТЯН Виктор Русланович, кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной и компьютерной графики, Луцкий национальный технический университет, e-mail: cvmbf@ukr.net

AUTHORS:

Serhii PUSTIULHA, Doctor of Technical Sciences, Professor of engineering and computer graphics department, Dean of MBF, Lutsk National Technical University, e-mail: mbf.dec@mail.ru

Valentyn PRYDIUK, Ph.D in Engineering, associate professor of Automobiles and Transport Technologies department, Lutsk National Technical University, e-mail: pred_mbf@mail.ru

Viktor SAMOSTYAN, Ph.D in Engineering, associate professor of engineering and computer graphics department, Lutsk National Technical University, e-mail: cvmbf@ukr.net