УДК 531.36

Д. М. Лила, В. И. Слынько

О построении матричнозначной функции Ляпунова для линейной системы с квазипериодическими коэффициентами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

One of the ways of constructing Lyapunov's matrix-valued function for a linear system of a differential equations with quasiperiodic coefficients has been proposed. On the basis of this function, the conditions for asymptotic stability of a class of linear systems are obtained. This allows one to investigate the systems with unstable independent subsystems.

К системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами приводят многие задачи физики и техники. Наиболее распространенными представителями этого класса уравнений являются классические уравнения Хилла и Матье. Качественному исследованию линейных уравнений с периодическими коэффициентами посвящена работа [1]. В этой работе систематически изложены основные результаты относительно качественных свойств линейных систем дифференциальных уравнений, а также некоторые физические и технические приложения. Исследованию устойчивости линейных систем с переменными (квазипериодическими) коэффициентами посвящены работы [2–4]. В [1, 2] исследуются линейные системы с квазипериодическими коэффициентами на основе метода усреднения и его обобщения — метода ускоренной сходимости. В работе [4] применяется прямой метод Ляпунова для исследования неклассических типов устойчивости на основе подхода Н. Г. Четаева.

Отметим, что при исследовании устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами, как правило, выделяется стационарная часть, которая обладает некоторым типом устойчивости, и различными методами (асимптотическим методом Боголюбова либо прямым методом Ляпунова) находятся условия, при которых переменные возмущения не разрушают устойчивости стационарной части. Таким образом, актуальной задачей теории систем с переменными коэффициентами является нахождение условий устойчивости при “больших” переменных возмущениях.

Целью настоящей работы является получение достаточных условий устойчивости линейных систем с квазипериодическими коэффициентами прямым методом Ляпунова, основанным на концепции матричнозначных функций Ляпунова [5].

Построение функции Ляпунова. Рассмотрим линейную систему с квазипериодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= A_1 z_1 + F(t) z_2, \qquad z_1(t_0) = z_{10}, \\ \dot z_2 &= A_2 z_2 + G(t) z_1, \qquad z_2(t_0) = z_{20}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $z_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$, $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ и $A_2 \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$ — постоянные матрицы, а

$$F(t) = \sum_{k=-N}^{N} F_k e^{i\nu_k t}, \qquad G(t) = \sum_{k=-N}^{N} G_k e^{i\nu_k t},$$

где $\nu_k \in \mathbb{R}$, $\nu_{-k} = -\nu_k$, $\nu_k \neq 0$, $F_k \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, $G_k \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1}$, $F_0 = 0$, $G_0 = 0$.

Для системы (1) построим матричнозначную функцию Ляпунова

$$U(t, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} v_{11}(z_1) & v_{12}(t, z_1, z_2) \\ v_{21}(t, z_1, z_2) & v_{22}(z_2) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $v_{11}(z_1) \in C^1(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{R}_+)$, $v_{22}(z_2) \in C^1(\mathbb{C}^{n_2}, \mathbb{R}_+)$, $v_{12}(t, z_1, z_2) = \overline{v_{21}(t, z_1, z_2)}$, предполагая известными диагональные элементы этой функции в виде квадратичных форм

$$v_{11}(z_1) = z_1^* P_{11} z_1, \qquad v_{22}(z_2) = z_2^* P_{22} z_2,$$

где $P_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$, $P_{11}^* = P_{11}$, $P_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, $P_{22}^* = P_{22}$ — положительно определенные эрмитовы матрицы. Для построения внедиагональных элементов, следуя работам [5, 8], рассмотрим билинейные формы

$$v_{12}(t, z_1, z_2) = z_1^* P_{12}(t) z_2, \qquad v_{21}(t, z_1, z_2) = z_2^* P_{12}^*(t) z_1,$$

где $P_{12}(t) = \sum\limits_{k=-N}^{N} \left(\dfrac{\eta_1}{\eta_2} X_k + \dfrac{\eta_2}{\eta_1} Y_k \right) e^{i\nu_k t}$, $X_k \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, $Y_k \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T > 0$, — матрица-функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_{12}}{dt} + A_1^* P_{12} + P_{12} A_2 = -\frac{\eta_1}{\eta_2} P_{11} F(t) - \frac{\eta_2}{\eta_1} G^*(t) P_{22}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) приходим к системе линейных матричных уравнений

$$\begin{aligned} &i\nu_k X_k + A_1^* X_k + X_k A_2 = -P_{11} F_k, \\ &i\nu_k Y_k + A_1^* Y_k + Y_k A_2 = -G_k^* P_{22}. \end{aligned} \tag{4}$$

Условия разрешимости системы (4) следуют из результатов работы [6].

Оценим компоненты матричнозначной функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} &\lambda_m(P_{11}) \|z_1\|^2 \leqslant v_{11}(z_1) \leqslant \lambda_M(P_{11}) \|z_1\|^2, \\ &\lambda_m(P_{22}) \|z_2\|^2 \leqslant v_{22}(z_2) \leqslant \lambda_M(P_{22}) \|z_2\|^2, \\ &|v_{12}(t, z_1, z_2)| \leqslant \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \|X_k\| + \frac{\eta_2}{\eta_1} \|Y_k\| \right) \|z_1\| \|z_2\|, \end{aligned}$$

где $\lambda_m(\cdot)$, $\lambda_M(\cdot)$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы. Для системы (1) построим скалярную функцию Ляпунова

$$v(t, z, \eta) = \eta^T U(t, z_1, z_2) \eta, \tag{5}$$

где обозначено $z = (z_1^T, z_2^T)^T$, при помощи которой можно установить условия устойчивости этой системы. Оценка этой функции имеет вид

$$u^T H^T Q_2 H u \leqslant v(t, z, \eta) = \eta^T U(t, z_1, z_2) \eta \leqslant u^T H^T Q_1 H u, \tag{6}$$

где

$$u = (\|z_1\|, \|z_2\|)^T,$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_M(P_1) & \sum\limits_{k=-N}^{N} \dfrac{\eta_1^2\|X_k\| + \eta_2^2\|Y_k\|}{\eta_1\eta_2} \\ \sum\limits_{k=-N}^{N} \dfrac{\eta_1^2\|X_k\| + \eta_2^2\|Y_k\|}{\eta_1\eta_2} & \lambda_M(P_2) \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda_m(P_1) & -\sum\limits_{k=-N}^{N} \dfrac{\eta_1^2\|X_k\| + \eta_2^2\|Y_k\|}{\eta_1\eta_2} \\ -\sum\limits_{k=-N}^{N} \dfrac{\eta_1^2\|X_k\| + \eta_2^2\|Y_k\|}{\eta_1\eta_2} & \lambda_m(P_2) \end{pmatrix}.$$

Условие положительной определенности матриц Q_1 и Q_2 имеет вид

$$\sum_{k=-N}^{N} \|X_k\|\eta_1^2 + \sum_{k=-N}^{N} \|Y_k\|\eta_2^2 - \sqrt{\lambda_m(P_1)\lambda_m(P_2)}\eta_1\eta_2 < 0.$$

Найдем полную производную скалярной функции Ляпунова:

$$\frac{dv}{dt}\bigg|_{(1)} = \eta_1^2 \frac{dv_{11}}{dt}\bigg|_{(1)} + 2\eta_1\eta_2 \operatorname{Re} \frac{dv_{12}}{dt}\bigg|_{(1)} + \eta_2^2 \frac{dv_{22}}{dt}\bigg|_{(1)} = z_1^*(A_1^*P_{11} + P_{11}A_1)z_1\eta_1^2 +$$
$$+ z_2^*(A_2^*P_{22} + P_{22}A_2)z_2\eta_2^2 + z_1^*(P_{12}(t)G(t) + G^*(t)P_{12}^*(t))z_1\eta_1\eta_2 +$$
$$+ z_2^*(P_{12}^*(t)F(t) + F^*(t)P_{12}(t))z_2\eta_1\eta_2 = z_1^*\mathcal{S}_1(t)z_1 + z_2^*\mathcal{S}_2(t)z_2,$$

$$\mathcal{S}_1(t) = \eta_1^2\left(A_1^*P_{11} + P_{11}A_1 + \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} X_kG_le^{i(\nu_k+\nu_l)t} + G_l^*X_k^*e^{-i(\nu_k+\nu_l)t}\right) +$$
$$+ \eta_2^2 \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} Y_kG_le^{i(\nu_k+\nu_l)t} + G_l^*Y_k^*e^{-i(\nu_k+\nu_l)t},$$

$$\mathcal{S}_2(t) = \eta_2^2\left(A_2^*P_{22} + P_{22}A_2 + \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} Y_k^*F_le^{i(-\nu_k+\nu_l)t} + F_l^*Y_ke^{i(\nu_k-\nu_l)t}\right) +$$
$$+ \eta_1^2 \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} X_k^*F_le^{i(-\nu_k+\nu_l)t} + F_l^*X_ke^{i(\nu_k-\nu_l)t}.$$

Полученные соотношения позволяют установить следующий результат.

Теорема 1. *Предположим, что система уравнений* (1) *такова, что существуют постоянные* η_1, $\eta_2 > 0$, *для которых выполняются следующие условия:*

1) $\sum\limits_{k=-N}^{N} \|X_k\|\eta_1^2 + \sum\limits_{k=-N}^{N} \|Y_k\|\eta_2^2 - \sqrt{\lambda_m(P_1)\lambda_m(P_2)}\eta_1\eta_2 < 0;$

2) все главные миноры матриц $-S_1(t)$, $-S_2(t)$ неотрицательны.

Тогда состояние равновесия $z_1 = z_2 = 0$ системы (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Пусть J_ε и S_ε — внутренность и сферическая поверхность шара радиусом ε с центром в точке $z_1 = z_2 = 0$ соответственно.

Выберем в качестве вспомогательной функцию $v(t, z, \eta)$, определенную соотношением (5). Из условия (1) теоремы и оценки (6) следует положительная определенность этой функции [7]. Предположим ε произвольным положительным числом, и пусть l — минимальное значение функции v на сфере S_ε. Выберем положительное число δ таким, чтобы в точках шара J_δ выполнялось неравенство $v < l$, и пусть z_0 — произвольная точка из J_δ. Рассмотрим траекторию $z(t; t_0, z_0)$, выходящую из точки z_0, и допустим, что она пересечет сферу S_ε в некоторой точке $\widetilde{z} = z(\widetilde{t}; t_0, z_0)$, $\widetilde{t} > t_0$. Поскольку из условия (2) теоремы и выражения для полной производной функции $v(t, z, \eta)$ вдоль решений системы (1) следует отрицательная полуопределенность производной $\dot{v}$, то функция v не возрастает вдоль траектории, и поэтому имеем $v(\widetilde{t}, \widetilde{z}, \eta) \leqslant v(t_0, z_0, \eta) < l$. С другой стороны, так как l — минимум функции v на S_ε, то должно выполняться неравенство $v(\widetilde{t}, \widetilde{z}, \eta) \geqslant l$. Полученное противоречие доказывает, что точка $z(t; t_0, z_0)$ не выйдет с ростом времени за пределы сферы S_ε. Теорема доказана.

Теорема 2. *Предположим, что система уравнений* (1) *такова, что существуют постоянные η_1, $\eta_2 > 0$ и постоянная $\mu > 0$, для которых выполняются следующие неравенства:*

1) $\sum\limits_{k=-N}^{N} \|X_k\|\eta_1^2 + \sum\limits_{k=-N}^{N} \|Y_k\|\eta_2^2 - \sqrt{\lambda_m(P_1)\lambda_m(P_2)}\eta_1\eta_2 < 0$*;*

2) $(-1)^k\Delta_k(S_1(t)) > \mu$, $(-1)^k\Delta_k(S_2(t)) > \mu$, $k = 1, \ldots, n$, *где $\Delta_k(.)$ — k-й последовательный главный минор соответствующей матрицы.*

Тогда состояние равновесия $z_1 = z_2 = 0$ системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условия (1) теоремы и оценки (6) следует положительная определенность функции $v(t, z, \eta)$ (5).

Пусть ε — положительное число. Согласно теореме 1, можем указать число $\delta > 0$, такое, что из $z_0 \in J_\delta$ будет следовать $z(t; t_0, z_0) \in J_\varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Предположим, что точка $z(t; t_0, z_0)$ не попадет при $t \geqslant t_0$ в шар J_δ. Тогда вследствие ограниченности решения $z(t; t_0, z_0)$, $t \geqslant t_0$, полутраектория $z(t; t_0, z_0)$ при $t \geqslant t_0$ будет лежать в некотором шаровом слое $\overline{J}_R \setminus J_\delta$.

Из работы [4, с. 61] следует, что существует постоянная $m > 0$, такая, что будем иметь $\dot{v} < -m$ во всех точках указанного слоя. Из равенства

$$v(t, z(t; t_0, z_0), \eta) = v(t_0, z_0, \eta) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{v}(s, z(s; t_0, z_0), \eta)\, ds$$

выводим неравенство $v(t, z(t; t_0, z_0), \eta) < v(t_0, z_0, \eta) - m(t - t_0)$. Если t растет неограниченно, то правая часть неравенства становится отрицательной, что и приводит к противоречию, так как в левой части этого неравенства стоит значение функции Ляпунова, которое не может стать отрицательным. Таким образом, точка $z(t; t_0, z_0)$ попадает в некоторый момент в шар J_δ, но число δ выбрано так, что, попав в J_δ, точка $z(t; t_0, z_0)$ не сможет уже выйти за пределы J_ε. Так как ε было взято произвольным числом, то отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t; t_0, z_0) = 0$. Теорема доказана.

П р и м е р. В качестве приложения теоремы 2 рассмотрим линейную систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + \alpha e^{\nu J t} z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda_2 z_2 + \gamma e^{-\nu J t} z_1, \end{aligned} \tag{7}$$

где $z_i \in \mathbb{R}^2$, λ_i, α, γ, $\nu \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Построим матричнозначную функцию Ляпунова:

$$v_{11}(z_1) = z_1^T P_{11} z_1 = \|z_1\|^2,$$

$$v_{22}(z_2) = z_2^T P_{22} z_2 = \|z_2\|^2,$$

$$v_{12}(t, z_1, z_2) = z_1^T P_{12}(t) z_2,$$

где $P_{12}(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_{12}}{dt} + (\lambda_1 + \lambda_2) P_{12}(t) = -(\alpha + \gamma) e^{\nu J t}.$$

Ограниченное решение этого уравнения имеет вид

$$P_{12}(t) = -\frac{\alpha + \gamma}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2} (-\nu J + (\lambda_1 + \lambda_2) I) e^{\nu J t}.$$

Полагая $\eta_1 = \eta_2 = 1$ и учитывая, что $\|e^{\nu J t}\| = 1$, $\| -\nu J + (\lambda_1 + \lambda_2) I\| = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}$, имеем:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{|\alpha + \gamma|}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}} \\ \dfrac{|\alpha + \gamma|}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{|\alpha + \gamma|}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}} \\ -\dfrac{|\alpha + \gamma|}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}} & 1 \end{pmatrix},$$

откуда, согласно условию (1) теоремы 2, $(\alpha + \gamma)^2 - ((\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2) < 0$.

Полная производная скалярной функции Ляпунова $v(t, z, \eta) = \eta^T U(t, z_1, z_2) \eta$ вдоль решений системы (7) имеет вид

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(7)} = 2\left(\lambda_1 - \frac{\gamma(\alpha + \gamma)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}\right) \|z_1\|^2 + 2\left(\lambda_2 - \frac{\alpha(\alpha + \gamma)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2}\right) \|z_2\|^2,$$

поэтому условия (2) теоремы 2 приобретают вид

$$\lambda_1 - \frac{\gamma(\alpha + \gamma)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2} < 0, \qquad \lambda_2 - \frac{\alpha(\alpha + \gamma)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \nu^2} < 0.$$

Фиксируя значения $\lambda_1 = -199{,}00$, $\lambda_2 = 2{,}85$, $\nu = 6{,}05$, получаем область равномерной асимптотической устойчивости данной системы в пространстве параметров $(\alpha; \gamma)$ (рис. 1).

Обсуждение результатов. Построенный пример линейной системы четвертого порядка, одна из независимых подсистем которой является неустойчивой, показывает возможность стабилизации неустойчивой линейной системы периодическими возмущениями.

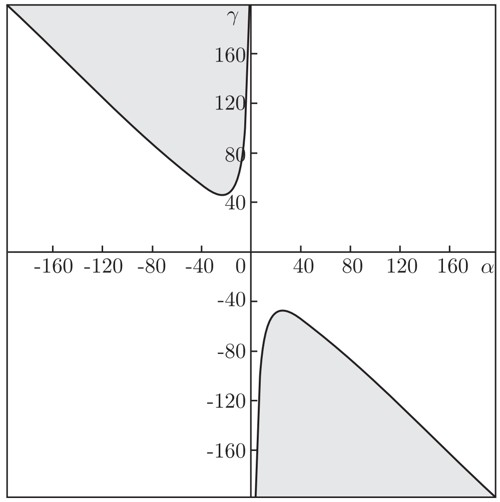

Рис. 1

Отметим также, что вследствие неустойчивости применить к исходной системе метод векторных функций Ляпунова не представляется возможным; вместе с этим, метод матрично-значных функций позволяет установить возможность стабилизации за счет учета связей между подсистемами.

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – Москва: Наука, 1972. – 720 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 352 с.
3. *Штокало И. З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. – Киев: Изд-во АН УССР, 1969. – 79 с.
4. *Мартынюк А. А.* Практическая устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1983. – 301 с.
5. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости движения крупномасштабных систем // Дифференциальные уравнения. – 2002. – № 6. – С. 754–758.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.
7. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 224 с.
8. *Martynyuk A. A.* Stability of dynamical systems in metric spaces // Nonlin. Dynamics and Systems Theory. – 2005. – **5**, No 2. – P. 157–167.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
Черкасский национальный университет
им. Богдана Хмельницкого

Поступило в редакцию 18.12.2006