УДК 517.958:536.72

Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, В. М. Сівак

Конвективна дифузія у двошаровому фільтрі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Й. Бураком)

For constructing the analytical solutions of contact boundary-value problems of convective diffusion, a method based on the application of integral transformations separately in contacting regions is generalized. The admixture concentration in each structural element, as well as mass fluxes and the filter saturation time by a polluting substance, is found.

У сучасних системах очистки забруднених вод широко використовуються багатошарові фільтри з різною пористістю шарів [1]. Ефективність їх роботи істотно залежить від сорбційних властивостей окремих шарів, пористості, а також відповідних геометричних параметрів. В інженерній практиці для розрахунку таких фільтрів, як правило, використовують комп'ютерне моделювання, розв'язуючи числовими методами нелінійні задачі фільтрації стічних вод [2].

Разом з тим для аналізу впливу пористості та геометричних параметрів фільтра на довговічність його роботи доцільно отримати аналітичні розв'язки аналогічних задач у лінеаризованому варіанті описання процесів сорбції. У даній роботі досліджуються процеси масопереносу частинок суспензій з урахуванням конвективної складової перенесення та сорбційних процесів у двошаровому фільтрі.

1. Вихідні співвідношення. При формулюванні вихідних співвідношень моделі фільтрації в структурних шарах фільтра вважатимемо, що довільна область складається з монокристалів різного типу, які утворюють скелет, та водного розчину, який заповнює поровий простір. Приймемо, що в процесі фільтрації скелет не деформується, і пористість залишається сталою (не враховуються зміни, пов'язані із сорбцією домішкової речовини). Водний розчин є двокомпонентним і складається з частинок води та забруднюючої субстанції.

Основними процесами, що розглядаються, є конвективна дифузія домішок та їх сорбція скелетом. Ці процеси описуються з використанням наближення континууму центрів мас [3] для рідкої фази при умові, що швидкість конвективного руху частинок наближено дорівнює істиній швидкості порового розчину $\vec{v}$, тобто $\vec{v} \approx \vec{v}_f/\kappa$, де $\vec{v}_f$ — швидкість фільтрації; κ — пористість. Крім того, вважатимемо, що інтенсивність процесу сорбції є прямо пропорційна концентрації забруднення, а густина ρ — стала. Тоді розподіл концентрації домішки c_1 в поровому розчині шару знаходимо з балансового рівняння

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c_1 = D \Delta c_1 - k c_1, \tag{1}$$

а її концентрацію c_2 на скелеті — із співвідношення

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = k c_1, \tag{2}$$

де D — коефіцієнт дифузії; k — кінетичний коефіцієнт, що визначає інтенсивність процесу сорбції. Крапкою позначено скалярний добуток; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона, $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ — оператор Лапласа. При цьому потік домішки $\vec{J}_1$ задається виразом $\vec{J}_1 = \vec{v} c_1 - \rho D \vec{\nabla} c_1$.

2. Контактно-крайова задача конвективної дифузії. Розглянемо шар товщиною x_*, що складається з двох підшарів товщиною x' і δx ($\delta x = x_* - x'$) відповідно. Система декартових координат вибрана так, щоб вісь Ox була перпендикулярна до поверхонь шару з початком на верхній границі і спрямована в глиб тіла. Вважаємо, що на верхній і нижній поверхнях тіла відомі сталі значення концентрації домішки:

$$c_1^{(j)}\Big|_{x=0} = c_0 \equiv \text{const}; \qquad c_2^{(j)}\Big|_{x=x_*} = c_* \equiv \text{const}. \tag{3}$$

Також приймаємо, що в початковий момент часу

$$c_1^{(j)}\Big|_{t=0} = c_2^{(j)}\Big|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Тут j позначає номер підшару фільтра: $j = 1$ — для $\Omega_1 =]0; x'[$, $j = 2$ — для $\Omega_2 =]x'; x_*[$.

Тоді шукані розподіли концентрації частинок домішки в рідині та на скелеті відповідно до співвідношень (1) і (2) знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1^{(j)}}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 c_1^{(j)}}{\partial x^2} - v_j \frac{\partial c_1^{(j)}}{\partial x} - k_j c_1^{(j)}, \\ &\frac{\partial c_2^{(j)}}{\partial t} = k_j c_1^{(j)}, \qquad x \in \Omega_j, \qquad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5}$$

На границі контакту $x = x'$ виконується умова рівностей хімічних потенціалів і масових потоків. Приймаємо лінійну залежність між хімічними потенціалами та концентраціями. Маємо

$$\lambda_1 c_1^{(1)}\Big|_{x=x'} = \lambda_2 c_1^{(2)}\Big|_{x=x'}; \qquad \rho_1 D_1 \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial x} - v_1 c_1^{(1)}\Big|_{x=x'} = \rho_2 D_2 \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial x} - v_2 c_1^{(2)}\Big|_{x=x'}, \tag{6}$$

де λ_j — коефіцієнти концентраційної залежності хімічних потенціалів; ρ_j — густина матеріалу області Ω_j ($j = 1, 2$).

3. Схема розв'язання задачі. Розв'язок контактно-крайової задачі (3)–(6) будемо шукати за допомогою інтегральних перетворень за просторовою змінною окремо в областях Ω_1 і Ω_2 [4]. Для того щоб застосувати перетворення за змінною x, необхідно знати величину відповідних функцій на границях області перетворення [5]. Тому на границі контакту доозначимо шукану функцію за допомогою першої контактної умови (6) таким чином:

$$\lambda_1 c_1^{(1)}(x, t)\Big|_{x=x'} = \lambda_2 c_1^{(2)}(x, t)\Big|_{x=x'} = g(x', t) \equiv g(t). \tag{7}$$

Враховуючи вигляд операторів перших рівнянь систем (5) $\left(L_j \equiv D_j \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - v_j \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, а також те, що задано граничні умови 1-го роду, в області Ω_1 застосуємо таке скінченне інтегральне перетворення [6]:

$$\overline{c}_1(n, t) = \int_0^{x'} c_1^{(1)}(x, t) \exp\left\{-\frac{v_1 x}{2D_1}\right\} \sin(y_n x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{8a}$$

$$c_1^{(1)}(x,t) = \frac{2}{x'} \exp\left\{\frac{v_1 x}{2D_1}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_1(n,t) \sin(y_n x), \tag{8б}$$

де $y_n = n\pi/x'$. В області Ω_2 застосуємо аналогічне до (8) перетворення із зсувом:

$$\overline{c}_2(m,t) = \int\limits_{x'}^{x_*} c_1^{(2)}(x,t) \exp\left\{-\frac{v_2(x-x')}{2D_2}\right\} \sin(y_m(x-x'))dx, \qquad m = 1,2,\ldots; \tag{9а}$$

$$c_1^{(2)}(x,t) = \frac{2}{\delta x} \exp\left\{-\frac{v_2(x-x')}{2D_2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{c}_2(m,t) \sin(y_m(x-x')), \tag{9б}$$

де $y_m = m\pi/\delta x$.

Тоді крайові задачі (3)–(5), (7) в зображеннях набудуть вигляду

$$\frac{d\overline{c}_1}{dt} + (D_1 y_n^2 + k_1)\overline{c}_1 = D_1 y_n \left(c_0 - \frac{(-1)^n}{\lambda_1} g(t) \exp\left\{-\frac{v_1 x'}{2D_1}\right\}\right), \qquad \overline{c}_1(n,t)\big|_{t=0} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{d\overline{c}_2}{dt} + (D_2 y_m^2 + k_2)\overline{c}_2 = D_2 y_m \left(\frac{g(t)}{\lambda_2} - (-1)^m c_* \exp\left\{-\frac{v_2 \delta x}{2D_2}\right\}\right), \qquad \overline{c}_2(m,t)\big|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

Розв'язки задач (10), (11) можна подати у вигляді

$$\overline{c}_1(n,t) = e^{-(D_1 y_n^2 + k_1)t} \int\limits_0^t D_1 y_n^2 \left[c_0 - \frac{(-1)^n}{\lambda_1} g(t') \exp\left\{-\frac{v_1 x'}{2D_1}\right\}\right] e^{(D_1 y_n^2 + k_1)t'} dt'; \tag{12}$$

$$\overline{c}_2(m,t) = e^{-(D_2 y_m^2 + k_2)t} \int\limits_0^t D_2 y_m^2 \left[\frac{g(t')}{\lambda_2} - (-1)^k c_* \exp\left\{-\frac{v_2 \delta x}{2D_2}\right\}\right] e^{(D_2 y_m^2 + k_2)t'} dt'. \tag{13}$$

Для знаходження функції $g(t')$ використаємо умову рівності потоків домішки на поверхні контакту шарів. Після застосування обернених інтегральних перетворень (8б) і (9б) до виразів (12) та (13) підставляємо одержані концентрації у другу умову (6), і отримане рівняння розв'язуємо відносно функції $g(t')$. В результаті маємо

$$g(t') = \frac{a_1 c_0 \exp\left\{\frac{v_1 x'}{2D_1}\right\} \Sigma_n^- + a_2 c_* \exp\left\{-\frac{v_2 \delta x}{2D_2}\right\} \Sigma_m^+}{\frac{a_1}{\lambda_1} \Sigma_n^+ + \frac{a_2}{\lambda_2} \Sigma_m^-}, \tag{14}$$

де $a_1 = 2D_1^2 \rho_1/x'$, $a_2 = 2D_2^2 \rho_2/\delta x$; $\Sigma_n^{\pm} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n y_n^2 e^{-(D_1 y_n^2 + k_1)(t-t')}$, $\Sigma_m^{\pm} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^m y_m^2 \times$ $\times e^{-(D_2 y_m^2 + k_2)(t-t')}$.

Для концентрації домішкової речовини в розчині остаточно отримаємо

$$c_1^{(1)}(x,t) = c_0 \exp\left\{\frac{v_1 x}{2D_1}\right\} \left[\frac{\operatorname{sh} \eta_1(x'-x)}{\operatorname{sh} \eta_1 x'} - \frac{2D_1}{x'} e^{-k_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n x)}{D_1 y_n^2 + k_1} e^{-D_1 y_n^2 t}\right] -$$

$$- \frac{2D_1}{\lambda_1 x'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \sin(y_n x) \int\limits_0^t g(t') e^{-(D_1 y_n^2 + k_1)(t-t')} dt'; \tag{15}$$

$$c_1^{(2)}(x,t) = c_* \exp\left\{-\frac{v_2(x_*-x)}{2D_2}\right\}\left[\frac{\operatorname{sh}\eta_2(x-x')}{\operatorname{sh}\eta_2\delta x} - \right.$$
$$\left. - \frac{2D_2}{\delta x} e^{-k_2 t} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin(y_m(x-x'))}{D_2 y_m^2 + k_2} e^{-D_2 y_m^2 t}\right] +$$
$$+ \frac{2D_2}{\lambda_2 \delta x} \exp\left\{\frac{v_2(x-x')}{2D_2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin(y_m(x-x')) \int\limits_0^t g(t') e^{-(D_2 y_m^2 + k_2)(t-t')} dt', \qquad (16)$$

де функція $g(t')$ визначається за формулою (14).

Для знаходження концентрації частинок, сорбованих на скелеті, проінтегруємо другі рівняння систем (5). Маємо

$$c_2^{(1)}(x,t) = c_0 \exp\left\{\frac{v_1 x}{2D_1}\right\}\left[\frac{\operatorname{sh}\eta_1(x'-x)}{\operatorname{sh}\eta_1 x'} t + \frac{x'}{2\eta_1 D_1}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta_1 x}{(\operatorname{sh}\eta_1 x')^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(1 + \frac{x}{x'}\right)\frac{\operatorname{ch}\eta_1(x'-x)}{\operatorname{sh}\eta_1 x'}\right) + \frac{2D_1}{x'} e^{-k_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n x)}{(D_1 y_n^2 + k_1)^2} e^{-D_1 y_n^2 t}\right] -$$
$$- \frac{2D_1}{\lambda_1 x'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \sin(y_n x) \int\limits_0^t \int\limits_0^{t'} g(t'') e^{-(D_1 y_n^2 + k_1)(t'-t'')} dt'' dt'; \qquad (17)$$

$$c_2^{(2)}(x,t) = c_* \exp\left\{-\frac{v_2(x_*-x)}{2D_2}\right\}\left[\frac{\operatorname{sh}\eta_2(x-x')}{\operatorname{sh}\eta_2\delta x} t + \right.$$
$$+ \frac{\delta x}{2\eta_2 D_2}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta_2(\delta x + x - x')}{(\operatorname{sh}\eta_2\delta x)^2} + \left(1 + \frac{x-x'}{\delta x}\right)\frac{\operatorname{ch}\eta_2(x-x')}{\operatorname{sh}\eta_2\delta x}\right) +$$
$$\left. + \frac{2D_2}{\delta x} e^{-k_2 t} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin(y_m(x-x'))}{(D_2 y_m^2 + k_2)^2} e^{-D_2 y_m^2 t}\right] - \frac{2D_2}{\lambda_2 \delta x} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{v_2(x-x')}{2D_2}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin(y_m(x-x')) \int\limits_0^t \int\limits_0^{t'} g(t'') e^{-(D_2 y_m^2 + k_2)(t'-t'')} dt'' dt'. \qquad (18)$$

Для аналізу довговічності роботи фільтра з урахуванням умови $k_1 \ll k_2$ знайдемо час насичення t_*, розв'язуючи нелінійне рівняння

$$\sup_{x \in \Omega_2} c_2^{(2)}(x, t_*) = N_2, \qquad (19)$$

де N_2 — максимальна концентрація домішки, здатної адсорбуватися на скелеті. Рівняння (19) розв'язуємо, наприклад, методом Ньютона, записуючи похідну через скінченні різниці:

$$t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)(t_i - t_{i-1})}{f(t_i) - f(t_{i-1})}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

де

$$f(t) = \frac{x' - x - \delta x}{2\eta_2 D_2} + \frac{\operatorname{sh}\eta_2\delta x}{\operatorname{sh}\eta_2(x-x')}\left\{-\frac{\delta x}{2\eta_2 D_2}\frac{\operatorname{sh}\eta_2(\delta x + x - x')}{(\operatorname{sh}\eta_2\delta x)^2} - \right.$$

$$- \frac{2D_2}{\delta x} e^{-k_2 t} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin(y_m(x-x'))}{(D_2 y_m^2 + k_2)^2} e^{-D_2 y_m^2 t} + \frac{1}{c_*} \exp\left\{ \frac{v_2(x_* - x)}{2D_2} \right\} \biggl[N_2 +$$

$$+ \frac{2D_2}{\lambda_2 \delta x} \exp\left\{ \frac{v_2(x-x')}{2D_2} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin(y_m(x-x')) \int_0^t \int_0^{t'} g(t'') e^{-(D_2 y_m^2 + k_2)(t'-t'')} dt'' dt' \biggr] \biggr\}.$$

Зауважимо, що контактно-крайова задача (3)–(6) допускає введення природної безрозмірної форми [3]

$$\xi = \left(\frac{k_2}{D} \right)^{1/2} x, \qquad \tau = k_2 t, \tag{20}$$

де $D = \max\{D_1, D_2\}$. Тоді коефіцієнти вихідної задачі також набувають безрозмірного вигляду

$$D_j \to d_j = \frac{D_j}{D}; \qquad k_1 \to a = \frac{k_1}{k_2}, \qquad k_2 \to 1; \qquad v_j \to \widetilde{v}_j = (k_2 D)^{1/2} v_j;$$

$$\lambda_1 \to \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad \lambda_2 \to 1.$$

Відзначимо також, що функція концентрації допускає нормування на значення, що підтримується на поверхні (верхній або нижній) фільтра. Тоді така нормована концентрація залежатиме від відношення сталих значень концентрації домішки на границях тіла.

4. Потоки домішкової речовини. Одержання аналітичних розв'язків для концентрацій дає можливість знайти потоки маси забруднюючої речовини J_j в області Ω_j $(j = 1; 2)$ через поверхню $x = \overline{x}$ [3]:

$$J_j(t)\big|_{x=\overline{x}} = -\rho_j D_j \frac{\partial c_j(x,t)}{\partial x} + v_j c_j(x,t)\big|_{x=\overline{x}}. \tag{21}$$

Підставляємо у співвідношення (21) вирази для концентрацій (15), (16) та отримаємо в області Ω_1

$$J_1(t)\bigg|_{x=\overline{x}} = c_0 \exp\left\{ \frac{v_1 \overline{x}}{2D_1} \right\} \biggl[v_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{2} \right) \left\{ \frac{\operatorname{sh} \eta_1 (x' - \overline{x})}{\operatorname{sh} \eta_1 x'} - \frac{2D_1}{x'} e^{-k_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n \overline{x})}{D_1 y_n^2 + k_1} e^{-D_1 y_n^2 t} \right\} +$$

$$+ \eta_1 \rho_1 D_1 \frac{\operatorname{ch} \eta_1 (x' - \overline{x})}{\operatorname{sh} \eta_1 x'} + \frac{2\rho_1}{x'} D_1^2 e^{-k_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2 \cos(y_n \overline{x})}{D_1 y_n^2 + k_1} e^{-D_1 y_n^2 t} \biggr] -$$

$$- \frac{2D_1}{\lambda_1 x'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n [v_1 \sin(y_n \overline{x}) + \rho_1 D_1 y_n \cos(y_n \overline{x})] \int_0^t g(t') e^{-(D_1 y_n^2 + k_1)(t-t')} dt';$$

в області Ω_2

$$J_2(t)\bigg|_{x=\overline{x}} = c_* \exp\left\{ \frac{-v_2(x_* - \overline{x})}{2D_2} \right\} \biggl[v_2 \left(1 + \frac{\rho_2}{2} \right) \left\{ \frac{\operatorname{sh} \eta_2 (\overline{x} - x')}{\operatorname{sh} \eta_2 \delta x} - \right.$$

$$
-\frac{2D_2}{\delta x}e^{-k_2t}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{y_m\sin(y_m(\overline{x}-x'))}{D_2y_m^2+k_2}e^{-D_2y_m^2t}\Bigg\}-\eta_2\rho_2D_2\frac{\operatorname{ch}\eta_2(\overline{x}-x')}{\operatorname{sh}\eta_2\delta x}+
$$

$$
+\frac{2\rho_2}{\delta x}D_2^2e^{-k_2t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2\cos(y_m(\overline{x}-x'))}{D_2y_m^2+k_2}e^{-D_2y_m^2t}\Bigg]-\frac{2D_2}{\lambda_2\delta x}\exp\left\{\frac{v_2(\overline{x}-x')}{2D_2}\right\}\sum_{m=1}^{\infty}y_m\times
$$

$$
\times\left[v_2\left(1-\frac{\rho_2}{2}\right)\sin(y_m(\overline{x}-x'))+\rho_2D_2y_m\cos(y_m(\overline{x}-x'))\right]\int_0^t g(t')e^{-(D_2y_m^2+k_2)(t-t')}dt'.
$$

Таким чином, метод побудови точних розв'язків контактно-крайових задач дифузії, який базується на застосуванні інтегральних перетворень за просторовими змінними в контактуючих областях, узагальнено на випадок урахування конвективного механізму масопереносу та сорбційних процесів. Побудовані аналітичні розв'язки задачі конвективної дифузії для двошарвого фільтра дозволяють аналізувати розподіли концентрації дифундуючої речовини у кожному з елементів структури, знаходити потоки маси домішкових частинок, визначати час насичення забруднюючою субстанцією фільтра, від якого залежить час його заміни.

1. *Журба М. Г.* Основы процессов и техника доочистки сточных вод фильтрированием // Доочистка сточных вод. – Кишинев: Молдагропромреклама, 1990. – С. 4–38.
2. *Сівак В. М., Бомба А. Я., Присяжнюк І. М.* Комп'ютерне моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах // Вісн. Нац. ун-ту водн. господарства та природокористування: Зб. наук. праць. – Вип. 4(32). – Рівне: Вид-во НУВГП. – 2005. – С. 164–169.
3. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
4. *Фізико-математичне* моделювання складних систем / Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
5. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
6. *Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1985. – 304 с.

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
Університет Казимира Великого, Бидгощ, Польща
Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

Надійшло до редакції 06.07.2006