УДК 531.38

Г. В. Горр, Е. К. Щетинина

Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Савченко)

The sufficient conditions for the existence of the integrating factor of a system of n differential equations of the rigid body dynamics, which allow $n-3$ first integrals and one invariant relation or $n-4$ first integrals and two invariant relations are obtained. The connection with the theory of Jacobi' integrating factor is shown.

Многие задачи динамики твердого тела, имеющего неподвижную точку, описываются системой шести дифференциальных уравнений, допускающих три первых интеграла. При этом правые части этой системы не зависят от тех переменных, относительно которых они являются производными по времени. Например, уравнения движения твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил, полученные Д. Гриоли [1], имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (a_3-a_2)x_2x_3 + a_3x_3\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2} - a_2x_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3} + \nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2} - \\
&\quad - \nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3},\\
\dot{x}_2 &= (a_1-a_3)x_3x_1 + a_1x_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3} - a_3x_3\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1} + \nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3} - \\
&\quad - \nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1},\\
\dot{x}_3 &= (a_2-a_1)x_1x_2 + a_2x_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1} - a_1x_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2} + \nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1} - \\
&\quad - \nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2},
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2, \tag{2}$$

где x_1, x_2, x_3 — компоненты момента количества движения тела; ν_1, ν_2, ν_3 — компоненты единичного вектора оси симметрии силового поля; a_1, a_2, a_3 — компоненты гирационного тензора; $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ — дифференцируемые функции переменных ν_1, ν_2, ν_3; точка над переменными обозначает относительную производную по t.

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned}
&a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = c_1,\\
&x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = c_2,\\
&\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = c_3^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, причем в силу геометрического смысла вектора $\boldsymbol{\nu}$ при непосредственном интегрировании уравнений (1), (2) постоянную c_3 в системе (3) можно брать равной единице.

В более общем случае дифференциальные уравнения динамики твердого тела запишем в виде

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \frac{\partial X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

где $i = \overline{1, n}$, $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные производные по всем переменным в области $E_n \subset R_n$. Пусть уравнения (4) имеют $n - 2$ первых интеграла

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_j \qquad (j = \overline{1, n-2}). \tag{5}$$

Здесь c_j — произвольные постоянные. Введем в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in E_n$ и ее окрестности новые координаты y_1, $y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$x_i = g_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{6}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E_n^* \subset R_n$. Якобиан замены (6) обозначим так:

$$D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left| \frac{\partial g_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \right|. \tag{7}$$

Очевидно, в равенстве (7) предполагается $D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ в E_n^*. То есть замена (6) обратима

$$y_i = G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{8}$$

При этом выполняется условие

$$D^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left| \frac{\partial G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right| = \frac{1}{\langle D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle} \neq 0. \tag{9}$$

Здесь

$$\langle D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = D(G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)). \tag{10}$$

С помощью формул (6), (8), имеющих место при условии (9), система (4) преобразуется к виду

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{11}$$

Для уравнений (4), (11) справедливо [4]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \left\langle \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D Y_j}{\partial y_j} \right\rangle = 0, \tag{12}$$

где учтено обозначение (10). Для того чтобы показать интегрирование системы (4), рассматривают систему (11), в которой первые интегралы (5) приняты за новые переменные

$y_j = c_j$ $(j = \overline{1, n-2})$. Переменные y_{n-1}, y_n в обратной замене (8) можно обозначить так: $y_{n-1} = x_{n-1}$, $y_n = x_n$. Тогда система (11) принимает вид

$$\dot{y}_j = 0 \quad (j = \overline{1, n-2}), \qquad \dot{y}_{n-1} = Y_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad \dot{y}_n = Y_n(y_1, y_2, \ldots, y_n). \quad (13)$$

Из последних двух уравнений системы (13) в силу $y_j = c_j$ $(j = \overline{1, n-2})$ следует

$$Y_n(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n)dy_{n-1} - Y_{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n)dy_n = 0. \quad (14)$$

На основании уравнений (12)–(14) можно сделать вывод о том, что интегрирующий множитель уравнений (14) имеет вид

$$M(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n) = D(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n). \quad (15)$$

В силу формулы (9) и обозначения (10) интегрирующий множитель (15) можно записать в виде

$$M(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n) =$$
$$= D^{*-1}(g_1(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n), \ldots, g_n(c_1, \ldots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n)). \quad (16)$$

Данная теория интегрирующего множителя может быть использована при интегрировании уравнений (1), (2) в случае, когда имеет место дополнительный к (3) первый интеграл [2].

Поскольку число случаев существования дополнительных первых интегралов для уравнений динамики твердого тела весьма ограничено [3, 4], то представляет интерес рассмотрение интегрирующих множителей дифференциальных уравнений динамики на инвариантных многообразиях. В последнее время [5, 6] еще раз показана актуальность исследования инвариантных соотношений дифференциальных уравнений, так как на базе полученных результатов можно, например, построить новые первые интегралы уравнений.

Применение методов изучения инвариантных соотношений, предложенных Т. Леви-Чивитой [7] и П. В. Харламовым [8], в задачах динамики твердого тела позволило открыть большое количество частных решений уравнений динамики твердого тела [3].

В данной работе получены достаточные условия существования интегрирующего множителя системы дифференциальных уравнений (4), которая допускает определенное число первых интегралов и инвариантных соотношений.

Случай одного инвариантного соотношения. Пусть система (4) допускает инвариантное соотношение по определению Леви-Чивиты [7]:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad \text{где} \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) \neq 0 \quad \text{в} \quad E_n.$$

То есть функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (17)$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет те же свойства, что и правые части уравнений (4).

Свойства инвариантных многообразий, соответствующих указанному соотношению, изучены в [5, 6]. Пусть уравнения (4) имеют $n-3$ первых интеграла

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_k \qquad (k = \overline{1, n-3}) \quad (18)$$

и их левые части по-прежнему удовлетворяют условию $\partial X_i/\partial x_i = 0$. Введем новые переменные

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = \overline{1, n-3}),$$
$$y_{n-2} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y_{n-1} = x_{n-1}, \qquad y_n = x_n. \tag{19}$$

Тогда на основании формул (17)–(19) получим систему

$$\dot{y}_i = 0 \qquad (i = \overline{1, n-3}), \qquad \dot{y}_{n-2} = y_{n-2} Y_{n-2}(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\dot{y}_{n-1} = Y_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad \dot{y}_n = Y_n(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{20}$$

Интегрирование системы (4) на инвариантном многообразии, порожденным соотношением $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, эквивалентно интегрированию системы (20) при условии $y_{n-2} = 0$:

$$y_i = c_i \qquad (i = \overline{1, n-3}), \qquad y_{n-2} = 0,$$
$$\dot{y}_{n-1} = Y_{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n), \qquad \dot{y}_n = Y_n(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n). \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) получены в предположении, что

$$\Delta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left|\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right| \neq 0 \quad (k = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}), \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n), \tag{22}$$

где переменные y_i $(i = \overline{1, n})$ удовлетворяют соотношениям (19). В силу (22) имеет место условие

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| = \frac{1}{\langle \Delta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rangle} \neq 0. \tag{23}$$

Здесь $x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ получены из системы (19).

Принимая во внимание уравнения (20), (21), из формулы (12) найдем

$$\Delta(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n) Y_{n-2}(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n) +$$
$$+ \frac{\partial \Delta(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n) Y_{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} +$$
$$+ \frac{\partial \Delta(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n) Y_n(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_n, y_n)}{\partial y_n} = 0. \tag{24}$$

Так как имеет место условие (23), то из уравнения (24) вытекает, что при выполнении равенства

$$Y_{n-2}(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n) = 0 \tag{25}$$

функция $\Delta(c_1, \ldots, c_{n-3}, 0, y_{n-1}, y_n)$ будет интегрирующим множителем уравнений (21). Следовательно, определено достаточное условие (25) интегрирования системы (4) при наличии у нее $n-3$ первых интегралов и одного инвариантного соотношения по определению Леви-Чивиты.

Случай двух инвариантных соотношений. Рассмотрим случай, когда уравнения (4) имеют $n-4$ первых интеграла и два инвариантных соотношения: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, для которых выполняются уравнения [7]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \lambda_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{g} &= \lambda_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_4(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{26}$$

Вводя новые переменные y_1, $y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$\begin{aligned} &y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = \overline{1, n-4}), \qquad y_{n-3} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &y_{n-2} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y_{n-1} = x_{n-1}, \qquad y_n = x_n, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i$ $(i = \overline{1, n-4})$ — первые интегралы системы (4), и учитывая (26), (27), по аналогии с равенством (24) получим

$$\begin{aligned} &\Delta(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n)[Y^{(1)}_{n-3}(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n) + \\ &\quad + Y^{(2)}_{n-2}(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n)] + \\ &\quad + \frac{\partial\Delta(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n)Y_{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} + \\ &\quad + \frac{\partial\Delta(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n)Y_n(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_n} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $\Delta = \left|\dfrac{\partial x_i}{\partial y_k}\right|$ $(i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n})$, $Y^{(1)}_{n-3} = \langle\lambda_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle$, $Y^{(2)}_{n-2} = \langle\lambda_4(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle$, где x_i удовлетворяют системе (27).

Полагая в равенстве (28)

$$Y^{(1)}_{n-3}(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n) + Y^{(2)}_{n-2}(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n) = 0, \tag{29}$$

для системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n-1} &= Y_{n-1}(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n), \\ \dot{y}_n &= Y_n(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n) \end{aligned} \tag{30}$$

интегрирующий множитель можно определить в виде

$$M^*(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n) = \Delta(c_1, \ldots, c_{n-4}, 0, 0, y_{n-1}, y_n). \tag{31}$$

Таким образом, условие (29) является достаточным условием существования у системы (30) интегрирующего множителя (31).

Следовательно, в рассмотренных выше случаях у системы (4) существования одного инвариантного соотношения или двух инвариантных соотношений интегрирующий множитель приведенных систем определяется по аналогии с классическим случаем (15).

Пример 1. Для иллюстрации полученных результатов вначале приведем пример трехмерной системы, которая допускает одно инвариантное соотношение по определению Леви-Чивиты. Пусть

x_1, x_2, x_3 — переменные задачи; α_0, a, b — постоянные параметры, а дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_0^2 + \alpha_0(x_2 + x_3) + 2x_2x_3 + \frac{1}{2}(1-a)x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_0(x_1 + x_3) + 2x_1x_3 + \frac{1}{2}(1-b)x_1^2 + x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= \alpha_0(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}(1+b)x_1^2 + \frac{1}{2}(1+a)x_2^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Правые части системы (32) удовлетворяют условиям $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$. Эта система допускает инвариантное соотношение

$$\alpha_0 + x_1 + x_2 + x_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{33}$$

так как для функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ имеем уравнение

$$\dot{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = \varphi^2(x_1, x_2, x_3). \tag{34}$$

Введем новые переменные $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$. Тогда на основании (32)–(34) получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha_0 y_1 - 2\alpha_0 y_2 + \alpha_0 y_3 - 2y_1y_2 - \frac{(a+3)}{2}y_2^2 + 2y_2y_3, \\ \dot{y}_2 &= \alpha_0 y_2 - \alpha_0 y_3 - \frac{(1+b)}{2}y_1^2 - 2y_2y_3 + y_2^2 + y_3^2, \\ \dot{y}_3 &= y_3^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Очевидно, что для системы (35) условие (25) выполняется. Для системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha_0 y_1 - 2\alpha_0 y_2 - 2y_1y_2 - \frac{(a+3)}{2}y_2^2, \\ \dot{y}_2 &= \alpha_0 y_2 - \frac{(1+b)}{2}y_1^2 + y_2^2, \end{aligned} \tag{36}$$

которая следует из (35), при $y_3 = 0$ интегрирующим множителем является единица. Первый интеграл системы (36) таков:

$$\alpha_0 y_1 y_2 + y_1 y_2^2 - \frac{(1+b)}{6}y_1^3 + \alpha_0 y_2^2 + \frac{(a+3)}{6}y_2^3 = c, \tag{37}$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 2. С помощью системы (32) легко построить и пример, когда система имеет один первый интеграл и одно инвариантное соотношение. Рассмотрим систему 4-го порядка, которая состоит из трех уравнений (32) и уравнения

$$\dot{x}_4 = \alpha_0^2 + 2\alpha_0(x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{38}$$

Система уравнений (32), (38) допускает первый интеграл

$$x_4 - x_1 - x_2 - x_3 = c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная, и инвариантное соотношение (33).

При замене $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_4 = x_4 - x_1 - x_2 - x_3$ система (32), (38) приводится к системе, состоящей из уравнений (35) и уравнения $\dot{y}_4 = 0$. При $y_3 = 0$ она интегрируется и допускает два интеграла: интеграл (37) и интеграл $y_4 = c_1$.

Полученный в примерах результат обусловлен условием (25), которое в силу (34) может быть записан так:

$$\dot{y}_{n-2} = y_{n-2} \cdot Y_{n-2},$$

где $Y_{n-2} = y_{n-2}$. Поэтому $Y_{n-2}(0) = 0$ и условие (25) выполняется.

Пример 3. Для случая, когда система имеет два инвариантных соотношения, можно привести следующий пример системы четвертого порядка:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 f_1(x_1, x_3, x_4), \qquad \dot{x}_2 = x_1 f_2(x_1, x_3, x_4), \\ &\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_4), \qquad \dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{39}$$

Система (39) допускает два инвариантных соотношения $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и удовлетворяет условию (29). Поэтому на этих инвариантных соотношениях допускает первый интеграл

$$\int f_4(0, 0, x_3)\, dx_3 - \int f_3(0, 0, x_4)\, dx_4 = c,$$

где c — произвольная постоянная.

1. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigidi // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. – 1963. – **35**, No 1–2. – P. 35–39.
2. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
3. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
4. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 384 с.
5. *Ковалев А. М.* Уравнения инвариантных и ориентированных многообразий динамических систем // Доп. НАН України. – 1998. – № 9. – С. 21–25.
6. *Ковалев А. М.* Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса // Механика тв. тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 16–31.
7. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
8. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Мех. тв. тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

Донецкий национальный университет
Донецкий государственный университет экономики и торговли

Поступило в редакцию 16.05.2006