

напружень і “перевертанню” злама на кривій (див. рис. 4). Як результат такий залишковий напружено-деформований стан підвищує міцність і втомну витривалість елемента конструкції. На осьове напруження σ_{zz} структурні перетворення практично не впливають.

1. Qin Y., Zou J., Dong C. et al. Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. and Meth. In Phys. Research. Part B. – 2004. – **225**. – P. 544–554.
2. Коваленко В. С. Микро- и нанообработка сверхмощными лазерными импульсами // Оборудование и эксперимент для профессионалов. – 2003. – № 4. – С. 4–14.
3. Сенченков И. К., Жук Я. А. Термомеханический анализ одной модели термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 2. – С. 41–48.
4. Сенченков И. К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Там же. – 2005. – **41**, № 9. – С. 118–126.
5. Leblond J. B., Mottet G., Devaux J. C. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general relations // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – **34**, No 4. – P. 395–409.
6. Юрьев С. Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – Москва: Металлургиздат, 1950. – 48 с.
7. Попов А. А., Попова Л. Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – Москва: ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
8. Махненко В. И., Великоиваненко Е. А., Кравцов Т. Г., Севрюков В. В. Численное исследование термомеханических процессов при наплавке валов судовых механизмов и устройств // Автомат. сварка. – 2001. – № 1. – С. 3–10.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Миколаївський державний університет

Надійшло до редакції 05.09.2006

УДК 532.528

© 2007

Академик НАН України В. Д. Кубенко

Нестационарное вдавливание затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя

The nonstationary indentation for a blunted rigid body affecting the elastic layer is studied. The general problem formulation includes different boundary conditions on the free surface and contact region. A simplified nonmixed problem that is valid during early times and can serve as a rateable one for a later period is solved exactly.

Нестационарная контактная задача теории упругости достаточно интенсивно развивается в последние два — три десятилетия благодаря практической актуальности, присущим особенностям физического процесса и интересным особенностям поиска решений соответствующих краевых задач. Современное состояние вопроса освещено в работах [1, 2, 5]. В общем случае современная задача удара тела об упругую среду или элемент конструкции формулируется как нестационарная смешанная начально-краевая задача теории упругости с неизвестной изменяющейся во времени границей. Последняя определяется в ходе решения задачи. Постановка задачи включает уравнения упругого деформирования ударяемого

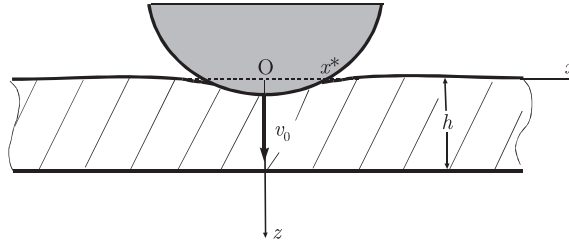


Рис. 1

тела; уравнение движения ударника; соотношение, представляющее силу ударного взаимодействия ударника и упругого тела как функцию неизвестной области контакта; уравнение, связывающее величину области контакта с перемещением (прониканием) ударника; соответствующие граничные и начальные условия. В общем случае задача является связанной с нечетким заданием входных параметров, что предопределяет известные трудности ее решения.

В данной работе представлено решение задачи об ударе жестким телом о поверхность упругого слоя с целью исследовать влияние многократных отражений волн на деформирование слоя с учетом распространения волновых возмущений как в поперечном, так и в продольном направлениях. Рассматривается плоская задача, т. е. фактически предполагается, что ударяющее тело является длинным цилиндром, взаимодействующим со слоем своей боковой поверхностью. Предполагается также, что скорость проникания жесткого тела задана, т. е. в рамках данной работы фактически рассматривается задача нестационарного вдавливания индентора в слой.

1. Жесткое тупое тело (ударник) в момент времени $t = 0$ достигает поверхности упругого слоя $z = 0$ и начинает внедряться в него. Вектор скорости ударника перпендикулярен поверхности слоя, его начальная скорость в момент касания равна V_0 , закон изменения скорости в последующие моменты времени известен и задан функцией $V_0(t)$. Предполагается, что скорость проникания значительно меньше скорости упругих волн в слое, глубины проникания незначительны, контур ударника является достаточно гладкой плавно изменяющейся кривой. Это позволяет формулировать линейную задачу теории упругости, при этом граничные условия задаются на невозмущенной поверхности слоя.

Для общности формулировки задачи введем безразмерные обозначения

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{u}_j = \frac{u_j}{R}; \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{R}; \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{R}; \quad \bar{M} = \frac{M}{\gamma R^2}; \quad \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{K};$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\gamma}}; \quad \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad \beta = \frac{c_s}{c_0}; \quad b = \frac{\beta}{\alpha}; \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{c_0}; \quad j, k = x, z,$$

причем ниже черта над обозначениями будет опущена. Здесь R — характерный линейный размер ударника; c_p , c_s — соответственно скорости распространения волн расширения и волн сдвига в слое [8]; γ — плотность материала слоя; K — его модуль всестороннего сжатия; σ_{jk} — компоненты напряженного состояния; w_0 — перемещение ударника, отсчитываемое от невозмущенной поверхности слоя; V_0 — скорость его движения; M — масса.

Отнесем упругий слой толщины h к декартовым координатам x , z : ось абсцисс направлена вдоль свободной поверхности, ось ординат — вглубь слоя (рис. 1).

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами Φ и Ψ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [3, 8]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\sigma_{xz} = \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right), \quad \sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right).$$

Обозначим через $x^*(t)$ переменную абсциссу границы области контакта тела с ударником. Граничные условия будут следующие:

в области контакта

$$u_z \Big|_{z=0} = w_0(t), \quad |x| < |x^*|, \quad (3)$$

вне области контакта

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = 0, \quad |x| > |x^*|, \quad (4)$$

всюду

$$\sigma_{xz} \Big|_{z=0} = 0, \quad |x| \geq 0. \quad (5)$$

Кроме того, необходимо, чтобы в области контакта напряжение σ_{zz} было сжимающим: $\sigma_{zz} \Big|_{z=0} > 0$, $|x| < |x^*|$. Условия на тыльной стороне слоя при $z = h$ сформулируем аналогично

$$u_z \Big|_{z=h} = 0, \quad \sigma_{xz} \Big|_{z=h} = 0. \quad (6)$$

Начальные условия для волновых потенциалов нулевые. Граница области контакта определяется точками пересечения контура проникающего тела и недеформированной поверхности плиты (плоскости $z = 0$); если поверхность движущегося тела задать в пространстве переменных z, x, t уравнением $z = F(t, x)$, то указанные точки $x^*(t)$ есть корни уравнения

$$F(t, x) = 0. \quad (7)$$

Наконец, условие (3) можно переписать в более удобном для решения виде, если продифференцировать его по времени

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} \Big|_{z=0} = V_0(t), \quad |x| < |x^*|, \quad (8)$$

где в данном случае $V_0(t)$ — известная скорость проникания (вдавливания) тела в слой. Соотношения (1), (2), (4)–(8) составляют формулировку начально-краевой задачи взаимодействия индентора и упругого слоя с изменяющейся во времени границей при заданной скорости проникания.

2. Способ решения сформулированной смешанной начально-краевой задачи изложен в [7], где указанная задача сведена к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Эта система может быть решена численно путем ее усечения и применения соответствующих квадратур для дискретизации интегральных операторов свертки, формирующих интегральные уравнения. Существует также возможность эффективного решения данной задачи на начальной стадии взаимодействия, для которой можно сформулировать несмешанную задачу, так что числовые результаты будут достаточно правдоподобны [5–7]. Несмешанная краевая задача получается, если на всей лицевой поверхности плиты $z = 0$ вместо условий (3), (4) задать нормальную скорость

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=0} = H(x^* - x)V_0(t). \quad (9)$$

Здесь $H(x)$ — единичная функция Хевисайда. Таким образом, в данной формулировке скорость деформирования лицевой поверхности плиты вне области контакта равна нулю.

Соотношения (1)–(2), (5)–(7), (9) составляют постановку так называемой “сверхзвуковой” задачи. Для ее решения применим интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральное преобразование Фурье с параметром ξ . Изображение по Лапласу будем обозначать верхним индексом L , изображение по Фурье — верхним индексом F . В результате применения интегральных преобразований с учетом начальных условий получим в пространстве изображений волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

и граничные условия

$$su_z^{LF} \Big|_{z=0} = \frac{1}{s} V_0^{LF}(s, \xi); \quad \sigma_{xz}^{LF} \Big|_{z=0} = 0; \quad u_z^{LF} \Big|_{z=h} = 0; \quad \sigma_{xz}^{LF} \Big|_{z=h} = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнений (10) имеет вид

$$\Phi^{LF} = A(s, \xi)e^{-(z/\alpha)P} + \tilde{A}(s, \xi)e^{(z/\alpha)P}, \quad \Psi^{LF} = B(s, \xi)e^{-(z/\beta)S} + \tilde{B}(s, \xi)e^{(z/\beta)S}, \quad (12)$$

где

$$P = \frac{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}}{\alpha}, \quad S = \frac{\sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{\beta}.$$

Здесь $A(s, \xi)$, $\tilde{A}(s, \xi)$, $B(s, \xi)$, $\tilde{B}(s, \xi)$ — функции, подлежащие определению. Из граничных условий (11) получим следующее выражение для изображения нормального напряжения σ_{zz}^{LF} :

$$\sigma_{zz}^{LF} = -\alpha V_0^{LF}(s, \xi) \{T(s, \xi)\}, \quad (13)$$

$$T(s, \xi) = \frac{(s^2 + 2\beta^2 \xi^2)^2}{s^3 \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2mh+z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2(m+1)h-z}{\alpha} \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}} \right) - \frac{4\beta^3 \xi^2 \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}}{\alpha s^3} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{2mh+z}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{[(2m+1)h-z]}{\beta} \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}} \right). \quad (14)$$

При получении соотношений (14) использовались степенные разложения вида $(1 - e^{-2Ph})^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2mhP}$.

Для дальнейшего необходимо конкретизировать функцию $V_0(t, x)$. Примем, что лобовая поверхность индентора в плоскости Ozx является параболической, а скорость вдавливания — постоянной и равной некоторому значению V_0 . Тогда, как нетрудно убедиться, функция $V_0(t, x)$ будет иметь вид

$$V_0(t, x) = V_0 H(kt - x^2), \quad k = 2V_0, \quad (15)$$

$$V^{LF}(s, \xi) = V_0 \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{1}{s^{3/2}} e^{-\xi^2 k / (4s)}.$$

Таким образом, задача теперь состоит в обращении выражения (13), в котором функции $T(s, \xi)$ и $V^{LF}(s, \xi)$ имеют вид (14) и (15).

3. Ограничимся определением напряжения σ_{zz} в толще слоя вдоль оси z , справедливо полагая это напряжение наиболее информативным. Выполним обращение преобразования Фурье на оси z , т. е. в операторе преобразования Фурье [4], положим $x = 0$, так что

$$\sigma_{zz}^L(s, z, x = 0) = -\alpha V_0 \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{s^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 k / (4s)} T(s, \xi) d\xi. \quad (16)$$

Введем замену переменного в подынтегральной функции $s\eta = \xi$, предполагая s вещественным положительным; получим

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L = & -V_0 \alpha \sqrt{\frac{k}{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{2mh+z}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \right)} \frac{(1+2\beta^2 \eta^2)^2}{\sqrt{1+\alpha^2 \eta^2}} d\eta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{\infty} e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{(2m+1)h-z}{\alpha} \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} \right)} \frac{(1+2\beta^2 \eta^2)^2}{\sqrt{1+\alpha^2 \eta^2}} d\eta \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{2mh+z}{\beta} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right)} \frac{4\beta^3 \eta^2 \sqrt{1+\beta^2 \eta^2}}{\alpha} d\eta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{\infty} e^{-s \left(\frac{\eta^2 k}{4} + \frac{(2m+1)h-z}{\beta} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} \right)} \frac{4\beta^3 \eta^2 \sqrt{1+\beta^2 \eta^2}}{\alpha} d\eta \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$Z_{m\alpha} = \frac{2mh+z}{\alpha}, \quad Z_{mp\alpha} = \frac{(2m+1)h-z}{\alpha},$$

$$Z_{m\beta} = \frac{2mh+z}{\beta}, \quad Z_{mp\beta} = \frac{(2m+1)h-z}{\beta},$$

и сделаем замену переменного $\eta^2 k / 4 + Z_{m\alpha} \sqrt{1+\alpha^2 \eta^2} = t$ — в 1-й сумме ($n \equiv m$ в 1-м интеграле, $n \equiv p$ во 2-м); $\eta^2 k / 4 + Z_{m\beta} \sqrt{1+\beta^2 \eta^2} = t$ — во 2-й сумме ($n \equiv m$ в 1-м интеграле, $n \equiv p$ во 2-м). Обозначим также

$$R_{m\alpha}(t, z) = \sqrt{4\alpha^2 kt + 4Z_{m\alpha}^2 \alpha^4 + k^2},$$

$$T_{mm\alpha}(t, z) = kt + 2Z_{mm\alpha}^2\alpha^2 - Z_{mm\alpha}\sqrt{4\alpha^2kt + 4Z_{mm\alpha}^2\alpha^4 + k^2},$$

$$R_{mp\alpha}(t, z) = \sqrt{4\alpha^2kt + 4Z_{mp\alpha}^2\alpha^4 + k^2},$$

$$T_{mp\alpha}(t, z) = kt + 2Z_{mp\alpha}^2\alpha^2 - Z_{mp\alpha}\sqrt{4\alpha^2kt + 4Z_{mp\alpha}^2\alpha^4 + k^2},$$

$$R_{mm\beta}(t, z) = \sqrt{4\beta^2kt + 4Z_{mm\beta}^2\beta^4 + k^2},$$

$$T_{mm\beta}(t, z) = kt + 2Z_{mm\beta}^2\beta^2 - Z_{mm\beta}\sqrt{4\beta^2kt + 4Z_{mm\beta}^2\beta^4 + k^2},$$

$$R_{mp\beta}(t, z) = \sqrt{4\beta^2kt + 4Z_{mp\beta}^2\beta^4 + k^2},$$

$$T_{mp\beta}(t, z) = kt + 2Z_{mp\beta}^2\beta^2 - Z_{mp\beta}\sqrt{4\beta^2kt + 4Z_{mp\beta}^2\beta^4 + k^2}.$$

Тогда выражение (17) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^L = & -V_0\alpha\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-st}\left\{F_{mm\alpha}(t, z) + F_{mp\alpha}(t, z) - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2}G_{mm\beta}(t, z) - \right. \\ & \left. - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2}G_{mp\beta}(t, z)\right\}dt, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$F_{mm\alpha}(t, z) = \frac{H(t - Z_{mm\alpha})\left(1 + 2\beta^2\frac{4}{k^2}T_{mm\alpha}(t, z)\right)^2\left(1 - \frac{2Z_{mm\alpha}\alpha^2}{R_{mm\alpha}(t, z)}\right)}{\sqrt{1 + \alpha^2\frac{4}{k^2}T_{mm\alpha}(t, z)}\sqrt{T_{mm\alpha}(t, z)}},$$

$$G_{mm\beta}(t, z) = H(t - Z_{mm\beta})\sqrt{T_{mm\beta}(t, z)}\sqrt{1 + \beta^2\frac{4}{k^2}T_{mm\beta}(t, z)}\left(1 - \frac{2Z_{mm\beta}\beta^2}{R_{mm\beta}(t, z)}\right),$$

$$F_{mp\alpha}(t, z) = \frac{H(t - Z_{mp\alpha})\left(1 + 2\beta^2\frac{4}{k^2}T_{mp\alpha}(t, z)\right)^2\left(1 - \frac{2Z_{mp\alpha}\alpha^2}{R_{mp\alpha}(t, z)}\right)}{\sqrt{1 + \alpha^2\frac{4}{k^2}T_{mp\alpha}(t, z)}\sqrt{T_{mp\alpha}(t, z)}},$$

$$G_{mp\beta}(t, z) = H(t - Z_{mp\beta})\sqrt{T_{mp\beta}(t, z)}\sqrt{1 + \beta^2\frac{4}{k^2}T_{mp\beta}(t, z)}\left(1 - \frac{2Z_{mp\beta}\beta^2}{R_{mp\beta}(t, z)}\right).$$

Нетрудно заметить, что интеграл, стоящий под знаком суммы в выражении (18), есть не что иное, как оператор преобразования Лапласа. Таким образом, подынтегральная функция — оригинал. Тогда, если принять во внимание, что функция $1/\sqrt{s}$ имеет оригинал вида

$1/\sqrt{\pi t}$ [4] и применить теорему о свертке оригиналов, окончательно получим следующее выражение для нормального напряжения σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = -V_0\alpha\sqrt{\frac{k}{\pi}}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\int_{Z_{mm\alpha}}^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}F_{mm\alpha}(\tau,z)d\tau + \sum_{m=0}^{\infty}\int_{Z_{mp\alpha}}^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}F_{mp\alpha}(\tau,z)d\tau - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{Z_{mm\beta}}^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}G_{mm\beta}(\tau,z)d\tau - \frac{16\beta^3}{\alpha k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{Z_{mp\beta}}^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}G_{mp\beta}(\tau,z)d\tau\right\}. \quad (19)$$

Формула (19) является точным выражением нормального напряжения $\sigma_{zz}(t, z)$ в произвольной точке слоя, лежащей на оси z . Оно представлено в виде четырех бесконечных сумм. Каждый m -й член первой (второй) суммы представляет собой m -ю волну расширения, отраженную от лицевой (тыльной) поверхности слоя; каждый m -й член третьей (четвертой) суммы представляет собой m -ю волну искажения, отраженную от лицевой (тыльной) поверхности слоя. Удерживая в упомянутых суммах конечное число членов N , получим в точке z точное значение напряжения с учетом N отражений, справедливое на интервале времени, определяемом неравенствами $z/\alpha < t < (2Nh + z)/\alpha$.

4. Вычисление нормального напряжения выполнялось численно на основе известного незамкнутого метода Ромберга, используемого для вычисления определенных интегралов с особенностью в конечной точке интервала интегрирования. Приведенные ниже результаты расчетов были выполнены для заданной постоянной скорости проникания тела с параболической фронтальной частью $V_0 = 0,01$ и толщины слоя $h = 0,2$ (в безразмерных обозначениях) при следующих значениях упругих параметров: $\alpha = 1,1$, $\beta = 0,3$.

На рис. 2, а изображены графики развития напряжения в трех характерных точках по толщине слоя: на лицевой поверхности ($z = 0$), на срединной линии ($z = h/2$) и на тыльной поверхности ($z = h$). Отчетливо видны скачки напряжения в моменты прихода волны расширения. Скачок нормального напряжения $\sigma_{zz}(t, 0, 0)$ при $t = 0$ на лицевой поверхности слоя имеет следующее значение: $\sigma_{zz}(0, 0, 0) = V_0(0)\sqrt{1 + \frac{4}{3}\frac{\mu}{K}}$. В середине слоя имеет место удвоенное количество упомянутых скачков, которое обусловлено тем обстоятельством, что в данную точку приходят поочередно волны, отраженные как от лицевой, так и от тыльной поверхности. Падение напряжения между скачками практически не наблюдается, в целом имеет место рост напряжения со временем во всех точках на оси z слоя, причем интенсивность роста увеличивается. Обратим внимание на скачки напряжения на тыльной поверхности: их величина больше, чем в точке $z = h/2$; это обусловлено удвоением напряжения вследствие выбранных граничных условий (6) на тыльной грани. Рис. 2, б представляет распределение напряжения σ_{zz} по толщине слоя в различные моменты времени $t = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$. На рисунке движение волнового возмущения происходит слева направо, т. е. в рамках временного промежутка, в течение которого существуют лишь прямые волны. Из рисунка видно, что рассматриваемое ударное воздействие обуславливает появление скачков на фронте волны расширения, тогда как волна искажения приводит к образованию излома на графике нормального напряжения. Пунктирная линия проведена через излом на каждом из графиков, который и является фронтом волны искажения.

1. *Механика контактных взаимодействий* / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматгиз, 2001. – 670 с.
2. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука, Физматгиз, 1995. – 352 с.
3. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
5. *Кубенко В. Д.* Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды // Прикл. мех. – 2004. – 40, № 11. – С. 3–44.
6. *Кубенко В. Д., Марченко Т. А.* Осесимметричная задача соударения двух одинаковых тел вращения // Там же. – № 7. – С. 70–80.
7. *Кубенко В. Д., Марченко Т. А., Старовойтов Э. И.* Об определении напряженного состояния плоского упругого слоя при ударе тупым жестким телом о его поверхность // Доп. НАН України. – 2006. – № 8. – С. 47–56.
8. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 20.07.2006

УДК 539.3

© 2007

П. С. Ковальчук, Л. А. Крук

Анализ нелинейного взаимодействия изгибных форм композитных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

The problem of the particularities of a multimode nonlinear deformation of the orthotropic cylindrical shells filled by a liquid on their free vibrations is considered. The main attention is paid to the analysis of the interaction of different forms (the modes) of a carrying shell on the realization of internal resonances.

Проблеме нелинейных колебаний тонких цилиндрических оболочек с учетом взаимодействия различных изгибных форм посвящены работы [1, 2 и др.]. В [3, 4] исследованы особенности влияния жидкостного заполнителя (частичное заполнение) на процессы динамического взаимодействия форм несущих оболочек.

В данной работе рассматривается задача о многомодовых нелинейных колебаниях композитных цилиндрических оболочек (ортотропная модель), полностью заполненных жидкостью. Главное внимание уделяется изучению специфики взаимодействия в условиях резонансов сопряженных и несопряженных изгибных форм этих оболочек при свободных колебаниях совокупной системы оболочка — жидкость.