УДК 517.538.5

Т. М. Жеребко

Рівномірна оцінка наближення аналітичних функцій алгебраїчними многочленами в областях з кутами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

A uniform estimate for the approximation of analytic functions in domains with corners by algebraic polynomials is given.

1. Формулювання основного результату. Нехай $G \subset \mathbb{C}$ — область з жордановою межею ∂G, яка складається з l гладких кривих Γ_j таких, що $\{z_j\} := \Gamma_{j-1} \bigcap \Gamma_j \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, l$, де $\Gamma_0 := \Gamma_l$. Позначимо $\alpha_j \pi$, $0 < \alpha_j \leqslant 2$, кути в точках z_j між кривими Γ_{j-1} і Γ_j, які є зовнішніми відносно області G. Також позначимо через $\overline{G} := G \bigcup \partial G$ замикання множини G.

Для функції $g\colon G \to \mathbb{C}$ позначимо $\|g\|_G := \sup\limits_{z \in G} |g(z)|$ рівномірну норму, яка може бути як скінченною, так і нескінченною. Нехай $\mathbb{P}_n$ — простір алгебраїчних многочленів степеня $< n$. Нехай Φ — конформне відображення зовнішності $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ множини $\overline{G}$ в зовнішність одиничного круга таке, що $\Phi'(\infty) > 0$. Припустимо, що існує окіл U множини $\overline{G}$ такий, що

$$c \leqslant \varphi(z)|\Phi'(z)| \leqslant C, \qquad z \in U \setminus \overline{G}, \tag{1}$$

де $c = c(G)$ і $C = C(G)$ — додатні сталі, які залежать тільки від G, і

$$\varphi(z) := \prod_{j=1}^{l} |z - z_j|^{1 - 1/\alpha_j}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

$z \neq z_j$, якщо $\alpha_j \leqslant 1$. Щоб виконувалось (1) достатньо, щоб l гладких кривих Γ_j, що складають межу області G, були, скажімо, ляпуновські криві або так звані криві типу Діні [2]. Нехай задано l чисел $0 \leqslant \beta_j \leqslant r$, $j = 1, \ldots, l$, $r \in \mathbb{N}$. Позначимо $\vec{\beta} := (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ і

$$\varphi_{\vec{\beta}}(z) := \prod_{j=1}^{l} |z - z_j|^{\beta_j - \beta_j/\alpha_j}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

$z \neq z_j$, якщо $\alpha_j \leqslant 1$. У випадку $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_l = \beta$ Ф. Абдуллаєв та І. О. Шевчук [1] отримали нерівність

$$\|(f - P_n)\varphi^{\beta - r}\|_G \leqslant \frac{c}{n^r} \|f^{(r)} \varphi^{\beta}\|_G. \tag{2}$$

З іншого боку, постає питання: чи вірний цей результат для випадку, коли β_j різні. Скажімо, для $0 < \alpha_j < 1$ цікавим є випадок "великих" β_j, а для $1 < \alpha_j < 2$ — випадок "малих" β_j.

Основним результатом роботи є

Теорема 1. *Якщо f є аналітичною в G функцією, то для кожного $n \geqslant 2lr$ існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що*

$$\left\| \frac{(f - P_n)\varphi_{\vec{\beta}}}{\varphi^r} \right\|_G \leqslant \frac{c}{n^r} \|f^{(r)} \varphi_{\vec{\beta}}\|_G. \tag{3}$$

Міркуючи так само, як і в [1], теорему 1 можна узагальнити у вигляді теореми 2 і отримати теорему 3, обернену до теореми 2. Позначимо $\alpha := \min\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$.

Теорема 2. *Якщо f є аналітичною в G функцією, то для кожного $n \geqslant \dfrac{2lr}{\alpha}$ існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що*

$$n^r \left\| \frac{(f - P_n)\varphi_{\vec{\beta}}}{\varphi^r} \right\|_G + \|P_n^{(r)} \varphi_{\vec{\beta}}\|_G \leqslant c \|f^{(r)} \varphi_{\vec{\beta}}\|_G. \tag{4}$$

Теорема 3. *Якщо $f \colon G \to \mathbb{C}$, то для кожної послідовності $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ многочленів $P_n \in \in \mathbb{P}_n$ має місце нерівність*

$$\|f^{(r)} \varphi_{\vec{\beta}}\|_G \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf_{n \geqslant lr/\alpha} \left(r! n^r \left\| \frac{(f - P_n)\varphi_{\vec{\beta}}}{\varphi^r} \right\|_G + \|P_n^{(r)} \varphi_{\vec{\beta}}\|_G \right). \tag{5}$$

2. Допоміжні результати. Надалі позначатимемо через c різні додатні сталі, які можуть залежати тільки від G і $r \in \mathbb{N}$, через C — сталі, які можуть залежати не тільки від параметрів G і r. Параметри, від яких залежать сталі C, будемо вказувати в круглих дужках. Наприклад, $C(G, r) = c$. Константи c і C можуть відрізнятися, навіть якщо вони фігурують в одному рядку.

Означення 1. Для кожної точки $z \in \mathbb{C}$ позначимо через $j(z)$ індекс найближчої точки до z серед кутових точок z_j, $j = 1, \ldots, l$. Якщо існують декілька таких найближчих точок, то, для визначеності, через $j(z)$ позначимо найменший серед них індекс.

Враховуючи означення 1, маємо

$$\varphi(z) \leqslant c|z - z_{j(z)}|^{1 - 1/\alpha_{j(z)}} \leqslant c\varphi(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad z \neq z_{j(z)}. \tag{6}$$

Означення 2. Для $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{C}$ позначимо

$$\rho_n(z) := \begin{cases} n^{-\alpha_{j(z)}}, & \text{якщо} \quad |z - z_{j(z)}| \leqslant n^{-\alpha_{j(z)}}, \\ \dfrac{1}{n}\varphi(z), & \text{якщо} \quad |z - z_{j(z)}| > n^{-\alpha_{j(z)}}. \end{cases} \tag{7}$$

Нам будуть потрібні нижченаведені леми.

Надалі $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \beta \leqslant r$ і функція f є аналітичною в області G. Нехай $T(z_0, z)$ є $r-1$-м многочленом Тейлора

$$T(z_0, z) := f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(r-1)}(z_0)}{(r-1)!}(z - z_0)^{r-1}$$

функції f у точці $z_0 \in G$.

Лема 1. *Якщо $\|f^{(r)} \varphi_{\vec{\beta}}\|_G = 1$, то для кожного $p = 0, 1, \ldots, r - 1 - [\beta_{j(z)}/2]$, $z_0 \in G$ і $z \in G$ має місце оцінка*

$$|f^{(p)}(z) - T^{(p)}(z_0, z)| \leqslant c \frac{|z - z_0|^{r-p}}{\varphi_{\vec{\beta}}(z_0)} \left(1 + \frac{|z - z_0|}{|z_0 - z_{j(z_0)}|} \right)^{r/\alpha}, \tag{8}$$

більше того,

$$|f^{(p)}(z) - T^{(p)}(z_0, z)| \leqslant c \frac{|z - z_0|^{r-p}}{\varphi_{\vec{\beta}}(z_0)}, \tag{9}$$

якщо $1 < \alpha_{j(z_0)} \leqslant 2$, *крім випадку* $r - p = 1 < \beta < 2 = \alpha_{j(z)}$. *У цьому випадку маємо оцінку*

$$|f^{(r-1)}(z) - T^{(r-1)}(z_0, z)| \leqslant \frac{c}{2-\beta_{j(z)}} \frac{|z-z_0|}{\varphi_{\vec{\beta}}(z_0)} \left(1 + \frac{|z-z_0|}{|z_0 - z_{j(z_0)}|}\right)^{r/\alpha}, \tag{10}$$

більше того,

$$|f^{(r-1)}(z) - T^{(r-1)}(z_0, z)| \leqslant \frac{c}{2-\beta_{j(z)}} \frac{|z-z_0|}{\varphi_{\vec{\beta}}(z_0)}, \tag{11}$$

якщо, відповідно, $1 < \alpha_{j(z_0)} \leqslant 2$.

Зауважимо, що функція f може бути неперервно продовжена на замикання $\overline{G}$ множини G рівністю

$$f(z) = f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} f'(\zeta)\, d\zeta,$$

де $z_0 \in G$ — фіксована точка. Таким чином, надалі без втрати загальності припускаємо, що функція f неперервна на $\overline{G}$, якщо $\|f^{(r)}\varphi_{\vec{\beta}}\|_G < +\infty$.

З леми 1 і означення 2 негайно випливає

Лема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $z_0 \in G$, $j(z_0) =: j_0$ *і* $\|\varphi_{\vec{\beta}} f^{(r)}\|_G = 1$. *Має місце:*

а) якщо $|z_0 - z_{j_0}| \geqslant n^{-\alpha_{j_0}}$, *то*

$$|f(z) - T(z_0, z)| \leqslant \frac{c}{n^{\beta_{j(z_0)}}} \frac{|z-z_0|^r}{\rho_n^{\beta_{j(z_0)}}(z_0)} \left(1 + \frac{|z-z_0|}{\rho_n(z_0)}\right)^{r/\alpha}, \qquad z \in \overline{G}, \tag{12}$$

більше того,

$$|f(z) - T(z_0, z)| \leqslant \frac{c}{n^{\beta_{j(z_0)}}} \frac{|z-z_0|^r}{\rho_n^{\beta_{j(z_0)}}(z_0)}, \qquad z \in \overline{G}, \tag{13}$$

якщо $1 < \alpha_{j(z_0)} \leqslant 2$;

б) якщо $z \in G$ *і* $|z - z_{j_0}| \leqslant |z_0 - z_{j_0}| = n^{-\alpha_{j_0}}$, *то для всіх* $p = 0, \ldots, r - 1 - [\beta_{j(z)}/2]$

$$|f^{(p)}(z) - T^{(p)}(z_0, z)| \leqslant \frac{c}{n^{\beta_{j(z)}}} \rho_n^{r-p-\beta_{j(z)}}(z_0), \tag{14}$$

крім випадку $r - p = 1 < \beta_{j(z)} < 2 = \alpha_{j(z)}$. *У цьому випадку маємо оцінку*

$$|f^{(r-1)}(z) - T^{(r-1)}(z_0, z)| \leqslant \frac{c}{2-\beta_{j(z)}} \frac{1}{n^{\beta_{j(z)}}} \rho_n^{1-\beta_{j(z)}}(z_0). \tag{15}$$

Надалі позначатимемо

$$r^* := \begin{cases} \dfrac{r}{\alpha} + r, & \text{якщо } \dfrac{r}{\alpha} \text{ ціле число}, \\[2ex] 1 + \left[\dfrac{r}{\alpha}\right] + r, & \text{якщо } \dfrac{r}{\alpha} \text{ не є цілим числом}. \end{cases} \tag{16}$$

Вважатимемо, що $n \geqslant r$, тоді без втрати загальності можемо припустити, що в точці $\hat{z} \in G$ має місце рівність

$$f^{(p)}(\widehat{z}) = 0 \tag{17}$$

для всіх $p = 0, \ldots, r-1$. Позначимо через $\hat{z}$ центр найбільшого відкритого кола, вписаного в G, чи одного з них. Поділимо G на l частин $G_j, j = 1, \ldots, l$, таким чином. Для кожного $j = 1, \ldots, l$ позначимо через ς_j точку $\varsigma_j \in \Gamma_j$ таку, що $|\varsigma_j - z_j| = |\varsigma_j - z_{j+1}|$. Позначимо через γ_j, $j = 1, \ldots, l-1$, жорданові гладкі криві з кінцями в точках ς_j і ς_{j+1} такі, що $\gamma_j \subset \subset G \bigcup \{\varsigma_j\} \bigcup \{\varsigma_{j+1}\}$, $j = 1, \ldots, l-1$ та $\gamma_j \bigcap \gamma_i = \varnothing$, якщо $i \neq j$, $i = 1, \ldots, l-1$, $j = 1, \ldots, l-1$. Ці криві ділять дану область G на l частин G_j таких, що $\gamma_j = \partial G_{j+1} \bigcap \partial G_1 \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots l-1$. Буде потрібна також допоміжна теорема 4. Нагадаємо, що ми припустили, що функція f аналітична в G, а отже, неперервна в $\overline{G}$, якщо $\|\varphi_{\vec{\beta}} f^{(r)}\|_G < +\infty$.

Теорема 4. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \beta_j \leqslant r$, *де* $j = 1, \ldots, l$, $\|\varphi_{\vec{\beta}} f^{(r)}\|_G = 1$, $D_n(\zeta, z)$ — *поліноміальне ядро Дзядика (див.* [3, 4]*), визначене в теоремі Д з* [1] *для* $m = 5r^*$, *і*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} f(\zeta) D_n(\zeta, z)\, d\zeta \quad - \tag{18}$$

многочлен степеня $< n$. *Якщо має місце* (17), *то для кожного* $j = 1, \ldots, l$ *і* $p = 0, \ldots, r - - [\beta_j/2] - 1$, *крім випадку* $r - p = 1 < \beta_j < 2 = \alpha_j$, *маємо*

$$|f^{(p)}(z) - P_n^{(p)}(z)| \leqslant \frac{c}{n^{\beta_j}} \rho_n^{r-p-\beta_j}(z), \qquad z \in G_j, \tag{19}$$

та для кожного $j = 1, \ldots, l$ *і* $p = r, \ldots, r^*$

$$|P_n^{(p)}(z)| \leqslant \frac{c}{n^{\beta_j}} \rho_n^{r-p-\beta_j}(z), \qquad z \in G_j. \tag{20}$$

У випадку $r - p = 1 < \beta_j < 2 = \alpha_j$ *має місце нерівність*

$$|f^{(r-1)}(z) - P_n^{(r-1)}(z)| \leqslant \frac{c}{(2-\beta_j) n^{\beta_j}} \rho_n^{1-\beta_j}(z), \qquad z \in G_j. \tag{21}$$

Лема 1 і теорема 4 доводяться аналогічно лемі 4 і теоремі 9 з [1] відповідно (замість оцінок з леми 5 [1] використовуємо оцінки з леми 2 даної роботи).

3. Доведення теореми. Для доведення основної теореми необхідні дві леми.

Лема 3. *Для кожного фіксованого* $j^* \in \{1, \ldots, l\}$, $p = 0, \ldots, r^* - 1$ *і будь-якого* $n \geqslant lr^*$ *існує многочлен* $Q_{j^*,p} \in \mathbb{P}_n$, *що задовольняє:*

a) $Q_{j^*,p}^{(p)}(z_{j^*}) = 1$;

b) для всіх $j = 1, \ldots, l$ *і* $q = 0, \ldots, r^* - 1$, *крім* $(j = j^*, q = p)$, *має місце*

$$Q_{j^*,p}^{(q)}(z_j) = 0;$$

c) для всіх $q = 0, \ldots, r^*$ *маємо*

$$|Q_{j^*,p}^{(q)}(z)| \leqslant \frac{c \rho_n^{r^*}(z_{j^*}) \rho_n^{r^*}(z)}{(|z - z_{j^*}| + \rho_n(z))^{2r^*-p+q}}, \qquad z \in \overline{G}.$$

Лема 4. *Нехай задано числа* $\sigma_{j,\nu}$ *такі, що*

$$|\sigma_{j,\nu}| \leqslant 1, \qquad j = 1, \ldots, l, \qquad \nu = 0, \ldots, r^* - 1.$$

Тоді многочлен

$$Q_n(z) := \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{n^{\beta_j}} \sum_{\nu=0}^{r^*-1} \sigma_{1,\nu} \rho_n^{r-\beta_j-\nu}(z_j) Q_{j,\nu}(z) \tag{22}$$

степеня $< n$ *задовольняє для всіх* $q = 0, \ldots, r^*$

$$|Q_n^{(q)}(z)| \leqslant \frac{c}{n^{\beta_j}} \rho_n^{r-\beta_j-q}(z), \qquad z \in \overline{G_j} \tag{23}$$

і

$$Q_n^{(q)}(z_j) = \frac{1}{n^{\beta_j}} \sigma_{j,q} \rho_n^{r-\beta_j-q}(z_j), \qquad j = 1, \ldots, l, \qquad q \neq r^*. \tag{24}$$

Доведення теореми 1. Використовуючи леми 3, 4 та теорему 4, доводимо теорему аналогічно теоремі 9 зі статті [1].

1. *Abdullayev F. G., Shevchuk I. A.* Uniform estimates for polynomial approximation in domains with corners // J. Approxim. Theory. – 2005. – **137**. – P. 143–165.
2. *Алибеков Г. А.* Свойства конформного отображения на областях с углами // Вопросы теории приближений функций и ее приложение / Ин-т математики АН УССР. – Киев, 1976. – С. 4–18.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – Москва: Наука, 1977. – 512 с.
4. *Шевчук И. А.* Приближение на отрезке и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 18.09.2006