УДК 530.3+550.344

Є. М. Бицань

Поширення плоских теплових і термопружних сейсмічних хвиль в узагальненому квазіпружному чотириелементному реологічному тілі типу Максвелла

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

The problem of propagation of plane thermal and thermoelastic seismic waves in a generalized quasielastic four-element Maxwell's body has been solved. The analytical dispersive formulas have been obtained for the phase velocities and absorption coefficients in the wave processes under study.

Сейсмічні хвилі дають важливу інформацію про будову Землі, і їх дослідження — одна з найважливіших задач геофізики. Між параметрами сейсмічних хвиль і властивостями фізичних середовищ, в яких вони поширюються, існує зв'язок, який є предметом дослідження динамічної теорії пружності. Реальні фізичні середовища є непружними [1], тобто такими, що не задовольняють закону Гука. Насамперед непружність фізичних порід проявляється у перетворенні механічної енергії в теплову і пов'язаних з цим згасанні сейсмічних хвиль, зсуві фаз між напругою й деформацією та повзучості, а також враховується за допомогою реологічних моделей [2] шляхом включення в розрахункову математичну модель поряд із пружними в'язкі й пластичні елементи. Врахування підвищеної температури середовища зводиться до додаткових доповнень у математичну модель.

У повідомленні розглядається задача про поширення плоских теплових і термопружних хвиль в однорідному ізотропному середовищі, непружні властивості якого апроксимуються реологічним тілом (РТ), що схематично зображається паралельним об'єднанням двох реологічних тіл Максвелла. Реологічна формула цього тіла записується таким чином: $M^* = (H-N)|(H-N)$, де H — пружний, а N — в'язкий елементи; вертикальна риска означає паралельне, а горизонтальна — послідовне з'єднання. Реологічне рівняння узагальненого тіла Максвелла виводиться з умови, що його деформація дорівнює сумі деформацій у його складових, а напруга в досліджуваному тілі та в РТ — складових однакова:

$$\sigma_I = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \qquad \varepsilon_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon. \tag{1}$$

Тут σ — напруга; ε — деформація; нижній індекс указує на належність до певного РТ.

Зв'язок між напругою й деформацією в реологічному тілі Максвелла описується таким чином:

$$\sigma + \tau^{(i)}\dot{\sigma}_i = \eta_i[\dot{\varepsilon}_i - \beta_{0i}\dot{\theta}_i], \tag{2}$$

де $\tau^{(i)} = \eta_i/E_i$ — час релаксації напруги при постійній деформації в i-му тілі Максвелла, η_i і E_i — його в'язкі та пружні модулі; $\beta_{0i} = (1+\nu_i)/(1-\nu_i)\alpha_{T_i}$, ν_i — коефіцієнт Пуансона, α_{Ti} — коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\theta_i = T_i - T_{0i}$, T_{0i} — температура недеформованого, а T_i — деформованого i-го тіла Максвелла в точці з поточною координатою $x(\theta_i/T_{0i} \ll 1)$. Крапка зверху означає диференціювання по часовій координаті t.

Реологічне рівняння досліджуваного тіла одержимо, виключаючи із системи (2) за допомогою рівнянь (1) парціальні напруги й деформації, і припускаючи, що $\theta_2\beta_{02}/\beta_{01} \cong \theta_1 = \theta$:

$$\sigma + (\tau_1 + \tau_2)\dot{\sigma} + \tau_1\tau_2\ddot{\sigma} = \mathrm{H}[\dot{\varepsilon} + \tau_3\ddot{\varepsilon} - \beta_{01}(\dot{\theta} + \tau_3\ddot{\theta})], \tag{3а}$$

де $\tau_3 = \dfrac{\eta_1\eta_2(E_1 + E_2)}{(\eta_1 + \eta_2)E_1E_2}$, $\mathrm{H} = \eta_1 + \eta_2$ — релаксуючий в'язкий модуль узагальненого чотириелементного реологічного тіла Максвелла.

Рівняння (3а) можна записати в стандартній формі через релаксаційні параметри:

$$\sigma + (\tau_{\rm rel}^{(1)} + \tau_{\rm rel}^{(2)})\dot{\sigma} + \tau_{\rm rel}^{(1)}\tau_{\rm rel}^{(2)}\ddot{\sigma} = \mathrm{H}[\dot{\varepsilon} + \tau_{\rm ret}\ddot{\varepsilon} - \beta_{01}(\dot{\theta} + \tau_{\rm ret}\ddot{\theta})], \tag{3б}$$

де $\tau_{\rm rel}^{(1)} = \tau_1$ і $\tau_{\rm rel}^{(2)} = \tau_2$ — часи релаксації напруги при постійній деформації (часи релаксації), а $\tau_{\rm ret} = \tau_3$ — час релаксації деформації при постійній напрузі (часи післядії) в узагальненому реологічному тілі Максвелла.

Система рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності складається з рівняння руху в переміщеннях і рівняння теплопровідності.

Рівняння руху для плоскої поздовжньої одновимірної хвилі опишемо формулою [3]

$$\rho\ddot{u} = \sigma', \tag{4}$$

де u — зміщення середовища; ρ — питома густина; штрихом позначено диференціювання за лінійною змінною x.

Продиференціюємо співвідношення (3а) за змінною x і підставимо σ з рівняння (4). З огляду на те, що $\varepsilon = u'$, одержимо в підсумку рівняння руху в переміщеннях для досліджуваного тіла в такому вигляді:

$$\dot{u} + (\tau_1 + \tau_2)\ddot{u} + \tau_1\tau_2 u = \frac{\mathrm{H}[u'' + \tau_3\dot{u}'' - \beta_{01}(\theta' + \tau_3\dot{\theta}')]}{\rho}. \tag{5}$$

Рівняння теплопровідності запишемо так [4]:

$$\theta'' - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - m\dot{u}' = 0, \tag{6}$$

де κ — коефіцієнт температуропровідності; $m = \beta_{01}E_0T_0/\lambda_q$, λ_q — коефіцієнт теплопровідності, $E_0 = E_1 + E_2$ — зведений пружний модуль.

Розв'язок системи рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності (5), (6) буде таким [4]:

$$u = u_0 e^{i(kx - \omega t)}, \qquad \theta = \theta_0 e^{i(kx - \omega t)}, \tag{7}$$

де u_0 і θ_0 — довільні постійні інтегрування; ω — кругова частота; $k = \omega/c_0 + i\alpha$ — хвильове число, c_0 — фазова швидкість, а α — згасання досліджуваних сейсмічних хвиль; $i = \sqrt{-1}$.

Підставимо u й θ у формі (7) у систему рівнянь термопружності (5), (6) і приходимо до такої однорідної лінійної системи рівнянь для визначення сталих інтегрування u_0 і θ_0:

$$\begin{gathered}\left(-k^2 + \frac{i\omega}{\kappa}\right)\theta_0 - m\omega k u_0 = 0,\\ iH\beta_{01}k(1 - i\Delta_3)\theta_0 + [-\rho\omega(\Delta_1 + \Delta_2 + i(1 - \Delta_1\Delta_2)) + Hk^2(1 - i\Delta_3)]u_0 = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

де $\Delta_i = \omega\tau_i$ — безрозмірний параметр.

Умова нетривіальності розв'язку системи рівнянь динамічної теорії термопружності для досліджуваного тіла дає таке характеристичне біквадратне рівняння для хвильових чисел:

$$\mathrm{H}(1-i\Delta_3)k^4-\left[\rho\omega(\Delta_1+\Delta_2+i(1-\Delta_1\Delta_2))+\frac{\mu\omega\mathrm{H}}{\kappa}(1-i\Delta_3)+im\omega\mathrm{H}\beta_{01}(1-i\Delta_3)\right]k^2+$$
$$+\frac{i\rho\omega^2}{\kappa H}(\Delta_1+\Delta_2+i(1-\Delta_1\Delta_2))=0, \qquad (9)$$

яке можна записати у зведеній формі таким чином:

$$k^4-\left[\frac{\omega^2}{c_0^2}+\frac{\omega}{\kappa}(1+\delta_0)i\right]k^2+\frac{i\omega^3}{\kappa c_0^2}=0, \qquad (10)$$

де $c_0^2 = E/\rho$ — комплексна швидкість; $E = E_0(1-i\beta)$ — комплексний, а $E_0 = \mathrm{Re}(E)$ — динамічний модуль; β — фазова характеристика комплексного модуля, яка малá відносно одиниці і називається кутом втрат або внутрішнім тертям [5, 6]; $\delta_0 = m\kappa\beta_{01}$ — константа зв'язності, яка малá порівняно з одиницею [4, 7].

Внутрішнє тертя, комплексна константа зв'язності, комплексний і динамічний модулі визначаються відповідно виразами:

$$E=\frac{\omega\mathrm{H}(1-i\Delta_3)}{\Delta_1+\Delta_2+i(1-\Delta_1\Delta_2)}=\frac{\omega\mathrm{H}(1-i\omega a_3)}{\omega a_1+i(1-\omega^2a_2)}=E_1-iE_2=E_0(1-i\beta), \qquad (11а)$$

$$E_0=\frac{\omega\eta_H(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+\Delta_1\Delta_2\Delta_3)}{1+\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_1^2\Delta_2^2}=\omega^2\eta_H\frac{a_1-a_3(1-\omega^2a_2)}{a_1^2\omega^2+(1-\omega^2a_2)^2}, \qquad (11б)$$

$$\beta=-\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(E)}{\mathrm{Re}(E)}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\Delta_1\Delta_2+\Delta_3(\Delta_1+\Delta_2)}{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3(1-\Delta_1\Delta_2)}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\omega^2a_2+\omega^2a_1a_3}{\omega(a_1-a_3(1-\omega^2a_2))}\right). \qquad (11в)$$

Іноді для аналізу непружних особливостей фізичних середовищ використовуються миттєвий та тривалий модулі [7]:

$$E^{(0)}=E(0), \qquad E^{(\infty)}=E(\infty).$$

З формул (11) випливає, що комплексний модуль і зв'язані з ним динамічний модуль, комплексна швидкість і внутрішнє тертя визначаються через механічні або релаксаційні константи і не залежать від температури.

Зауважимо, що фізичні породи є переважно слабко пружними [8], тобто для них має місце така нерівність: $\beta \ll 1$, а тому у формулі (11в) для внутрішнього тертя можна опустити символ арктангенса.

Корені біквадратного рівняння (7) визначаємо за такою формулою:

$$k_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_0^2}+\frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0)\pm\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}+\frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0)\right)^2-\frac{4i\omega^3}{\kappa c_0^2}}\right], \qquad (12)$$

яку можна перетворити, враховуючи ту обставину, що складові в радикалі мають різний порядок, і після елементарних перетворень одержати в підсумку такий вираз для хвильових чисел:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0) \pm \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0)\right)\sqrt{1+\delta}\right], \tag{13}$$

де

$$\delta = \frac{4i\delta_0\omega^2/c_0^2}{[\omega^2/c_0^2 - i\omega(1-\delta_0)/\kappa]^2} = \frac{4i\delta_0\xi}{[\xi - i(1-\delta_0)]^2} \ll 1, \qquad \xi = \frac{\omega\kappa}{c_0^2} \ll 1.$$

Рівняння (13) дає дві пари хвильових чисел. Перша пара належить термопружній хвилі, а друга — тепловій. Додатне значення береться для хвилі, що рухається в позитивному напрямі осі x, а від'ємне — для хвилі, що рухається у зворотному напрямі.

Модуль комплексної константи δ малий відносно одиниці і це дозволяє лінеаризувати радикал у формулі (13), і одержати в підсумку лінеаризовані формули для хвильових чисел:

$$k_1 = \frac{\omega}{\widehat{c}_0\sqrt{1-i\beta}}\frac{1-\delta_0}{2}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0/2)}{2\kappa}}(1-i), \tag{14}$$

де $\widehat{c}_0 = \sqrt{E_0/\rho}$.

Співвідношення (14) для слабопружних середовищ трансформуються в такі вирази:

$$k_1 = \frac{\omega}{\widehat{c}_0}[1-\delta_0/2 + i\beta/2], \qquad k_2 = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0)}{2\kappa}}[1+i],$$

за допомогою яких можна одержати вирази для фазових швидкостей і коефіцієнтів згасання термопружних і теплових сейсмічних хвиль [5]:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_1)} = \frac{\widetilde{c}_0}{1-\delta_0/2}, \qquad \alpha_1 = \mathrm{Im}(k_1) = \frac{\omega\beta}{2\widetilde{c}_0}, \\ V_2 &= \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_2)} = \sqrt{\frac{2\kappa(1+\delta_0)}{\omega}}, \qquad \alpha_2 = \mathrm{Im}(k_2) = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0)}{2\kappa}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Далі розглянемо поведінку досліджуваного реологічного тіла в стандартних випадках у фіксованій точці $x = x_0$.

1. Якщо в тілі підтримується постійна напруга $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$, то в цьому випадку в тілі відбувається процес повзучості. Рівняння теплопровідності (6) дає таку залежність між температурою й деформацією:

$$\theta = -m\kappa\varepsilon, \tag{16}$$

а реологічне рівняння (3а) зводиться до диференціального рівняння відносно деформації ε:

$$\dot{\varepsilon} + \tau_3\ddot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\mathrm{H}(1+\delta_0)}, \tag{17}$$

розв'язок якого запишемо так:

$$\varepsilon = \tau_3\left(\frac{\sigma_0}{\mathrm{H}(1+\delta_0)} - \dot{\varepsilon}(0)\right)e^{-t/\tau_3} + \varepsilon(0) + \tau_3\dot{\varepsilon}(0) + \frac{\sigma_0(t-\tau_3)}{\mathrm{H}(1+\delta_0)}, \tag{18}$$

де $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$, $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}(0)$, $\varepsilon^* = \sigma_0/[H(1+\delta_0)]$ — частковий розв'язок неоднорідного рівняння (17), а час післядії τ_3 задовольняє такому рівнянню:

$$\tau_3 = \frac{\eta_1\eta_2(E_1+E_2)}{(\eta_1+\eta_2)E_1E_2}. \tag{19}$$

У виразі (18) для деформації в квазіпружному узагальненому тілі Максвелла є складова, прямо пропорційна часу, звідки випливає, що при постійній напрузі деформація в ньому необмежено зростає, і в тілі буде відбуватися плин. Отже, це тіло є у певному розумінні рідиною.

Далі з рівняння (19) знаходимо фізичне трактування реологічної сталої τ_3. Це час післядії (повзучості), який для фізичних порід сягає кількох тисяч років [9], так що надалі будемо вважати, що $\tau_3 \gg 1$.

Якщо в момент $t = t_1$ тіло розвантажити, то в ньому буде відбуватися післядія. Деформація в цьому випадку можна описати таким виразом:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \tau_3\dot{\varepsilon}_1(1 - e^{-(t-t_1)/\tau_3}),$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}(t_1)$ і буде змінюватись від $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ при $t = t_1$, до $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \tau_{\mathrm{rel}}\dot{\varepsilon}_1$ при $t = \infty$.

2. В випадку, коли в тілі підтримується постійна деформація $\varepsilon = \widehat{\varepsilon} = \mathrm{const}$, має місце релаксація напруг, а реологічне рівняння (3а) дає таке диференціальне рівняння для напруг σ

$$\sigma + (\tau^{(1)} + \tau^{(2)})\dot{\sigma} + \tau^{(1)}\tau^{(2)}\ddot{\sigma} = 0, \tag{20}$$

розв'язок якого набуде вигляду

$$\sigma = \frac{\tau_1(\sigma_0 + \tau_2\dot{\sigma}_0)}{\tau_1 - \tau_2}e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2(\sigma_0 + \tau_1\dot{\sigma}_0)}{\tau_2 - \tau_1}e^{-t/\tau_2}, \tag{21}$$

де $\sigma_0 = \sigma(0)$, $\dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma}(0)$, а часи релаксації напруг при постійній деформації ν_i (часи післядії) задовольняють характеристичному рівнянню

$$\tau^2 - (\tau^{(1)} + \tau^{(2)})\tau + \tau^{(1)}\tau^{(2)} = 0, \tag{22}$$

і будуть залежати від співвідношення парціальних часів релаксацій $\tau^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
&\tau_1 = \frac{\eta_2}{E_2} = \tau^{(2)}, \qquad \tau_2 = \frac{\eta_1}{E_1} = \tau_1^{(1)}, \qquad \tau^{(2)} > \tau^{(1)},\\
&\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1} = \tau^{(1)}, \qquad \tau_2 = \frac{\eta_2}{E_2} = \tau^{(2)}, \qquad \tau^{(2)} < \tau^{(1)},\\
&\tau_1 = \tau_2 = \tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \frac{\eta_1}{E_1} = \frac{\eta_2}{E_2}, \qquad \tau^{(1)} = \tau^{(2)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

У третьому випадку маємо виродження — узагальнене реологічне тіло Максвелла буде еквівалентним ординарному тілу Максвелла, механічні параметри якого дорівнюють сумі відповідних параметрів узагальненого тіла Максвелла.

Зауважимо, що чотириелементне узагальнене тіло Максвелла на відміну від інших квазіпружних чотириелементних реологічних тіл (Бюргерса, Трутона–Ренкіна і узагальненого тіла Джеффріса) не вимагає додаткових вимог до його релаксаційних параметрів.

Одержані вирази для часів релаксацій та післядії разом з відомою формулою для релаксованого пружного модуля дозволяють виразити механічні параметри узагальненого тіла Максвелла (пружні та в'язкі елементи) через його реологічні константи — часи релаксацій та релаксований модуль.

Запишемо реологічні параметри досліджуваного тіла, і одержимо систему рівнянь четвертого порядку відносно механічних параметрів, розв'язок якої має такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&E_M^{(1)} = \frac{(\tau_2 - \tau_3)\mathrm{H}}{(\tau_2 - \tau_1)\tau_2}, \qquad E_M^{(2)} = \frac{(\tau_3 - \tau_1)\mathrm{H}}{(\tau_2 - \tau_1)\tau_1},\\
&\eta_M^{(1)} = \frac{(\tau_2 - \tau_3)\mathrm{H}}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \eta_M^{(2)} = \frac{(\tau_3 - \tau_1)\mathrm{H}}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \tau^{(2)} > \tau^{(1)},\\
&E_M^{(1)} = \frac{(\tau_1 - \tau_3)\mathrm{H}}{(\tau_1 - \tau_2)\tau_2}, \qquad E_M^{(2)} = \frac{(\tau_3 - \tau_2)\mathrm{H}}{(\tau_1 - \tau_2)\tau_1},\\
&\eta_M^{(1)} = \frac{(\tau_1 - \tau_3)\mathrm{H}}{\tau_1 - \tau_2}, \qquad \eta_M^{(2)} = \frac{(\tau_3 - \tau_2)\mathrm{H}}{\tau_1 - \tau_2}, \qquad \tau^{(1)} > \tau^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

3. Якщо в тілі підтримується гармонічне напруження $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$, то деформація у цьому випадку буде запізнюватись по фазі від напруження і запишеться як

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \phi)}, \tag{25}$$

а зсув фаз ϕ між деформацією й напруженням і початкова деформація ε_0 визначаються такими формулами:

$$\phi = \frac{\operatorname{arctg} E_2}{E_1} = \beta, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{|E|}, \tag{26}$$

де $E = E_0(1 + i\beta) = E_1 + iE_2$ — комплексний в'язкопружний модуль, який визначається за формулою:

$$K = \frac{\omega\eta_H(1 + \delta_0 c_H + i\Delta_3(1 + \delta_0))}{\Delta_1 + \Delta_2 - i(1 - \Delta_1\Delta_2)}. \tag{27}$$

1. *Зинер К. М.* Упругость и неупругость металлов. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – 396 с.
2. *Рейнер М.* Реология. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
3. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 165 с.
5. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения. – Москва: Госстройиздат, 1960. – 152 с.
6. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 239 с.
7. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. – Москва: Госстройиздат, 1968. – 416 с.
8. *Уайт Дж.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. – Москва: Недра, 1986. – 261 с.
9. *Жарков В. Н.* Внутреннее строение Земли и планет. – Москва: Наука, 1983. – 416 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 01.03.2007