ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2007

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.24:544.77

Член-корреспондент НАН Украины **Б. И. Басок, Б. В. Давыденко, А. И. Тесля**

Математическая модель и метод расчета температурного состояния капсулы, движущейся в формующей среде

On the basis of an approximate mathematical model, the calculation of time variations of the temperature field of a composite droplet (external layer and contents) is executed. A droplet moves in a molding liquid and, as a result of the external layer jellification, transforms into a capsule. The time period before the jellification process beginning is considered.

Капсулированные продукты широко применяются в пищевой промышленности и медицине. Одним из способов получения капсул является монодисперсное дробление бинарной коаксиальной струи, внутренняя составляющая которой представлена капсулируемой жидкостью, а наружная — жидкостью вещества оболочки капсулы. Составные капли, полученные в результате дробления бинарной струи, направляются в формующую жидкость, в среде которой жидкая оболочка затвердевает. Обычно это происходит вследствие изменения ее температуры. Если, например, вещество оболочки представляет собой раствор агароида, желатина или подобных ему веществ, то в результате охлаждения ниже 40 °C такой раствор из жидкого превращается в желеобразный. Оболочка при этом имеет форму сферического слоя.

Для выбора оптимального температурного режима капсулирования, а также с целью последующего создания эффективных капсулирующих устройств, рассмотрим метод расчета температурного поля составной сферической капли, имеющей в начальный момент времени жидкую оболочку и жидкую сердцевину, свободно движущейся под действием силы тяжести в вязкой формующей среде. Жидкости, составляющие оболочку и сердцевину, а также формующая жидкость — несмешивающиеся. Считается, что сердцевина имеет форму сферы, а оболочка — сферического слоя. Оболочка и сердцевина принимаются концентрическими. Теплофизические свойства всех компонентов системы предполагаются постоянными вплоть до момента начала желирования оболочки. В начальный момент времени температуры сердцевины, оболочки и формующей жидкости составляют соответственно $t_\text{с}$, $t_\text{о}$ и $t_\text{ф}$ ($t_\text{о} > t_\text{ф}$). В формующей среде оболочка капли остывает. С момента достижения наружной поверхностью оболочки температуры $t_\text{ж}$ начинается процесс желирования оболочки.

Жидкие среды, составляющие рассматриваемую систему, имеют весьма высокую вязкость, а их плотности — близкие по значениям. В связи с этим, можно предположить, что скорость движения капли под действием силы тяжести в формующей среде будет сравнительно низкой. Кроме того, при таких условиях за достаточно короткий промежуток времени капля приобретает постоянную скорость движения (равновесную скорость или скорость витания) и все гидродинамические процессы становятся стационарными [1]. Это позволяет описать задачу движения капсулы системой уравнений Стокса. В сферических координатах с началом в центре массы капли эта система, записанная в безразмерной форме, имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial R}+\frac{2V}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{U\,\mathrm{ctg}(\theta)}{R}=0; \tag{1}$$

$$\sigma_\beta\frac{\partial P}{\partial R}=-G\frac{\sigma_\beta}{\zeta_\beta}(1-\zeta_\beta)\cos(\theta)+\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial V}{\partial R}+\frac{\mathrm{ctg}(\theta)}{R^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}-\frac{2V}{R^2}-$$
$$-\frac{2}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}-\frac{2ctg(\theta)}{R^2}U; \tag{2}$$

$$\frac{\sigma_\beta}{R}\frac{\partial P}{\partial \theta}=G\frac{\sigma_\beta}{\zeta_\beta}(1-\zeta_\beta)\sin(\theta)+\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial U}{\partial R}+\frac{\mathrm{ctg}(\theta)}{R^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}-\frac{U}{R^2\sin^2(\theta)}, \tag{3}$$

где

$$U=\frac{u}{w};\qquad V=\frac{v}{w};\qquad R=\frac{r}{r_k};\qquad \zeta_\beta=\frac{\rho_0}{\rho_\beta};\qquad \sigma_\beta=\frac{\mu_0}{\mu_\beta};$$

$$P=\frac{p^* r_k}{\mu_0 w};\qquad G=\frac{g r_k^2\rho_0}{\mu_0 w};\qquad p^*=p+\rho_0 g z-p_{\text{ат}},$$

r, θ — сферические координаты (радиальная и угловая); z — вертикальная координата; v, u — радиальная и касательная составляющие скорости в подвижной системе координат; w — равновесная скорость вертикального движения центра массы капли; p — давление; $p_{\text{ат}}$ — атмосферное давление; g — ускорение силы тяжести; r_k — внешний радиус оболочки капсулы; μ — динамический коэффициент вязкости; ρ — плотность; β — индекс, характеризующий отношение физической величины к той или иной жидкой среде: $\beta=0$ — формующая жидкость, в среде которой движется капля; $\beta=1$ — жидкость оболочки; $\beta=2$ — жидкость содержимого капсулы оболочки.

Граничными условиями для уравнений (1)–(3) будут:

$$\theta=0;\pi:\qquad U_\beta=0;\qquad \frac{\partial V_\beta}{\partial \theta}=0;\qquad \beta=0;1;2; \tag{4}$$

$$R\to\infty:\qquad V\to-\cos(\theta);\qquad U\to\sin(\theta);\qquad P\to 0; \tag{5}$$

$$R=1:\qquad V_1=V_0=0;\qquad U_1=U_0;\qquad \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U_1}{R}\right)_{R=1}=\sigma_1\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U_0}{R}\right)_{R=1}; \tag{6}$$

$$R=R_{\text{o}}:\qquad V_1=V_2=0;\qquad U_1=U_2;\qquad \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U_1}{R}\right)_{R=R_{\text{o}}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U_2}{R}\right)_{R=R_{\text{o}}}; \tag{7}$$

$$R=0:\qquad U_2;V_2;P_2 \text{ — величины конечные},$$

где $R_{\text{o}}=r_{\text{o}}/r_k$, r_{o} — внутренний радиус оболочки капсулы.

Система уравнений (1)–(3) описывает движение капли в вязкой среде с малой скоростью. Один из методов ее решения рассмотрен в [2]. Условие (4) означает, что рассматриваемая задача симметрична относительно вертикальной оси. Эти условия позволяют для любого β представить решение системы уравнений (1)–(3) в виде

$$V = f(R)\cos(\theta), \qquad U = -q(R)\sin(\theta), \qquad P = \frac{h(R)}{\sigma_\beta}\cos(\theta).$$

Подстановка этих выражений в уравнения (1)–(3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$f' + \frac{2}{R}(f - q) = 0,$$
$$h' = -G\left(\frac{1}{\zeta_\beta} - 1\right)\sigma_\beta + f'' + \frac{2}{R}f' + \frac{4}{R^2}(q - f),$$
$$\frac{h}{R} = -G\left(\frac{1}{\zeta_\beta} - 1\right)\sigma_\beta + q'' + \frac{2}{R}q' + \frac{2}{R^2}(f - q).$$

Решение полученной системы методом исключения приводит к дифференциальному уравнению четвертого порядка для определения f

$$R^3 f'''' + 8R^2 f''' + 8Rf'' - 8f' = 0.$$

Решение данного уравнения в каждой из рассматриваемых сред имеет следующий вид:

для среды формующей жидкости

$$f_0 = b_0 + b_1 R^{-1} + b_3 R^{-3};$$

для среды жидкости оболочки

$$f_1 = c_0 + c_2 R^2 + d_1 R^{-1} + d_3 R^{-3};$$

для среды капсулируемой жидкости

$$f_2 = a_0 + a_2 R^2,$$

где a, b, c, d — коэффициенты, определяемые из граничных условий (5)–(7).

Определив f_β, можно из оставшихся дифференциальных уравнений найти функции q_β и h_β, а затем — поля скоростей и давлений в каждой из сред. Для нахождения равновесной скорости движения капсулы необходимо рассчитать результирующую силу сопротивления F, действующую на капсулу со стороны формующей жидкости. Для этого используется формула

$$F = 2\pi r_k^2 \int\limits_0^\pi \left[\left(-p^* + 2\mu_0\frac{\partial v}{\partial r}\right)\cos(\theta) - \mu_0\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\sin(\theta)\right]_{r=r_k} \sin(\theta)\,d\theta.$$

Подставляя в нее функции u, v, p^*, найденные для внешнего течения, получим

$$F = -4\pi r_k b_1 w\mu_0 + \frac{4}{3}\pi g r_k^3 \rho_0.$$

Приравнивая значение F весу капсулы, получим уравнение для определения равновесной скорости w, из которого следует, что

$$w = \frac{r_k^3(\rho_1 - \rho_0) + r_\text{o}^3(\rho_2 - \rho_1)}{3 r_k b_1 \mu_0}.$$

Теплоперенос в системе формующая жидкость — оболочка капсулы — содержимое капсулы описывается уравнением энергии, в котором, в отличие от уравнений динамики (2), (3), нестационарный и конвективный члены сохранены вследствие высоких значений чисел Прандтля, характерных для рассматриваемых жидкостей. В сферических координатах уравнение энергии имеет вид

$$\Pr\left(\frac{\partial T}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \mathrm{Re}\,V\frac{\partial T}{\partial R} + \mathrm{Re}\,\frac{U}{R}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{\eta_\beta}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{ctg}(\theta)}{R^2}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right), \qquad (8)$$

где $T = \dfrac{t - t_\text{ф}}{t_\text{о} - t_\text{ф}}$; $\eta_\beta = \dfrac{a_0}{a_\beta}$; $\mathrm{Fo} = \dfrac{\tau\mu_0}{\rho_0 r_k^2}$; $\mathrm{Re} = \dfrac{w r_k \rho_0}{\mu_0}$; $\Pr = \dfrac{\mu_0}{\rho_0 a_0}$; t — температура; a — коэффициент температуропроводности; τ — время.

Уравнение (8) решается при следующих граничных условиях:

$$R = 0: \qquad T_2 \text{ — величина конечная}$$

$$\theta = 0; \pi: \qquad \frac{\partial T_\beta}{\partial\theta} = 0; \qquad \beta = 0; 1; 2;$$

$$R \to \infty: \qquad T \to 0;$$

$$R = 1: \qquad T_1 = T_0; \qquad \left.\frac{\partial T_1}{\partial R}\right|_{R=1} = \kappa_1 \left.\frac{\partial T_0}{\partial R}\right|_{R=1}; \qquad (9)$$

$$R = R_\text{o}: \qquad T_1 = T_2; \qquad \left.\frac{\partial T_1}{\partial R}\right|_{R=R_\text{o}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left.\frac{\partial T_2}{\partial R}\right|_{R=R_\text{o}}, \qquad (10)$$

где $\kappa_\beta = \lambda_0/\lambda_\beta$, λ — коэффициент теплопроводности.

Начальными условиями для уравнения (8) будут: при $\mathrm{Fo} = 0$: $T_0 = 0$; $T_1 = 1$; $T_2 = (t_\text{c} - t_\text{ф})/(t_\text{о} - t_\text{ф})$.

Для решения уравнения (8) воспользуемся методом, предложенным в [3]. Для областей оболочки капсулы ($R_\text{o} < R < 1$) и ее содержимого ($0 < R < R_\text{o}$, $R_\text{o} = r_\text{o}/r_k$) перейдем от переменной T к переменной $H = TR$. Это позволит задать при $R = 0$ условие $H = 0$. Уравнение (8) в переменных H, R, θ будет иметь вид

$$R^2\frac{\partial H}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \mathrm{Re}\,V_\beta R\left(R\frac{\partial H}{\partial R} - H\right) + \mathrm{Re}\,U_\beta R\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{1}{\eta_\beta \Pr}\left(R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}(\theta)\frac{\partial H}{\partial\theta}\right), \qquad (11)$$

где V_β и U_β — скорости, которые рассчитываются по формулам, выведенным для области содержимого капсулы ($\beta = 2$) и оболочки капсулы ($\beta = 1$).

Во внешней области ($1 < R < \infty$) удобно от радиальной переменной R перейти к $S = 1/R$. Это дает возможность рассматривать задачу внешнего теплопереноса в ограниченной области ($0 < S < 1$). Уравнение (8) в переменных T, S, θ примет вид:

$$\frac{1}{S^2}\frac{\partial T}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \mathrm{Re}\,V\frac{\partial T}{\partial S} + \mathrm{Re}\,\frac{U}{S}\frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{1}{\Pr}\left(S^2\frac{\partial^2 T}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}(\theta)\frac{\partial T}{\partial\theta}\right). \qquad (12)$$

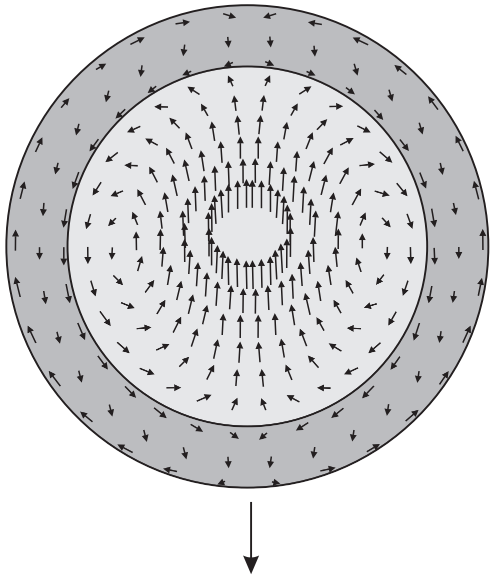

Рис. 1. Картина течения жидкостей в оболочке капсулы и ее содержимом

Для скоростей V и U, входящих в уравнение (12), используются зависимости, полученные для области внешнего течения ($\beta = 0$). В новых переменных записываются и условия (9), (10) на границах раздела сред.

Для решения уравнений (11) и (12) применяется метод конечных разностей. В узлах, лежащих на границах раздела сред, разностные уравнения переноса заменяются условиями сопряжения (9), (10), записанными также в разностной форме.

В качестве примера расчета температурного поля капсулы в процессе ее движения и охлаждения в формующей среде рассматривается случай, соответствующий технологии производства имитированной красной зернистой икры [4]. В соответствии с данной технологией, в качестве формующей жидкости используется растительное масло, охлажденное до температуры $t_{\text{ф}} = 10$ °C. Диаметры оболочки: внешний — $2r_k = 6$ мм, внутренний — $2r_{\text{o}} = 4{,}8$ мм.

Вещество оболочки — раствор агароида с начальной температурой $t_{\text{o}} = 65$ °C. Содержимое капсулы — раствор капсулируемых веществ (вкусовых добавок и пищевого красителя) в растительном масле, который имеет начальную температуру $t_{\text{c}} = 25$ °C. Расчеты выполнены для следующих значений теплофизичних свойств компонентов системы:

$$C_0 = 2150 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};\quad \rho_0 = 923 \text{ кг/м}^3;\quad \mu_0 = 0{,}1 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2;\quad \lambda_0 = 0{,}135 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$C_1 = 3232 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};\quad \rho_1 = 1083 \text{ кг/м}^3;\quad \mu_1 = 0{,}2 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2;\quad \lambda_1 = 0{,}432 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$C_2 = 2150 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)};\quad \rho_2 = 915 \text{ кг/м}^3;\quad \mu_2 = 0{,}09 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2;\quad \lambda_2 = 0{,}132 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}.$$

Поля скоростей течения жидкостей, составляющих бинарную каплю, представлены на рис. 1. Как видно из рисунка, движение обоих компонентов капсулы имеет циркуляционный характер, более сложный, чем в случае однородной капли [1]. Образованию и поддержанию вихревых течений жидкостей оболочки и ее содержимого способствуют касательные напряжения на поверхностях раздела сред.

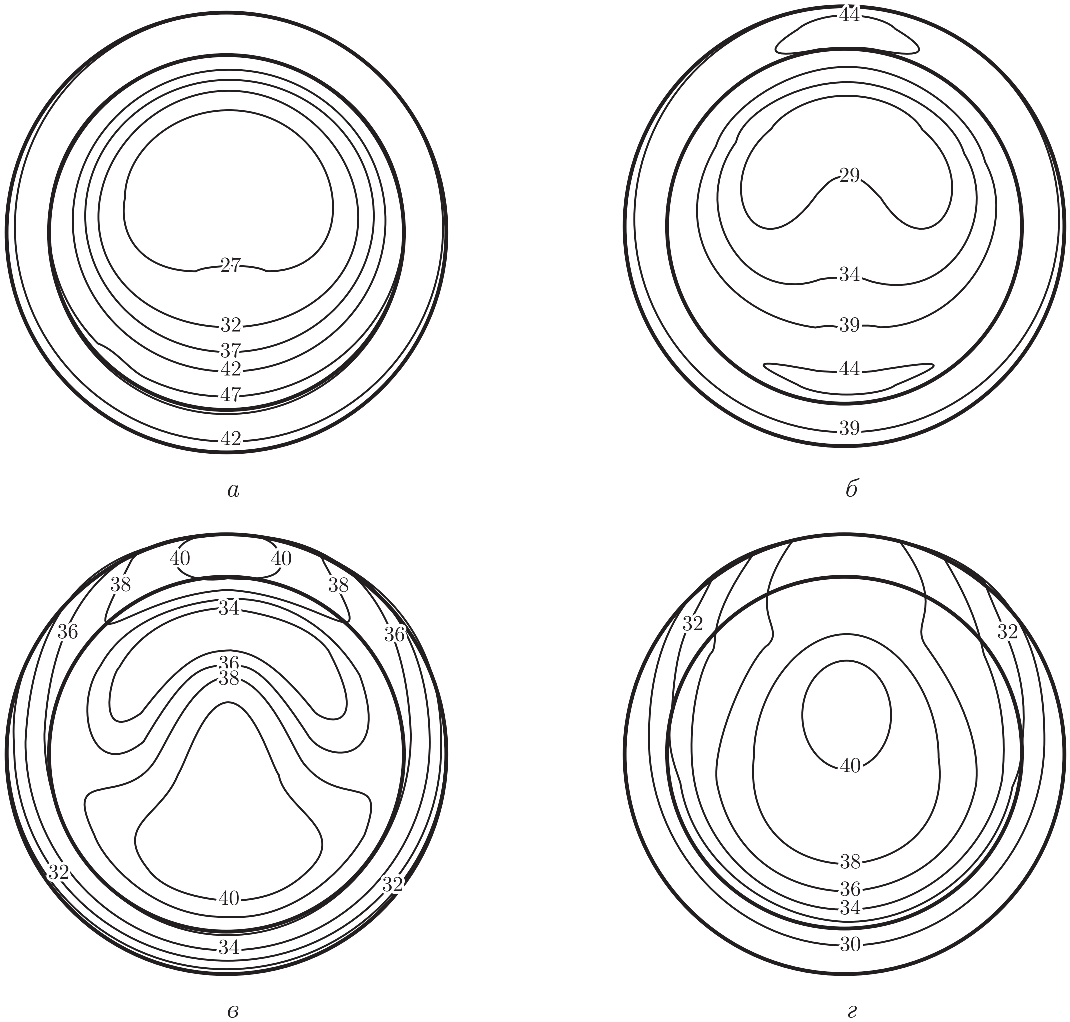

Рис. 2. Изменение во времени полей температуры (°C) в оболочке капсулы и ее содержимом: *а* — $\tau = 1{,}6$ с; *б* — $\tau = 2{,}4$ с; *в* — $\tau = 4{,}5$ с; *г* — $\tau = 6{,}2$ с

Результаты расчета температурного поля капсулы приведены на рис. 2. Характер теплопереноса в системе формующая жидкость — оболочка — содержимое определяется особенностями течений компонентов капсулы. Главную роль в этом процессе играет внутренняя конвекция. Наиболее интенсивно теплоотдача протекает в области передней лобовой части оболочки, где внешний температурный пограничный слой формующей жидкости наиболее тонкий. Охлажденная с внешней стороны жидкость оболочки переносится вихревым течением во внутреннюю область, что способствует понижению ее температуры. Вместе с тем, теплота переносится и к более холодному веществу содержимого капсулы.

Течение содержимого капсулы (сердцевины) также имеет вихревую структуру, вследствие чего нагретая у поверхности жидкость сердцевины переносится в ее центральную часть. При этом температура центральной части сердцевины растет более интенсивно, чем температура участков, расположенных ближе к центрам вихревого течения.

Сложный механизм теплопереноса в бинарной капле сказывается на характере изотерм, которые приведены на рис. 2. Как видно из рисунков, функция распределения температуры в радиальном направлении имеет как локальные минимумы, так и максимумы, расположение которых зависит от времени. Вследствие внутренних циркуляционных течений уровень теплоотдачи от оболочки капсулы к формирующей жидкости оказывается более высоким по сравнению с уровнем теплоотдачи от твердой сферы при тех же значениях чисел Рейнольдса.

Температура оболочки достигает значения $t = 30$ °C приблизительно за 6,2 с. При этой температуре начинается процесс желирования вещества оболочки. После завершения процесса желирования движение жидкости внутри капсулы прекращается, и ее дальнейшее охлаждение протекает подобно охлаждению твердой сферы, движущейся в жидкости. В этот период изотермы становятся концентрическими. Процесс теплообмена при этом становится менее интенсивным и дальнейший темп охлаждения снижается.

Результаты данных исследований, а также метод расчета температурного состояния капсулы в процессе ее охлаждения можно использовать при разработке технологии производства жидких капсулированных продуктов.

1. *Кравченко Ю. С., Давыденко Б. В., Тесля А. И.* Движение сферической капли в вязкой среде под действием силы тяжести // Пром. теплотехника. – 2003. – **25**, № 4. – С. 20–25.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. – Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 727 с.
3. *Oliver D. L. R., Chung J. N.* Unsteady conjugate heat transfer from a translating fluid sphere at a moderate Reynolds numbers // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1990. – **33**, No 3. – P. 401–404.
4. *Перцевой Ф. В., Савгира Ю. А., Камсулина Н. В. и др.* Технология получения растительных масел и пищевых продуктов, обогащенных каротиноидами. – Харьков, 2002. – 230 с.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.03.2007