УДК 517.925.4:531.36

Академік НАН України **В. М. Кошляков,** член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов**

Аналог теореми Єругіна для систем диференціальних рівнянь другого порядку

The theorem about equivalence in Lyapunov's sense of two systems of differential equations of the second order which is an analog of the well-known theorem of M. P. Erugin about the equivalence of systems of differential equations of the first order is proved. Using this theorem, several statements about structural transformations of systems of differential equations of the second order which facilitate the research of stability of the trivial solution are obtained.

Постановка задачі. Розглядається диференціальне рівняння вигляду

$$J\ddot{x}(t) + (D+G)\dot{x}(t) + (P+\Pi)x(t) = 0, \tag{1}$$

де $x = \mathtt{col}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ — шуканий вектор; $J = J^T > 0$ (верхній індекс T означає операцію транспонування) — матриця, що характеризує інерційні властивості системи; $D = D^T$, $G = -G^T$, $\Pi = \Pi^T$, $P = -P^T$ — матриці відповідно дисипативних, гіроскопічних, потенційних и неконсервативних позиційних сил. Усі матриці вважаються сталими, дійсними, розмірності $m \times m$.

Застосування структурного перетворення

$$J^{\frac{1}{2}}x(t) = L(t)\xi(t) \tag{2}$$

з матрицею Ляпунова $L(t)$, $L(0) = C$, дозволяє, при дотриманні деяких умов, прийти до автономного рівняння

$$\ddot{\xi}(t) + V_1\dot{\xi}(t) + W_1\xi(t) = 0, \tag{3}$$

яке не містить гіроскопічних і/або неконсервативних позиційних сил. Завдяки спеціальній (симетричній) структурі рівняння (3) питання про стійкість (нестійкість) його нульового розв'язку в ряді випадків може бути більш зручним порівняно з рівнянням (1). Тут і далі, говорячи, що рівняння (3) автономне, ми також будемо мати на увазі, що елементи матриць V_1, W_1 дійсні.

Означення. Матричні диференціальні рівняння другого порядку (1) і (3) називаються еквівалентними в сенсі Ляпунова тоді і лише тоді за означенням, коли вони пов'язані перетворенням Ляпунова (2).

На можливість використання структурного перетворення (2) при дослідженні стійкості нульового розв'язку системи (1) вказувалось ще в роботах [1, 2]. Однак у результатах, одержаних в роботі [2], була допущена істотна помилка, пов'язана з неправильним використанням псевдооберненої матриці Мурра–Пенроуза.

Пізніше в роботах [3, 4] були одержані необхідні і достатні умови в термінах матриць J, D, G, Π, P того, щоб рівняння (1) за допомогою перетворення Ляпунова (2) могло бути зведене до автономного вигляду (3) з $W_1 = W_1^T$. Однак в даних роботах вважалося, що

$$G = H\widehat{G}, \qquad \frac{dL(t)}{dH} = 0, \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{4}$$

де H — деякий додатний скалярний параметр, а також приймалося, що $D > 0$, $\det(G) \neq 0$.

Параметр H може в деяких випадках входити в структуру матриці потенційних сил, так буде, наприклад, якщо рівняння (1) описує збурений рух гіроскопічних систем, встановлених на платформі, що обертається з кутовою швидкістю ω відносно вертикалі місцевості. З припущеннями $D \geqslant 0$, $\det(G) \neq 0$, (4), а також з додатковим припущенням, що $\Pi = \Pi^{(0)} + H\Pi^{(H)}$, де $\Pi^{(0)}$, $\Pi^{(H)}$ — матриці, не залежні від параметра H, необхідні і достатні умови звідності системи (1) до автономного вигляду (3) з $W_1 = W_1^T$ одержані в роботі [5].

Пізніше в роботі [6] були одержані достатні умови звідності рівняння (1) до автономного вигляду (3) з $V = V^T$ (виключення гіроскопічних сил) без яких-небудь припущень про $L(t)$ типу (4). При цьому доведено необхідність одержаних умов у випадку, коли матриця $Z = 4B - A^2$ має простий спектр.

У даній роботі ставиться така загальна задача: без яких-небудь додаткових припущень, знайти необхідні і достатні умови в термінах матриць D, G, Π, P, J, які повинно задовольняти перетворення Ляпунова (2), щоб рівняння (1) зводилося до автономного вигляду (3) і при цьому мало відповідні симетричні властивості.

Розв'язок сформульованої задачі складається з двох етапів:

1. Знаходження в термінах матриць D, G, Π, P, J множини $\mathbb{L}$ матриць Ляпунова $L(t)$, для яких зведене рівняння (3) є автономним.

2. Виділення з множини $\mathbb{L}$ такої матриці $L(t)$, яка забезпечила б симетричність матричних коефіцієнтів (3).

У роботі доведено аналог теореми Єругіна про необхідні і достатні умови еквівалентності в сенсі Ляпунова систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами. Теорема 2 дає аналогічні умови для систем другого порядку. Цей результат і надає відповідні необхідні і достатні умови з п. 1. Також викладено твердження, що забезпечують виконання п. 2.

Аналог теореми Єругіна. Нехай A, B, C — довільні $m \times m$-матриці над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Через $[A, B]$ позначимо комутатор матриць A, B, тобто $[A, B] = AB - BA$, а через $\{ABC\}$ — вираз $[[A, B], C]$. Через A_R позначимо дійсну частину спектра матриці A (див. означення в [7, с. 401]), $A_I = A - A_R$.

Справедливими є такі твердження.

Лема 1. *Нехай A, V, C, Z — фіксовані постійні $m \times m$-матриці, такі що*

$$L(t) = \exp(-At)C\exp(Vt) \ -$$

матриця Ляпунова і має місце тотожність

$$[Z, L(t)C^{-1}] = 0, \qquad t \geqslant 0,$$

тоді існує така невироджена $m \times m$-матриця $\check{C}$, що

$$V_R = \check{C}^{-1} A_R \check{C},$$

$$C^{-1}ZC = \check{C}^{-1}Z\check{C},$$

$$\check{L}(t) = \exp(-At)\check{C}\exp(Vt), \ -$$

матриця Ляпунова і має місце тотожність

$$[Z, \check{L}(t)\check{C}^{-1}] = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Позначимо через $\mathcal{X}_n$ множину всіх розв'язків системи матричних рівнянь

$$\{ZA^kX\} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

де Z, A — задані $m \times m$-матриці, X — шукана $m \times m$-матриця.

Теорема 1. *Існує таке невід'ємне ціле $n < m^2$, що мають місце рівності множин*

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_k, \qquad k = n+1, n+2, \ldots.$$

Теорема 2 (аналог теореми Єругіна). *Нехай A, B, V, W — сталі $m \times m$-матриці. Рівняння*

$$\ddot{x}(t) + A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0, \tag{5}$$

$$\ddot{\xi}(t) + V\dot{\xi}(t) + W\xi(t) = 0 \tag{6}$$

еквівалентні в сенсі Ляпунова тоді і лише тоді, коли виконані умови

$$V_R = C^{-1}A_RC, \tag{7}$$

$$4W = V^2 + C^{-1}(4B - A^2)C, \tag{8}$$

$$\{(4B - A^2)A^n(CVC^{-1} - A)\} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, m^2 - 1, \tag{9}$$

де C — деяка невироджена матриця.

Доведення. Наведемо ідею доведення. *Достатність*. Нехай виконані умови (7)–(9). Зробимо в рівнянні (5) заміну

$$x(t) = L(t)\xi(t), \tag{10}$$

де

$$L(2t) = \exp(-At)C\exp(Vt), \tag{11}$$

одержимо

$$\ddot{\xi}(t) + L^{-1}(t)(2\dot{L}(t) + AL(t))\dot{\xi}(t) + L^{-1}(t)(\ddot{L}(t) + A\dot{L}(t) + BL(t))\xi(t) = 0. \tag{12}$$

Прирівнюючи в рівняннях (12) і (6) матричні коефіцієнти при $\dot{\xi}(t)$, одержуємо тотожність, а при $\xi(t)$ — приходимо до необхідної тотожності

$$[4B - A^2, L(t)C^{-1}] = 0, \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{13}$$

яка випливає з теореми 1 і (9).

Необхідність. Нехай рівняння (5) і (6) еквівалентні в сенсі Ляпунова. Тоді існує таке перетворення Ляпунова (10), в результаті якого рівняння (5) переходить у рівняння (6), що збігається з (12). А отже, мають місце співвідношення

$$L^{-1}(t)(2\dot{L}(t) + AL(t)) = V, \tag{14}$$

$$L^{-1}(t)(\ddot{L}(t) + A\dot{L}(t) + BL(t)) = W. \tag{15}$$

Загальний розв'язок рівняння (14) відносно $L(t)$ має вигляд

$$L(2t) = \exp(-At)C\exp(Vt), \tag{16}$$

де C — деяка неособлива матриця. Тоді з (15), покладаючи $t = 0$, одержуємо умову (8), а з врахуванням останньої — комутаційну тотожність (13).

Оскільки виконані умови леми 1, можна одразу вважати, що матриця C така, що разом з тотожністю (13) і умовою (8) виконується умова (7), і при цьому (16) — матриця Ляпунова. З тотожності (13) випливає виконання умов (9). На цьому доведення теореми завершене.

Зауваження 1. Якщо для деякого невід'ємного цілого n матриця $Z_n = \{(4B - A^2)A^n\}$ має простий спектр, то умови (9) еквівалентні таким:

$$[B, CVC^{-1} - A] = 0,$$

$$[A, CVC^{-1}] = 0.$$

Наслідки теореми 2. З теореми 2 і зауваження 1 безпосередньо випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Для того щоб рівняння* (1) *за допомогою деякого перетворення Ляпунова* (2) *можна було звести до автономного вигляду* (3) *з* $V_1 = V_1^T$, *достатньо, а при умові, що для деякого невід'ємного цілого* n *матриця*

$$Z_n = \{(4(P_1 + \Pi_1) - (D_1 + G_1)^2)(D_1 + G_1)^n\} \tag{17}$$

має простий спектр, також і необхідно, щоб існувала така дійсна симетрична матриця V_1 *і дійсна невироджена матриця* C, *які задовольняють систему умов*

$$[D_1 + G_1, CV_1C^{-1}] = 0, \tag{18}$$

$$[\Pi_1 + P_1, D_1 + G_1 - CV_1C^{-1}] = 0, \tag{19}$$

$$CV_RC^{-1} = (D_1 + G_1)_R. \tag{20}$$

При цьому матриця W_1 *буде задаватися формулою*

$$4W_1 = V_1^2 + C^{-1}Z_0C. \tag{21}$$

Нижній індекс одиниця у матриць D, G, P, Π позначає множення їх справа і зліва на $J^{-1/2}$, наприклад $\Pi_1 = J^{-1/2}\Pi J^{-1/2}$.

Наслідок 2. *Для того щоб рівняння* (1) *за допомогою деякого перетворення Ляпунова* (2) *можна було звести до автономного вигляду* (3) *з дійсною симетричною матрицею* W_1, *достатньо, а при умові, що для деякого невід'ємного цілого* n *матриця* (17) *має простий спектр, також і необхідно, щоб існували дійсні матриці* V_1, C, $\det(C) \neq 0$, *які задовольняють систему умов* (18)–(20) *і*

$$V_1^2 - (V_1^2)^T + C^{-1}Z_0C - C^TZ_0^T(C^{-1})^T = 0.$$

Наслідок 3. *Для того щоб рівняння* (1) *за допомогою деякого перетворення Ляпунова* (3) *можна було звести до вигляду* (3) *з* $V_1 = V_1^T$, $W_1 = W_1^T$ *достатньо, а при умові, що для деякого невід'ємного цілого* n *матриця* (17) *має простий спектр, також і необхідно, щоб існувала така дійсна симетрична матриця* V_1 *і така дійсна невироджена матриця* C, *які задовольняють систему умов* (18)–(20),

$$C^{-1}Z_0C - C^TZ_0^T(C^{-1})^T = 0.$$

1. *Mingori D. L.* A stability theorem for mechanical systems constant damping // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, No 20. – P. 253–258.
2. *Müller P. C.* Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes von Thomson-Tait-Chetaev auf mechanische Systeme mit scheinabar nichtkonservativen Lagekräften // Z. angew. Math. und. Mech. – 1972. – **52**, H. 4. – S. T65–T67.
3. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Структурный анализ некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1089–1096.
4. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* К теории гироскопических систем с неконсервативными силами // Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, вып. 4. – С. 698–704.
5. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Механические системы, эквивалентные в смысле Ляпунова системам, не содержащим неконсервативных позиционных сил // Там же. – 2007. – **71**, вып. 1. – С. 12–22.
6. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л. Драгунов Д. В.* Механічні системи, еквівалентні в сенсі Ляпунова системам, що не містять гіроскопічних сил // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 1. – С. 111–122.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 15.06.2007

УДК 519.6

О. М. Литвин

Інтерполювання звичайних диференціальних операторів у гільбертових просторах

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Basic statements of the theory of the interpolation of ordinary differential operators by other ordinary differential operators in Hilbert's spaces are given. Approaching operators are equal to the given operator on a given set of functional knots.

Постановка проблеми. Теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних включає в себе, як важливий частинний випадок, теорію інтерполювання. Оператори $L_n u(x)$ інтерполювання функцій $u(x)$ відновлюють (взагалі кажучи, наближено) $u(x)$ між заданими точками $x_1, \ldots, x_m$, використовуючи значення функції $u(x)$ або (у більш загальному випадку) деякої системи операторів (найчастіше використовуються диференціальні та інтегро-диференціальні оператори) від $u(x)$ у вказаних точках $B_{k,s}u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $0 \leqslant s \leqslant \rho_k - 1$; $\sum\limits_{k=1}^{m} \rho_k = M$. При цьому наближуючий (інтерполюючий) оператор $L_n u(x)$ повинен мати ті ж самі властивості у вказаних точках, що і наближувана функція: $B_{k,s}L_n u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $0 \leqslant s \leqslant \rho_k - 1$. Аналогічно формулюється задача інтерполювання для функцій кількох змінних, але у цьому випадку поняття інтерполювання знайшло своє узагальнення ще й у вигляді операторів інтерлінації та інтерфлетації, у яких інформація про наближувану функцію задається на системі ліній або поверхонь (якщо змінних більше двох) [1, 2].

Задачу інтерполювання звичайних диференціальних операторів (ЗДО) у гільбертових просторах сформулюємо таким чином. Деякий ЗДО $A\colon U \to \Gamma$ (взагалі кажучи, невідомий)