1. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 205 с.
2. *Михальчук Б. Р.* Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 3. – С. 364–375.
3. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Михальчук Б. Р.* Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Там же. – 2003. – **55**, № 4. – С. 479–488.
4. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1966. – 534 с.
5. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Про континуальні вузли інтерполяції формул типу Ньютона та Ерміта в лінійних топологічних просторах // Доп. НАН України. – 2007. – № 12. – С. 22–27.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Національний університет "Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 12.06.2007

УДК 517.10

Академик НАН Украины **А. М. Самойленко, А. Н. Ронто**

О сингулярной двухточечной задаче для линейного функционально-дифференциального уравнения

We give new conditions sufficient for the unique solvability of a singular mixed-type two-point boundary-value problem for systems of linear functional differential equations of the second order.

В работе рассматривается система линейных функционально-дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_k''(t) = (l_k u)(t) + f_k(t), \qquad t \in [a, b], \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

для которой указываются признаки однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи

$$u_k(a) = c_{0k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$u_k'(\tau) = c_{1k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь $-\infty < a < b < +\infty$, $\tau \in [a, b]$, $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$, функции f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, локально интегрируемы по Лебегу и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, а $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_{1;\mathrm{loc}}((a, b), \mathbb{R}^n)$ — линейный оператор, преобразующий $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ в некоторый класс функций, более широкий, чем $L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$, и более узкий, чем $L_{1;\mathrm{loc}}((a, b), \mathbb{R}^n)$. Постановка (1) включает в себя, в частности, дифференциальную систему с отклоняющимся аргументом

$$u_k''(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ikj}(t) u_j(\omega_{ikj}(t)) + f_k(t), \qquad t \in [a, b], \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, $\omega_{ikj}\colon [a,b] \to [a,b]$, $i = 1,2,\ldots,m$, k, $j = 1,2,\ldots,n$, — произвольные измеримые преобразования, а локально интегрируемые функции $p_{ikj}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,m$, $k, j = 1,2,\ldots,n$, могут иметь неинтегрируемые особенности в точках a и b.

Под решением краевой задачи (1), (2), (3) с $a < \tau < b$ (соответственно, $\tau = b$, $\tau = a$) понимается непрерывная вектор-функция $u = (u_k)_{k=1}^n\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ со свойствами (2) и (3), почти всюду на $[a,b]$ имеющая вторую производную $u'' = (u_k'')_{k=1}^n$, принадлежащую множеству $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R}^n)$ (соответственно, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R}^n)$, $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R}^n)$) и удовлетворяющую условию

$$\max_{k=1,2,\ldots,n}\left(\int\limits_a^\tau (s-a)|u_k''(s)|ds + \int\limits_\tau^b (b-s)|u_k''(s)|ds\right) < +\infty,$$

и такая, что почти в каждой точке t отрезка $[a,b]$ соблюдаются дифференциальные соотношения (1).

Отметим, что близкие к содержанию настоящей работы вопросы, относящиеся к теории краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений, рассматривались, в частности, в монографиях [1–4].

1. Обозначения и определения. В работе используются следующие обозначения и определения:

1) $L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство функций $u = (u_k)_{k=1}^n\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с интегрируемыми по Лебегу компонентами u_1, u_2, …, u_n и обычной нормой;

2) $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R}^n)$ (соответственно, $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R}^n)$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R}^n)$) означает множество вектор-функций $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ (соответственно, $u\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$, $u\colon (a,b] \to \mathbb{R}^n$), для которых $u|_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} \in L_1([a+\varepsilon,b-\varepsilon],\mathbb{R}^n)$ (соответственно, $u|_{[a,b-\varepsilon]} \in L_1([a,b-\varepsilon],\mathbb{R}^n)$, $u|_{[a+\varepsilon,b]} \in L_1([a+ + \varepsilon,b],\mathbb{R}^n)$) для любого $\varepsilon \in (0,(b-a)/2)$ (соответственно, $\varepsilon \in (0,b-a)$);

3) $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$ с равномерной нормой;

4) если $l = (l_k)_{k=1}^n$ — оператор, действующий из $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R}^n)$ (соответственно, в $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R}^n)$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R}^n)$), то отображения $l_k\colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R})$ (соответственно, в $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R})$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R})$), $k = 1,2,\ldots,n$, называются его компонентами.

Символом $\widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R})$ (соответственно, $\widetilde{L}_1((a,b],\mathbb{R})$) далее обозначаем множество всех тех функций $x \in L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R})$ (соответственно, $x \in L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R})$), для которых соблюдается условие

$$\int\limits_a^b (b-s)|x(s)|ds < +\infty \qquad \left(\text{соответственно,} \int\limits_a^b (s-a)|x(s)|ds < +\infty\right).$$

Наконец, символом $\widetilde{L}_1((a,b),\mathbb{R})$ обозначаем множество всех $x \in L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R})$, для которых

$$\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} (s-a)|x(s)|ds + \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b (b-s)|x(s)|ds < +\infty.$$

Линейное многообразие $\widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R}^n)$ вводится как множество всех тех $x = (x_k)_{k=1}^n\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$, для которых $x_k \in \widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R})$ при каждом $k = 1,2,\ldots,n$. Подобным образом определяются множества $\widetilde{L}_1((a,b],\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{L}_1((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Линейный оператор l, действующий из $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R})$ (соответственно, в $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R})$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R})$), будем называть регулярным, если существуют неотрицательные функции h_j, $j = 1,2,\ldots,n$, принадлежащие множеству $\widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R})$ (соответственно, $\widetilde{L}_1((a,b],\mathbb{R})$, $\widetilde{L}_1((a,b),\mathbb{R})$) и такие, что для всех $u = (u_k)_{k=1}^n$ из $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ и почти всех t из $[a,b]$ соблюдается неравенство

$$|(lu)(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} h_j(t) \max_{s\in[a,b]} |u_j(s)|. \tag{5}$$

Линейный оператор $l = (l_k)_{k=1}^n$, действующий из $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R}^n)$ (соответственно, в $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R}^n)$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R}^n)$) назовем регулярным, если этим свойством обладает каждая из его компонент l_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

Пусть τ — произвольная точка промежутка $[a,b]$. Скажем, что оператор l, действующий из $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ в одно из множеств $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R})$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R})$ и $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R})$, τ-положителен, если для любой функции $u = (u_k)_{k=1}^n \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, обладающей свойством

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \min_{t\in[a,b]} u_k(t) \geqslant 0, \tag{6}$$

выполнено соотношение $\operatorname*{vrai\,min}_{t\in[a,b]}(lu)(t)\operatorname{sign}(t-\tau) \geqslant 0$. Аналогично, отображение $l = (l_k)_{k=1}^n$ из $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R}^n)$, $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R}^n)$ или $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R}^n)$ назовем τ-положительным, если этим свойством обладают все его компоненты l_k, $k = 1,2,\ldots,n$. Оператор со свойством a-положительности (b-положительности) назовем положительным (отрицательным).

2. Общие теоремы. Имеет место следующее утверждение об однозначной разрешимости задачи (1), (2), (3).

Теорема 1. *Предположим, что $a < \tau < b$, а операторы l_k, $k = 1,2,\ldots,n$, в системе* (1) *допускают представление в виде*

$$l_k = l_k^+ - l_k^-, \tag{7}$$

где l_k^+ и l_k^-, $k = 1,2,\ldots,n$, — некоторые τ-положительные регулярные линейные отображения $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R})$. Кроме того, пусть существуют постоянная $\varepsilon \in (0,1)$ и вектор-функция $y = (y_k)_{k=1}^n\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с абсолютно непрерывными компонентами y_k, $k = 1,2,\ldots,n$, удовлетворяющими условиям

$$y_k(a) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

$$y_k(t) > 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \qquad t \in (a,b], \tag{9}$$

и такими, что при каждом $k = 1,2,\ldots,n$ и почти всех $t \in [a,b]$ соблюдается функционально-дифференциальное неравенство

$$\varepsilon y_k'(t) \geqslant \int_{\tau}^{t} [(l_k^+ y)(\xi) + (l_k^- y)(\xi)]\, d\xi. \tag{10}$$

Тогда задача (1), (2), (3) *имеет единственное решение при произвольных $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{R}$ и $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1((a,b),\mathbb{R})$.*

Следует отметить, что постоянная ε в соотношении (10) должна быть строго меньшей 1, поскольку ослабленная версия

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname*{vrai\,min}_{t\in[a,b]} \left(y_k'(t) - \int\limits_{\tau}^{t} [(l_k^+ y)(\xi) + (l_k^- y)(\xi)]\, d\xi \right) \geqslant 0$$

условия (10) уже не обеспечивает справедливости заключения теоремы 1.

Теорема 2. *Предположим, что* $a < \tau < b$, *а линейный оператор* $l = (l_k)_{k=1}^n \colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_{1;\mathrm{loc}}((a,b),\mathbb{R}^n)$ *регулярен и* τ*-положителен. Пусть существуют постоянная* $\varepsilon \in (0,1)$ *и абсолютно непрерывная функция* $y = (y_k)_{k=1}^n \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *для компонент* y_k, $k = 1,2,\ldots,n$, *которой выполнены условия* (8), (9) *и, кроме того, при всех* $k = 1,2,\ldots,n$ *и почти всех* $t \in [a,b]$ *соблюдается функционально-дифференциальное неравенство*

$$\varepsilon y_k'(t) \geqslant \int\limits_{\tau}^{t} (l_k y)(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Тогда задача (1), (2), (3) *имеет единственное решение при произвольных* $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{R}$ *и* $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1((a,b),\mathbb{R})$. *Если, кроме того, для постоянных* c_{0k}, c_{1k} *и функций* f_k, $k = 1,2,\ldots,n$, *соблюдаются соотношения*

$$\int\limits_{a}^{t} \left(\int\limits_{\tau}^{\xi} f_k(s) ds \right) d\xi \geqslant -c_{0k} - c_{1k}(t-a), \qquad t \in [a,b], \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

то единственное решение $u = (u_k)_{k=1}^n$ *этой задачи обладает свойством* (6).

Аналогично замечанию, сделанному выше в связи с условием (10) теоремы 1, можно утверждать, что условие (11) теоремы 1 нельзя заменить более слабым условием

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname*{vrai\,min}_{t\in[a,b]} \left(y_k'(t) - \int\limits_{\tau}^{t} (l_k y)(\xi)\, d\xi \right) \geqslant 0, \tag{13}$$

поскольку заключение последней теоремы при такой замене теряет силу. В качестве примера достаточно рассмотреть однородную двухточечную задачу $u(a) = 0$, $u'(\tau) = 0$ для скалярного функционально-дифференциального уравнения

$$u''(t) = -\frac{2\chi_\tau(t)}{(\tau-a)^2} u(\tau), \qquad t \in [a,b],$$

где $\tau \in (a,b]$, а функция $\chi_\tau \colon [a,b] \to \{0,1\}$ определена так, что $\chi_\tau(t) = 1$ при $t \in [a,\tau)$ и $\chi_\tau(t) = 0$ при $t \in [\tau,b]$.

В случае, когда $\tau = b$ и, следовательно, условие (3) имеет вид

$$u_k'(b) = c_{1k}, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{14}$$

справедливо такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть l_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, допускают представление в виде* (7)*, где l_k^+ и l_k^-, $k = 1, 2, \ldots, n$, — отрицательные регулярные операторы из $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}((a, b], \mathbb{R})$. Далее, пусть существуют постоянная $\varepsilon \in (0, 1)$ и функция $y = (y_k)_{k=1}^n \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, компоненты y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, которой удовлетворяют условиям* (8), (9)*, абсолютно непрерывны и таковы, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех $t \in [a, b]$ соблюдаются неравенства*

$$\varepsilon y_k'(t) \geqslant \int_t^b |(l_k^+ y)(\xi) + (l_k^- y)(\xi)| \, d\xi. \tag{15}$$

Тогда задача (1), (2), (14) *однозначно разрешима для произвольных постоянных $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ и функций $\{f_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \widetilde{L}_1((a, b], \mathbb{R})$.*

Условия следующей теоремы, помимо существования и единственности решения задачи (1), (2), (14), обеспечивают также его неотрицательность.

Теорема 4. *Пусть $l = (l_k)_{k=1}^n \colon C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_{1;\mathrm{loc}}((a, b], \mathbb{R}^n)$ в системе* (1) *регулярен и отрицателен. Пусть существуют константа $\varepsilon \in (0, 1)$ и функция $y = (y_k)_{k=1}^n \colon [a, b] \to \to \mathbb{R}^n$ с абсолютно непрерывными компонентами y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющими условиям* (8), (9) *и такими, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех $t \in [a, b]$*

$$\varepsilon y_k'(t) \geqslant \int_t^b |(l_k y)(\xi)| \, d\xi. \tag{16}$$

Тогда задача (1), (2), (14) *имеет единственное решение для любых постоянных $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ и функций $\{f_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \widetilde{L}_1((a, b], \mathbb{R})$. Более того, если c_{0k}, c_{1k} и f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют соотношениям*

$$c_{0k} + c_{1k}(t - a) \geqslant \int_a^t \left(\int_\xi^b f_k(s) ds \right) d\xi, \qquad t \in [a, b], \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то единственное решение $u = (u_k)_{k=1}^n$ этой задачи обладает свойством (6).

При $\tau = a$ условие (3), очевидно, имеет вид

$$u_k'(a) = c_{1k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

В этом случае задача (1), (2), (3) является задачей Коши, и для нее справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть l_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, допускают разложение в виде* (7)*, где l_k^+ и l_k^-, $k = 1, 2, \ldots, n$, — положительные регулярные отображения $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ в $L_{1;\mathrm{loc}}([a, b), \mathbb{R})$. Пусть найдутся постоянная $\varepsilon \in (0, 1)$ и вектор-функция $y = (y_k)_{k=1}^n \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, все компоненты y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, которой абсолютно непрерывны, удовлетворяют условиям* (8), (9) *и таковы, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех $t \in [a, b]$*

$$\varepsilon y_k'(t) \geqslant \int_a^t [(l_k^+ y)(\xi) + (l_k^- y)(\xi)] \, d\xi. \tag{18}$$

Тогда задача Коши (1), (2), (17) *однозначно разрешима для произвольных $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ и $\{f_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \widetilde{L}_1([a, b), \mathbb{R})$.*

Приводимая ниже теорема гарантирует неотрицательность решения задачи (1), (2), (17).

Теорема 6. *Пусть линейный оператор* $l = (l_k)_{k=1}^n \colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R}^n)$ *в* (1) *регулярен и положителен. Пусть существуют постоянная* $\varepsilon \in (0,1)$ *и функция* $y = (y_k)_{k=1}^n \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *все компоненты* y_k, $k = 1,2,\ldots,n$, *которой абсолютно непрерывны, удовлетворяют условиям* (8), (9) *и таковы, что при каждом* $k = 1,2,\ldots,n$ *и почти всех* $t \in [a,b]$

$$\varepsilon y_k'(t) \geqslant \int\limits_a^t (l_k y)(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Тогда задача Коши (1), (2), (17) *при произвольных* $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{R}$ *и* $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R})$ *имеет единственное решение. Если, кроме того, для* c_{0k}, c_{1k} *и* f_k, $k = 1,2,\ldots,n$, *соблюдаются соотношения*

$$\int\limits_a^t (t-s) f_k(s)\,ds \geqslant -c_{0k} - c_{1k}(t-a), \qquad t \in [a,b], \qquad k = 1,2,\ldots,n,$$

то это решение обладает свойством (6).

3. Теоремы для случая системы (4). Приведенные выше теоремы позволяют указать признаки существования и единственности решения двухточечной задачи (2), (3) для системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (4).

Теорема 7. *Пусть* $\{p_{ikj} \mid i = 1,2,\ldots,m; k,j = 1,2,\ldots,n\} \subset L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R})$ *таковы, что*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int\limits_a^b (\xi - a)|p_{ikj}(\xi)|d\xi < +\infty, \tag{20}$$

и, кроме того, существуют такие $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset (0,+\infty)$ *и* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subset (0,+\infty)$, *при которых для каждого* $k = 1,2,\ldots,n$ *соблюдается неравенство*

$$\sup_{t \in (a,b]} \frac{1}{(t-a)^{\alpha_k - 1}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_j \int\limits_t^b (\omega_{ikj}(\xi) - a)^{\alpha_j} |p_{ikj}(\xi)|d\xi < \gamma_k \alpha_k. \tag{21}$$

Тогда задача (4), (2), (14) *однозначно разрешима для всех вещественных* c_{0k}, c_{1k}, $k = 1,2,\ldots,n$, *и функций* $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1((a,b],\mathbb{R})$.

Следствие 1. *Предположим, что* $\{p_{ikj} \mid i = 1,2,\ldots,m, k,j = 1,2,\ldots,n\} \subset L_{1;\mathrm{loc}}((a,b],\mathbb{R})$ *и измеримые функции* $\omega_{ikj} \colon [a,b] \to [a,b]$, $i = 1,2,\ldots,m$, k, $j = 1,2,\ldots,n$, *при некоторых значениях* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subset (0,+\infty)$ *удовлетворяют условию*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_j \int\limits_a^b (\omega_{ikj}(\xi) - a)|p_{ikj}(\xi)|d\xi < 1. \tag{22}$$

Пусть, кроме того, для всех $i = 1,2,\ldots,m$ *и* k, $j = 1,2,\ldots,n$ *соблюдается неравенство*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in [a,b]\setminus\Gamma} \frac{t-a}{\omega_{ikj}(t) - a} < +\infty, \tag{23}$$

где $\Gamma := \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\omega_{ikj}^{-1}(a)$. *Тогда задача* (4), (2), (14) *однозначно разрешима для всех* $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{R}$ *и функций* $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1((a,b],\mathbb{R})$.

Приведем соответствующие теоремы для сингулярной задачи Коши (4), (2), (14) (заметим, что в регулярном случае подобные результаты получены в [5]).

Теорема 8. *Пусть для* $\{p_{ikj} \mid i = 1,2,\ldots,m; k,j = 1,2,\ldots,n\} \subset L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R})$ *выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_a^b (b-\xi)|p_{ikj}(\xi)|d\xi < +\infty, \tag{24}$$

и, кроме того, можно указать некоторые $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\} \subset (0,+\infty)$ *и* $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\} \subset \subset (0,+\infty)$, *при которых для каждого* $k = 1,2,\ldots,n$ *соблюдается строгое неравенство*

$$\sup_{t\in(a,b]} \frac{1}{(t-a)^{\alpha_k - 1}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j \int\limits_a^t (\omega_{ikj}(\xi)-a)^{\alpha_j}|p_{ikj}(\xi)|d\xi < \gamma_k\alpha_k. \tag{25}$$

Тогда задача Коши (4), (2), (17) *однозначно разрешима для любых значений постоянных* $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{R}$ *и произвольных функций* $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R})$.

Из теоремы 9 вытекает

Следствие 2. *Предположим, что при некоторых* $\{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n\} \subset (0,+\infty)$ *функции* $\{p_{ikj} \mid i = 1,2,\ldots,m, k,j = 1,2,\ldots,n\} \subset L_{1;\mathrm{loc}}([a,b),\mathbb{R})$ *и измеримые функции* $\omega_{ikj}\colon [a,b] \to \to [a,b]$, $i = 1,2,\ldots,m$, k, $j = 1,2,\ldots,n$, *удовлетворяют условию* (22) *и, кроме того, для всех* $i = 1,2,\ldots,m$ *и* k, $j = 1,2,\ldots,n$ *соблюдается неравенство*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in[a,b]\setminus\Gamma} \frac{b-t}{\omega_{ikj}(t)-a} < +\infty. \tag{26}$$

Тогда задача Коши (4), (2), (17) *однозначно разрешима для произвольных* $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = = 1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{R}$ *и* $\{f_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \widetilde{L}_1([a,b),\mathbb{R})$.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS YS Fellowship No. 04-83-3968.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – Москва: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 384 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Сохадзе З.* Задача Коши для сингулярных функционально-дифференциальных уравнений. – Кутаиси: Изд-во Кутаис. гос. ун-та, 2005. – 84 с.
4. *Rachůnková I., Staněk S., Tvrdý M.* Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations // Handbook of Differential Equations (Ordinary Differential Equations). Vol. 3. – Elsevier, 2006. – P. 605–721.
5. *Ронто А. М., Дільна Н. З.* Умови однозначної розв'язності початкової задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з відхиленнями аргументу // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 4. – С. 535–547.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 22.06.2007*