6. *Mota Soares C. M., Mota Soares C. A., Franco Correia V. M.* Optimal design of piezolaminated structures // Composite Structures. – 1999. – No 47. – P. 625–634.
7. *Gristchak V. Z., Ganilova O. A.* Application of a hybrid WKB-Galerkin method in control of the dynamic instability of a piezolaminated imperfect column // Techn. Mech. – 2006. – No 26. – P. 106–116.
8. *Gristchak V., Dmitrieva Ye.* A hybrid WKB-Galerkin method and its application // Ibid. – 1995. – No 15. – P. 281–294.
9. *Geer J. F., Andersen C. M.* Hybrid perturbation galerkin technique with application to slender body theory // SIAM J. Appl. Math. – 1989. – No 49. – P. 344–361.
10. *Geer J. F., Andersen C. M.* Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra / NASI – 18107. – Hampton, Virginia, 1988. – 26 p.
11. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
12. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
13. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – Москва: Физматгиз, 1957. – 463 с.
14. *Lee C. K.* Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors and actuators. Part 1: Governing equations and reciprocal relationships // J. Acoust. Soc. Amer. – 1990. – **87**, No 3. – P. 1144–1158.
15. *Miller S. E., Abramovich H., Oshman Y.* Active distributed vibration control of anisotropic piezoelectric laminated plates // J. Sound and Vibr. – 1995. – **183**, No 5. – P. 797–817.

Запорожский национальный университет
Поступило в редакцию 12.09.2007

УДК 517.9

П. О. Касьянов

Схема Дубінського для класу еволюційних рівнянь з відображеннями псевдомонотонного типу в нерефлексивних банахових просторах

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. С. Мельником)

We study differential-operator equations with nonlinear mappings of the pseudomonotone type in nonreflexive Banach spaces. The main theorem on the existence of a periodic solution is proved. Important a priori estimates are obtained.

При дослідженні диференціально-операторних рівнянь та включень з відображеннями псевдомонотонного типу в функціональних рефлексивних банахових просторах часто використовують такі підходи: метод Фаедо–Гальоркіна, метод скінченних різниць, метод нелінійних напівгруп операторів, метод сингулярних збурень тощо. Метод нелінійних напівгруп операторів у банахових просторах розроблений О. О. Толстоноговим та Ю. І. Уманським [1, 2]. О. М. Вакуленко, В. С. Мельник, П. О. Касьянов та В. В. Ясінський розвинули метод сингулярних збурень в [3–5], метод Фаедо–Гальоркіна та метод скінченних різниць розроблений П. О. Касьяновим, В. С. Мельником та Л. Тоскано в [5–8].

У даній роботі розглядаються еволюційні рівняння з нелінійними операторами w_{λ_0}-псевдомонотонного типу. За схемою Ю. А. Дубінського [9] доводиться розв'язність періодичних задач у класі нерефлексивних банахових просторів.

1. Постановка задачі. Нехай $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ та $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ — дійсні рефлексивні сепарабельні банахові простори, неперервно вкладені в дійсний гільбертів простір $(H, (\cdot,\cdot))$. Припустимо, що існує зліченна множина $\Phi \subset V_1 \bigcap V_2$, щільна в V_1, V_2 та в H. Після ототожнення $H \equiv H^*$ одержимо ланцюжки неперервних та щільних вкладень:

$$V_1 \subset H \subset V_1^*, \qquad V_2 \subset H \subset V_2^*,$$

де $(V_i^*, \|\cdot\|_{V_i})$ — топологічно спряжений простір до V_i відносно форми

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i} \colon V_i^* \times V_i \to \mathbb{R}$$

$(i = 1, 2)$, яка збігається на $\Phi \times \Phi$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H. Введемо функціональні банахові простори

$$X_i^* = L_{r_i}(S; H) \bigcap L_{p_i}(S; V_i), \qquad X_i = L_{r_i'}(S; H) + L_{q_i}(S; V_i^*),$$

де S — скінченний інтервал часу, $1 < p_i \leqslant r_i \leqslant +\infty$, ${r_i}^{-1} + {r_i'}^{-1} = {p_i}^{-1} + {q_i}^{-1} = 1$ та $p_i < +\infty$ $(i = 1, 2)$. Простір X_i^* $(i = 1, 2)$ спряжений до X_i. Якщо $r_i < +\infty$, то X_i рефлексивний $(i = 1, 2)$. Покладемо $X^* = X_1^* \bigcap X_2^*$,

$$X = X_1 + X_2 = L_{q_1}(S; V_1^*) + L_{q_2}(S; V_2^*) + L_{r_1'}(S; H) + L_{r_2'}(S; H).$$

Форма двоїстості на $X \times X^*$ задається так:

$$\langle f, y\rangle = \int\limits_S (f_{11}(\tau), y(\tau))_H\, d\tau + \int\limits_S (f_{12}(\tau), y(\tau))_H\, d\tau + \int\limits_S \langle f_{21}(\tau), y(\tau)\rangle_{V_1} d\tau +$$

$$+ \int\limits_S \langle f_{22}(\tau), y(\tau)\rangle_{V_2} d\tau = \int\limits_S (f(\tau), y(\tau))\, d\tau,$$

де $f = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22}$, $f_{1i} \in L_{r_i'}(S; H)$, $f_{2i} \in L_{q_i}(S; V_i^*)$ $(i = 1, 2)$.

Нехай $A \colon X^* \to X$ — деяке відображення. Розглянемо задачу

$$y' + A(y) = f, \qquad y(0) = y(T), \tag{1}$$

де $f \in X$ — фіксований елемент, похідна y' елемента $y \in X^*$ розуміється в сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S; V^*) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S); V_w^*)$ з $V = V_1 \bigcap V_2$ та V_w^*, що дорівнює V^* з топологією $\sigma(V^*, V)$ [5].

Розв'язки будемо шукати в просторі $W^* = \{y \in X^* \mid y' \in X\}$ з нормою графіка $\|y\|_W = \|y\|_{X^*} + \|y'\|_X$, де

$$\|f\|_X = \inf_{\substack{f = f_{11} + f_{12} + f_{21} + f_{22}: \\ f_{1i} \in L_{r_i'}(S; H),\, f_{2i} \in L_{q_i}(S; V_i^*),\, i = 1, 2}} \max\Big\{\|f_{11}\|_{L_{r_1'}(S;H)}; \|f_{12}\|_{L_{r_2'}(S;H)}; \|f_{21}\|_{L_{q_1}(S;V_1^*)}; \|f_{22}\|_{L_{q_2}(S;V_2^*)}\Big\}.$$

2. Допоміжні твердження. Далі, $y_n \rightharpoonup y$ в банаховому просторі Y означатиме слабку збіжність y_n до y в Y. Якщо Y нерефлексивний, то $y_n \rightharpoonup y$ в Y^* означатиме *-слабку збіжність y_n до y в Y^*.

Поряд із W^* розглянемо лінійні простори

$$W_i^* = \{y \in L_{p_i}(S; V_i) \mid y' \in X\}, \qquad i = 1, 2,$$

що є банаховими відносно норми

$$\|y\|_{W_i^*} = \|y\|_{L_{p_i}(S;V_i)} + \|y'\|_X \qquad \forall y \in W_i^*.$$

Також розглянемо простір $W_0^* = W_1^* \bigcap W_2^*$ відносно норми

$$\|y\|_{W_0^*} = \|y\|_{L_{p_1}(S;V_1)} + \|y\|_{L_{p_2}(S;V_2)} + \|y'\|_X \qquad \forall y \in W_0^*.$$

Зауважимо, що простір W^* неперервно вкладається в W_i^* для $i = \overline{0,2}$.

Теорема 1. $W_0^* \subset C(S; H)$. *У випадку компактного інтервалу S дане вкладення є неперервним. Більше того, для всіх y, $\xi \in W_0^*$ та довільних s, $t \in S$ справедлива така формула інтегрування частинами:*

$$(y(t), \xi(t)) - (y(s), \xi(s)) = \int_s^t \{(y'(\tau), \xi(\tau)) + (y(\tau), \xi'(\tau))\}\, d\tau.$$

Зокрема, при $y = \xi$ маємо

$$\frac{1}{2}(\|y(t)\|_H^2 - \|y(s)\|_H^2) = \int_s^t (y'(\tau), y(\tau))\, d\tau.$$

Теорема 2. *Нехай одне з вкладень є компактним:*

$$V_1 \subset H, \qquad V_2 \subset H.$$

Тоді $W_0^* \subset L_p(S; H)$ компактно для довільного $p \in [1, +\infty)$.

Наслідок 1. *Нехай $V_1 \subset V_2$ компактно. Тоді $W_0^* \subset L_{p_1}(S; V_2)$ компактне.*

3. Класи відображень. Нехай $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банахів простір, W^* — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{W^*}$, причому $W^* \subset Y^*$ неперервно. Тут $(Y^*, \|\cdot\|_{Y^*})$ — топологічно спряжений простір до Y відносно форми

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_Y : Y \times Y^* \to \mathbb{R}.$$

Означення 1. Відображення $A\colon Y^* \to Y$ називається:

ослаблено коерцитивним, якщо для довільного $f \in Y$ існує $R > 0$ таке, що

$$\langle A(y) - f, y \rangle_Y \geqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \|y\|_{Y^*} = R;$$

локально обмеженим, якщо для фіксованого $y \in Y^*$ існують $m > 0$ та $M > 0$: $\|A(\xi)\|_Y \leqslant M$, якщо $\xi \in Y^*$: $\|y - \xi\|_{Y^*} \leqslant m$;

скінченновимірно локально обмеженим, якщо для довільного скінченновимірного простору $F \subset Y^*$, $A\big|_F$ локально обмежений на $(F, \|\cdot\|_{Y^*})$.

Нехай $C(r_1; \cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — неперервна функція для кожного $r_1 \geqslant 0$ та $\tau^{-1}C(r_1; \tau r_2) \to 0$ при $\tau \to 0+$ $\forall r_1$, $r_2 \geqslant 0$, $\|\cdot\|'_{W^*}$ — компактна напівнорма на Y^*, яка є неперервною відносно $\|\cdot\|_{Y^*}$ на Y^*.

Означення 2. Відображення $A\colon Y^* \to Y$ називається:

радіально неперервним, якщо для фіксованих y, $\xi \in Y^*$

$$\lim_{t\to 0+}\langle A(y+t\xi),\xi\rangle_Y = \langle A(y),\xi\rangle_Y;$$

монотонним, якщо для довільних y_1, $y_2 \in Y^*$

$$\langle A(y_1)-A(y_2), y_1-y_2\rangle_Y \geqslant 0;$$

оператором з напівобмеженою варіацією на W^* (з (Y^*,W^*)-напівобмеженою варіацією), якщо $\forall R>0$ та $\forall y_1$, $y_2 \in Y^*$ з $\|y_1\|_{Y^*}\leqslant R$, $\|y_2\|_{Y^*}\leqslant R$, виконується нерівність

$$\langle A(y_1)-A(y_2), y_1-y_2\rangle_Y \geqslant -C(R;\|y_1-y_2\|'_{W^*}).$$

Означене вище відображення задовольняє:

властивість (П), якщо для довільної непорожньої множини $B\subset Y^*$ та деякого $k>0$:

$$\langle A(y),y\rangle_Y \leqslant k \qquad \forall y\in B,$$

випливає слабка компактність в Y множини

$$A(B)=\{A(y)\mid y\in B\}$$

у тому сенсі, що із кожної послідовності $\{y_n\}_{n\geqslant 1}\subset B$ можна виділити підпослідовність $\{y_{n_k}\}_{k\geqslant 1}\subset\{y_n\}_{n\geqslant 1}$, що для деякого $d\in Y$

$$A(y_{n_k})\rightharpoonup d \qquad \text{в} \qquad Y \qquad \text{при} \qquad k\to+\infty.$$

Зауваження 1. Якщо Y — рефлексивний банахів простір, то означення властивості (П) перетворюється в класичне [5].

4. Основний результат. Надалі припускаємо, що або $r_1\geqslant 2$ або $r_2\geqslant 2$.

Теорема 3. *Нехай $A\colon X^*\to X$ — ослаблено коерцитивне радіально неперервне скінченновимірно локально обмежене відображення з напівобмеженою варіацією на W_0^*, яке задовольняє властивість* (П)*. Тоді для довільного $f\in X$ існує принаймні один розв'язок $y\in W^*$ задачі* (1).

Зауваження 2. Внаслідок теореми 1 задача на краях в (1) поставлена коректно.

Зауваження 3. У випадку r_1, $r_2<+\infty$ із напівобмеженості варіації A на W_0^* випливає локальна обмеженість та властивість (П) [5].

Зауваження 4. Нехай $Y=L_{p_1}(S;V_1)+L_{p_2}(S;V_2)$. Твердження теореми 3 залишається вірним при таких умовах на $A\colon X^*\to X$:

a) коерцитивність на Y:

$$\frac{\langle Ay,y\rangle}{\|y\|_Y}\to+\infty \qquad \text{при} \qquad \|y\|_Y\to+\infty;$$

b) умова (П) на Y: якщо для непорожньої обмеженої множини $B\subset Y$ та деякого $k>0$ виконується

$$\langle A(y),y\rangle\leqslant k \qquad \forall y\in B,$$

то множина

$$A(B) = \{A(y) \mid y \in B\}$$

слабко компактна в X;

c) $A\colon X^* \to X$ — радіально неперервне скінченновимірно локально обмежене відображення з напівобмеженою варіацією на W_0^*.

Наслідок 2. *Нехай $V_1 \subset V_2$ компактно, $A\colon X^* \to X$ — ослаблено коерцитивне радіально неперервне скінченновимірно локально обмежене відображення, яке задовольняє властивість* (Π)*. Більше того, нехай $A = A_0 + A_1\colon X^* \to X$, де $A_0\colon X^* \to X$ — монотонне, а $A_1\colon X^* \to X$ задовольняє умови:*

$A_1\colon L_{p_1}(S; V_2) \to L_{q_1}(S; V_2^*)$ — локально поліноміальний, тобто для довільного $R > 0$ існує натуральне $n = n(R)$ і поліном

$$P_R(t) = \sum_{0<\alpha\leqslant n} \lambda_\alpha(R) t^\alpha$$

з неперервними $\lambda_\alpha(R) \geqslant 0$:

$$\|A_1(y_1) - A_1(y_2)\|_{L_{q_1}(S;V_2^*)} \leqslant P_R(\|y_1 - y_2\|_{L_{p_1}(S;V_2)}), \qquad \text{якщо} \qquad \|y_i\|_{L_{p_1}(S;V_2)} \leqslant R.$$

Тоді для довільного $f \in X$ існує принаймні один розв'язок $y \in W^*$ задачі (1).

1. *Толстоногов А. А.* О решениях эволюционных включений 1 // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3. – С. 145–162.
2. *Толстоногов А. А., Уманский Ю. И.* О решениях эволюционных включений 2 // Там же. – 1992. – **33**, № 4. – С. 163–174.
3. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Топологічний метод для операторних включень з щільновизначеними відображеннями в банахових просторах // Нелінійні граничні задачі. – 2000. – № 10. – С. 125–142.
4. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Розв'язність і властивості розв'язків одного класу операторних включень в банахових просторах // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 1999. – № 3. – С. 105–112.
5. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with w_λ-pseudomonotone maps. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
6. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для класу диференціально-операторних включень із багатозначними відображеннями псевдомонотонного типу // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2005. – № 2. – С. 139–151.
7. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103–126.
8. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano L.* Method of approximation of evolutionary inclusions and variational inequalities by stationary // Sys. Res. & Inf. Tech. – 2005. – No 4. – P. 106–119.
9. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в эллиптических и параболических уравнениях // Мат. сб. – 1964. – **106**, № 64. – С. 609–642.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 23.08.2007