Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2008

МЕХАНІКА

УДК 531.36

С. В. Бабенко, В. И. Слынько

Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием второго порядка в критических случаях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The question about the stability of a second-order nonlinear system of differential equations in the critical cases is investigated. The explicit expressions for the first Lyapunov quantities are found.

Одной из важных задач нелинейного анализа динамики систем является задача об устойчивости тривиального решения уравнений возмущенного движения в критических случаях, т. е. в случаях, когда эта задача не решается по линейному приближению. В настоящей работе для нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием второго порядка получены условия устойчивости тривиального решения в критических случаях.

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с импульсным воздействием

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \sum_{|\nu|\geqslant 2} f^{(1)}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2},\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \sum_{|\nu|\geqslant 2} f^{(2)}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}, \qquad t \neq k\theta,\\
\triangle x_1 &= b^k_{11}x_1 + b^k_{12}x_2 + \sum_{|\nu|\geqslant 2} g^{(k,1)}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2},\\
\triangle x_2 &= b^k_{21}x_1 + b^k_{22}x_2 + \sum_{|\nu|\geqslant 2} g^{(k,2)}_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}, \qquad t = k\theta
\end{aligned} \tag{1}$$

или, в матричном виде,

$$\frac{dx}{dt} = A_0x + f(x), \qquad \triangle x = B_kx + g_k(x). \tag{2}$$

Причем предполагается, что матрицы B_k и функции $g^{(k,i)}_{\nu_1\nu_2}$ $(i = 1, 2)$ — 2-периодичные по k. Если мультипликаторы линейного приближения системы (1) лежат в открытом круге единичного радиуса комплексной плоскости, то нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво, если же хотя бы один мультипликатор находится вне замкнутого единичного круга, то тривиальное решение неустойчиво [1]. В случае, когда хотя бы одно собственное значение находится на окружности радиусом 1, а остальные лежат внутри круга, вопрос об устойчивости тривиального решения исходной системы решают нелинейные члены. Принимая во внимание периодичность импульсов, для отыскания условий устойчивости ниже предлагаем способ построения отображения Пуанкаре для системы (1) [2]. Для решения поставленной задачи произведем замену переменных так, чтобы в непрерывной части новой системы матрица линейного приближения была равна нулю.

Замену переменных будем искать в виде

$$y = \Psi(t)x, \tag{3}$$

где компоненты $\psi_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ матрицы $\Psi(t)$ — кусочно-дифференцируемые и 2θ-периодические функции. Система (1) заменой переменных (3) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = \sum_{|\nu|\geqslant 2} \widetilde{f}^{(1)}_{\nu_1\nu_2}(t) y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2},\\
&\frac{dy_2}{dt} = \sum_{|\nu|\geqslant 2} \widetilde{f}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}(t) y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2}, \qquad t \neq k\theta,\\
&\triangle y_1 = \phi^k_{11} y_1 + \phi^k_{12} y_2 + \sum_{|\nu|\geqslant 2} \widetilde{g}^{(k,1)}_{\nu_1\nu_2} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2},\\
&\triangle y_2 = \phi^k_{21} y_1 + \phi^k_{22} y_2 + \sum_{|\nu|\geqslant 2} \widetilde{g}^{(k,2)}_{\nu_1\nu_2} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2}, \qquad t = k\theta.
\end{aligned} \tag{4}$$

Матрица Φ_k определяется равенством $\Phi_k = (((-1)^k + 1)/2)\widetilde{\Phi}$, где $I + \widetilde{\Phi}$ — действительная каноническая форма матрицы монодромии линейного приближения системы (1).

Коэффициенты $\widetilde{f}^{(i)}_{\nu_1\nu_2}(t) (i = 1, 2)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^{(i)}_{30}(t) &= p_{i30}(\psi^{11}(t))^3 + p_{i21}(\psi^{11}(t))^2\psi^{21}(t) + p_{i12}(t)\psi^{11}(t)(\psi^{21}(t))^2 + p_{i03}(t)(\psi^{21}(t))^3,\\
\widetilde{f}^{(i)}_{21}(t) &= 3p_{i30}(t)(\psi^{11}(t))^2\psi^{12}(t) + p_{i21}(t)((\psi^{11}(t))^2\psi^{22}(t) + 2\psi^{11}(t)\psi^{12}(t)\psi^{21}(t)) +\\
&\quad + p_{i12}(t)((\psi^{21}(t))^2\psi^{12}(t) + 2\psi^{11}(t)\psi^{21}(t)\psi^{22}(t)) + 3p_{i03}(t)(\psi^{21}(t))^2\psi^{22}(t),\\
\widetilde{f}^{(i)}_{20}(t) &= p_{i20}(t)(\psi^{21}(t))^2 + p_{i11}(t)\psi^{11}(t)\psi^{21}(t) + p_{i02}(t)(\psi^{11}(t))^2,\\
\widetilde{f}^{(i)}_{11}(t) &= 2p_{i20}(t)\psi^{21}(t)\psi^{22}(t) + p_{i11}(t)(\psi^{11}(t)\psi^{22}(t) + \psi^{12}(t)\psi^{21}(t)) +\\
&\quad + 2p_{i02}(t)\psi^{11}(t)\psi^{12}(t),
\end{aligned}$$

а $\widetilde{f}^{(i)}_{03}(t)$, $\widetilde{f}^{(i)}_{12}(t)$, $\widetilde{f}^{(i)}_{02}(t)$ получаются из $\widetilde{f}^{(i)}_{30}(t)$, $\widetilde{f}^{(i)}_{21}(t)$, $\widetilde{f}^{(i)}_{20}(t)$ соответственно заменой индексов в $\psi^{ij}(t)$: $11 \longleftrightarrow 12$, $21 \longleftrightarrow 22$. Здесь использованы обозначения

$$p_{ikl}(t) = f^{(1)}_{kl}\psi_{i1}(t) + f^{(2)}_{kl}\psi_{i2}(t),$$

$\psi^{ij}(t)$ — элементы матрицы, обратной к $\Psi(t)$. Коэффициенты $\widetilde{g}^{(k,i)}_{\nu_1\nu_2}$ $(i=1,2)$ находятся из соотношений

$$\widetilde{g}^{k,i}_{\nu_1\nu_2} = \psi_{i1}(k\theta+0)\alpha^{k,1}_{\nu_1\nu_2}(k\theta) + \psi_{i2}(k\theta+0)\alpha^{k,2}_{\nu_1\nu_2}(k\theta),$$

где

$$\alpha^{k,i}_{20}(t) = g^{k,i}_{20}(\psi^{11}(t))^2 + g^{k,i}_{11}\psi^{11}(t)\psi^{21}(t) + g^{k,i}_{02}(\psi^{21}(t))^2,$$
$$\alpha^{k,i}_{11}(t) = 2g^{k,i}_{20}\psi^{11}(t)\psi^{12}(t) + 2g^{k,i}_{02}\psi^{21}(t)\psi^{22}(t) + g^{k,i}_{11}(\psi^{11}(t)\psi^{22}(t) + \psi^{12}(t)\psi^{21}(t)),$$
$$\alpha^{k,i}_{30}(t) = g^{k,i}_{03}(\psi^{21}(t))^3 + g^{k,i}_{30}(\psi^{11}(t))^3 + g^{k,i}_{12}\psi^{11}(t)(\psi^{21}(t))^2 + g^{k,i}_{21}(\psi^{11}(t))^2\psi^{21}(t),$$
$$\alpha^{k,i}_{21}(t) = 3g^{k,i}_{03}(\psi^{21}(t))^2\psi^{22}(t) + 3g^{k,i}_{30}(\psi^{11}(t))^2\psi^{12}(t) + g^{k,i}_{12}(2\psi^{11}(t)\psi^{21}(t)\psi^{22}(t) +$$
$$+ \psi^{12}(t)(\psi^{21}(t))^2) + g^{k,i}_{21}(2\psi^{11}(t)\psi^{21}(t)\psi^{12}(t) + \psi^{22}(t)(\psi^{11}(t))^2),$$

а $\alpha^{(k,i)}_{03}(t)$, $\alpha^{(k,i)}_{12}(t)$, $\alpha^{(k,i)}_{02}(t)$ получаются из $\alpha^{(k,i)}_{30}(t)$, $\alpha^{(k,i)}_{21}(t)$, $\alpha^{(k,i)}_{20}(t)$ соответственно заменой индексов в $\psi^{ij}(t)$: $11 \longleftrightarrow 12$, $21 \longleftrightarrow 22$.

Приравнивая к нулю коэффициенты в линейной части новой системы, получим матричное уравнение для $\Psi(t)$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\Psi A_0, \tag{5}$$

т. е. непрерывная часть имеет вид $\Psi(t) = \Psi_0 e^{-A_0(t-t_0)}$, где начальные значения Ψ_0 находим в зависимости от рассматриваемого промежутка $(k\theta, (k+1)\theta)$ из соотношений

$$\Psi(0+0) = T,$$
$$\Psi(\theta+0) = \Psi(0+0)e^{-A_0\theta}(B_1+I)^{-1},$$

причем, из условий 2θ-периодичности функции $\Psi(t)$ следует, что T — матрица перехода от Φ к $I+\widetilde{\Phi}$, т. е. $I+\widetilde{\Phi} = \{\varphi_{ij}\}^2_{i,j=1} = T\Phi T^{-1}$. Окончательно получим

$$\Psi(t) = \Psi(0+0)\left(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}e^{-A_0\theta}(B_1+I)^{-1} + \frac{1+(-1)^k}{2}I\right)e^{-A_0(t-k\theta)},$$
$$t \in [k\theta; (k+1)\theta).$$

Решение непрерывной части системы (4) будем искать в виде степенных рядов по начальным данным.

Определим функции

$$a^{(i)}_{20}(t) = \int\limits_t^{t+\theta} \widetilde{f}^{(i)}_{20}(s)\,ds, \qquad a^{(i)}_{11}(t) = \int\limits_t^{t+\theta} \widetilde{f}^{(i)}_{11}(s)\,ds, \qquad a^{(i)}_{02}(t) = \int\limits_t^{t+\theta} \widetilde{f}^{(i)}_{02}(s)\,ds,$$

$$a^{(i)}_{30}(t) = \int\limits_t^{t+\theta} (\widetilde{f}^{(i)}_{11}(s)a^{(2)}_{20}(s) + 2\widetilde{f}^{(i)}_{20}(s)a^{(1)}_{20}(s) + \widetilde{f}^{(i)}_{30}(s))\,ds,$$

$$a_{21}^{(i)}(t)=\int\limits_t^{t+\theta}(2\widetilde{f}_{02}^{(i)}(s)a_{20}^{(2)}(s)+\widetilde{f}_{11}^{(i)}(s)(a_{11}^{(2)}(s)+a_{20}^{(1)}(s))+2\widetilde{f}_{20}^{(i)}(s)a_{11}^{(1)}(s)+\widetilde{f}_{21}^{(i)}(s))\,ds,$$

$$a_{12}^{(i)}(t)=\int\limits_t^{t+\theta}(2\widetilde{f}_{02}^{(i)}(s)a_{11}^{(2)}(s)+\widetilde{f}_{11}^{(i)}(s)(a_{02}^{(2)}(s)+a_{11}^{(1)}(s))+2\widetilde{f}_{20}^{(i)}(s)a_{02}^{(1)}(s)+\widetilde{f}_{12}^{(i)}(s))\,ds,$$

$$a_{03}^{(i)}(t)=\int\limits_t^{t+\theta}(\widetilde{f}_{11}^{(i)}(s)a_{02}^{(1)}(s)+2\widetilde{f}_{02}^{(i)}(s)a_{02}^{(2)}(s)+\widetilde{f}_{03}^{(i)}(s))\,ds.$$

Обозначим $\overline{a}_{kl}^{(i)}$ и $\overline{\overline{a}}_{kl}^{(i)}$ значения функций $a_{kl}^{(i)}$ в точках $t=0$ и $t=\theta$ соответственно. Таким образом, точечное отображение Пуанкаре имеет вид

$$\begin{aligned}y_i(2\theta+0)&=\widetilde{\varphi}_{i1}y_{10}+\widetilde{\varphi}_{i2}y_{20}+s_{20}^{(i)}y_{10}^2+s_{11}^{(i)}y_{10}y_{20}+s_{02}^{(i)}y_{20}^2+s_{30}^{(i)}y_{10}^3+\\&+s_{21}^{(i)}y_{10}^2y_{20}+s_{12}^{(i)}y_{10}y_{20}^2+s_{03}^{(i)}y_{20}^3+\cdots,\end{aligned}\tag{6}$$

где для $i=1,2$ выполняются равенства

$$s_{20}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{20}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{20}^{(2)}+\widetilde{g}_{20}^{(2,i)},$$

$$s_{11}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{11}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{11}^{(2)}+\widetilde{g}_{11}^{(2,i)},$$

$$s_{02}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{02}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{02}^{(2)}+\widetilde{g}_{02}^{(2,i)},$$

$$s_{30}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{30}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{30}^{(2)}+2\widetilde{g}_{20}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{20}^{(1)}+\widetilde{g}_{11}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{20}^{(2)}+\widetilde{g}_{30}^{(2,i)},$$

$$s_{21}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{21}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{21}^{(2)}+2\widetilde{g}_{20}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{11}^{(1)}+2\widetilde{g}_{02}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{20}^{(2)}+\widetilde{g}_{11}^{(2,i)}(\overline{\overline{t}}_{11}^{(2)}+\overline{\overline{t}}_{20}^{(1)})+\widetilde{g}_{21}^{(2,i)},$$

$$s_{12}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{12}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{12}^{(2)}+2\widetilde{g}_{20}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{02}^{(1)}+2\widetilde{g}_{02}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{11}^{(2)}+\widetilde{g}_{11}^{(2,i)}(\overline{\overline{t}}_{02}^{(2)}+\overline{\overline{t}}_{11}^{(1)})+\widetilde{g}_{12}^{(2,i)},$$

$$s_{03}^{(i)}=\widetilde{\varphi}_{i1}\overline{\overline{t}}_{03}^{(1)}+\widetilde{\varphi}_{i2}\overline{\overline{t}}_{03}^{(2)}+2\widetilde{g}_{20}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{02}^{(2)}+\widetilde{g}_{11}^{(2,i)}\overline{\overline{t}}_{02}^{(1)}+\widetilde{g}_{03}^{(2,i)},$$

$$\overline{\overline{t}}_{20}^{(i)}=\overline{\overline{a}}_{20}^{(i)}+\overline{a}_{20}^{(i)}+\widetilde{g}_{20}^{(1,i)},\qquad \overline{\overline{t}}_{11}^{(i)}=\overline{\overline{a}}_{11}^{(i)}+\overline{a}_{11}^{(i)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,i)},\qquad \overline{\overline{t}}_{02}^{(i)}=\overline{\overline{a}}_{02}^{(i)}+\overline{a}_{02}^{(i)}+\widetilde{g}_{02}^{(1,i)},$$

$$\overline{\overline{t}}_{30}^{(i)}=\overline{\overline{a}}_{11}^{(i)}(\overline{a}_{20}^{(2)}+\widetilde{g}_{20}^{(1,2)})+2\overline{\overline{a}}_{20}^{(i)}(\overline{a}_{20}^{(1)}+\widetilde{g}_{20}^{(1,1)})+\overline{\overline{a}}_{30}^{(i)}+\overline{a}_{30}^{(i)}+2\overline{a}_{20}^{(1)}\widetilde{g}_{20}^{(1,i)}+\overline{a}_{20}^{(2)}\widetilde{g}_{11}^{(1,i)}+\widetilde{g}_{30}^{(1,i)},$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{t}}_{21}^{(i)}&=\overline{\overline{a}}_{11}^{(i)}(\overline{a}_{11}^{(2)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,2)}+\overline{a}_{20}^{(1)}+\widetilde{g}_{20}^{(1,1)})+2\overline{\overline{a}}_{20}^{(i)}(\overline{a}_{11}^{(1)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,1)})+2\overline{\overline{a}}_{02}^{(i)}(\overline{a}_{20}^{(2)}+\widetilde{g}_{20}^{(1,2)})+\\&+\overline{\overline{a}}_{21}^{(i)}+\overline{a}_{21}^{(i)}+2\overline{a}_{11}^{(1)}\widetilde{g}_{20}^{(1,i)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,i)}(\overline{a}_{11}^{(2)}+\overline{a}_{20}^{(1)})+\widetilde{g}_{21}^{(1,i)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{t}}_{12}^{(i)}&=\overline{\overline{a}}_{11}^{(i)}(\overline{a}_{02}^{(2)}+\widetilde{g}_{02}^{(1,2)}+\overline{a}_{11}^{(1)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,1)})+2\overline{\overline{a}}_{20}^{(i)}(\overline{a}_{02}^{(1)}+\widetilde{g}_{02}^{(1,1)})+2\overline{\overline{a}}_{02}^{(i)}(\overline{a}_{11}^{(2)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,2)})+\\&+\overline{\overline{a}}_{12}^{(i)}+\overline{a}_{12}^{(i)}+2\overline{a}_{11}^{(1)}\widetilde{g}_{02}^{(1,i)}+\widetilde{g}_{11}^{(1,i)}(\overline{a}_{11}^{(1)}+\overline{a}_{02}^{(2)})+\widetilde{g}_{12}^{(1,i)},\end{aligned}$$

$$\overline{\overline{t}}_{03}^{(i)}=\overline{\overline{a}}_{11}^{(i)}(\overline{a}_{02}^{(1)}+\widetilde{g}_{02}^{(1,1)})+2\overline{\overline{a}}_{02}^{(i)}(\overline{a}_{02}^{(2)}+\widetilde{g}_{02}^{(1,2)})+\overline{\overline{a}}_{03}^{(i)}+\overline{a}_{03}^{(i)}+2\overline{a}_{02}^{(2)}\widetilde{g}_{02}^{(1,i)}+\overline{a}_{02}^{(1)}\widetilde{g}_{11}^{(1,i)}+\widetilde{g}_{03}^{(1,i)}.$$

Условия устойчивости. *Случай пары комплексно-сопряженных мультипликаторов.* Матрицу $I + \widetilde{\Phi}$ выберем в виде

$$I + \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$G_{30} = \alpha s_{20}^{(1)} - \beta s_{20}^{(2)}, \qquad G_{21} = \beta s_{20}^{(1)} + \alpha s_{11}^{(1)} + \alpha s_{20}^{(2)} - \beta s_{11}^{(2)},$$

$$G_{12} = \beta s_{11}^{(1)} + \alpha s_{02}^{(1)} + \alpha s_{11}^{(2)} - \beta s_{02}^{(2)}, \qquad G_{03} = \beta s_{02}^{(1)} + \alpha s_{02}^{(2)},$$

$$G_{40} = (s_{20}^{(1)})^2 + 2\alpha s_{30}^{(1)} + (s_{20}^{(2)})^2 - 2\beta s_{30}^{(2)},$$

$$G_{31} = 2s_{11}^{(1)} s_{20}^{(1)} + 2\alpha s_{21}^{(1)} + 2\beta s_{30}^{(1)} + 2s_{11}^{(2)} s_{20}^{(2)} - 2\beta s_{21}^{(2)} + 2\alpha s_{30}^{(2)},$$

$$G_{22} = 2s_{20}^{(1)} s_{02}^{(1)} + 2\alpha s_{12}^{(1)} + 2\beta s_{21}^{(1)} + 2s_{20}^{(2)} s_{02}^{(2)} - 2\beta s_{12}^{(2)} + 2\alpha s_{21}^{(2)},$$

$$G_{13} = 2s_{11}^{(1)} s_{02}^{(1)} + 2\alpha s_{03}^{(1)} + 2\beta s_{12}^{(1)} + 2s_{11}^{(2)} s_{02}^{(2)} - 2\beta s_{03}^{(2)} + 2\alpha s_{12}^{(2)},$$

$$G_{04} = (s_{02}^{(1)})^2 + 2\beta s_{03}^{(1)} + (s_{02}^{(2)})^2 + 2\alpha s_{03}^{(2)},$$

$$F_{30} = \alpha s_{20}^{(2)} + \beta s_{20}^{(1)}, \qquad F_{21} = \alpha s_{11}^{(2)} + \beta s_{20}^{(1)} + \beta s_{11}^{(1)} - \alpha s_{20}^{(1)},$$

$$F_{12} = \alpha s_{02}^{(2)} + \beta s_{11}^{(2)} + \beta s_{02}^{(1)} - \alpha s_{11}^{(1)}, \qquad F_{03} = -\alpha s_{02}^{(1)} + \beta s_{02}^{(2)}.$$

Определим аналог первой ляпуновской величины [5] для системы (1)

$$L = \frac{1}{16}(3G_{40} + G_{22} + 3G_{04}) - \frac{3}{32}(5(G_{30}^2 + G_{03}^2) + 2(G_{30}G_{12} + G_{03}G_{21}) +$$
$$+ (G_{12}^2 + G_{21}^2)) + \frac{1}{64}\left(3\Lambda_1 + 3\Lambda_2 \operatorname{ctg}\left(\frac{3\Omega}{2}\right) - \Lambda_3 - \Lambda_4 \operatorname{ctg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right),$$

где $\Lambda_1 = (G_{03} - G_{21})(F_{30} - F_{12}) + (G_{30} - G_{12})(F_{03} - F_{21})$, $\Lambda_2 = (G_{21} - G_{03})(F_{03} - F_{21}) + (G_{12} - G_{30})(F_{30} - F_{12})$, а $-\Lambda_2$ и Λ_4 находятся из Λ_1 и Λ_3 соответственно перестановкой нижних индексов в F_{ij}.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *такая, что выполняются условия:*

1) мультипликаторы линейного приближения системы (1) *лежат на единичной окружности с выколотыми точками вида $\pi k_1/3$ и $\pi/2 + \pi k_2$ (k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$);*

2) выполняется неравенство: $L < 0$ ($L > 0$).

Тогда положение равновесия $x_1 = x_2 = 0$ системы (1) *асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Доказательство следует из утверждений об устойчивости неподвижных точек типичных точечных отображений из работы [6] и свойств отображений Пуанкаре для левосторонних динамических систем [8].

Случай одного мультипликатора, равного 1. Матрицу $I + \widetilde{\Phi}$ выберем в виде

$$I + \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & \gamma \end{pmatrix},$$

где $|\gamma| < 1$.

Теорема 2. *Предположим, что система уравнений возмущенного движения* (1) *такова, что*

$$s_{20}^{(1)} + \frac{\eta}{1-\gamma} s_{11}^{(1)} + \frac{\eta^2}{(1-\gamma)^2} s_{02}^{(1)} = 0,$$

$$\left(\frac{s_{20}^{(2)}}{1-\gamma} + \frac{s_{11}^{(2)}\eta}{(1-\gamma)^2} + \frac{s_{02}^{(2)}\eta^2}{(1-\gamma)^3}\right) s_{11}^{(1)} + 2\left(\frac{s_{20}^{(2)}\eta}{(1-\gamma)^2} + \frac{s_{11}^{(2)}\eta^2}{(1-\gamma)^3} + \frac{s_{02}^{(2)}\eta^3}{(1-\gamma)^4}\right) s_{02}^{(1)} +$$
$$+ s_{30}^{(1)} + \frac{\eta}{1-\gamma} s_{21}^{(1)} + \frac{\eta^2}{(1-\gamma)^2} s_{12}^{(1)} + \frac{\eta^3}{(1-\gamma)^3} s_{03}^{(1)} < 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство следует из принципа подчинения [7] в адиабатическом приближении, утверждений об устойчивости неподвижных точек типичных точечных отображений из работы [6] и свойств отображений Пуанкаре для левосторонних динамических систем [8].

Аналогично устанавливается следующий результат.

Теорема 3. *Предположим, что система уравнений возмущенного движения* (1) *такова, что*

$$s_{20}^{(1)} + \frac{\eta}{1-\gamma} s_{11}^{(1)} + \frac{\eta^2}{(1-\gamma)^2} s_{02}^{(1)} \neq 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (1) *неустойчиво.*

Случай одного мультипликатора, равного -1.

Теорема 4. *Предположим, что система уравнений возмущенного движения* (1) *такова, что*

$$\left(\frac{s_{20}^{(2)}}{1-\gamma} + \frac{s_{11}^{(2)}\eta}{(1-\gamma)^2} + \frac{s_{02}^{(2)}\eta^2}{(1-\gamma)^3}\right) s_{11}^{(1)} + 2\left(\frac{s_{20}^{(2)}\eta}{(1-\gamma)^2} + \frac{s_{11}^{(3)}\eta}{(1-\gamma)^3} + \frac{s_{02}^{(2)}\eta^3}{(1-\gamma)^4}\right) s_{02}^{(1)} +$$
$$+ s_{30}^{(1)} + \frac{\eta}{1-\gamma} s_{21}^{(1)} + \frac{\eta^2}{(1-\gamma)^2} s_{12}^{(1)} + \frac{\eta^3}{(1-\gamma)^3} s_{03}^{(1)} +$$
$$+ 2\left(s_{20}^{(1)} + \frac{\eta}{1-\gamma} s_{11}^{(1)} + \frac{\eta^2}{(1-\gamma)^2} s_{02}^{(1)}\right)^2 > 0 \qquad (< 0).$$

Тогда тривиальное решение системы (1) *асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. – Москва: Наука, 1990. – 312 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1972. – 470 с.
5. *Баутин Н. Н.* О поведении динамических систем при малых нарушениях условий устойчивости Рауса-Гурвица // Прикл. мех. и мат. – 1948. – **12**, № 5. – С. 613–632.
6. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. – Пущино: Изд. НЦ Биол. иссл. АН СССР, 1985. – 216 с.

7. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – Москва: Мир, 1985. – 424 с.
8. *Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G.* Impulsive and Hybrid Dynamical Systems. Stability, Dissipativity and Control. – Princeton: Princeton University Press, 2006. – 504 p.
9. *Lobas L. G., Koval'chuk V. V., Bambura O. V.* Evolution of the Equilibrium States of an Inverted Pendulum // Int. Apl. Mech. – 2007. – **43**, No 4. – P. 121–129.
10. *Мартынюк А. А., Никитина Н. В.* Нахождение предельного значения энергии двойного математического маятника // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 106–114.

Черкасский национальный университет
им. Б. Хмельницкого
Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 27.11.2007

УДК 534.232.001.11

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О понятиях “среднее и действующее значения вибрации”

The notions of mean and effective values of vibrations are substantiated.

В работах по теории колебаний, например [1, 2], рассматриваются осредненные характеристики механических колебаний, такие, как среднее значение, среднее абсолютного значения и среднее квадратичное значение за период колебательного процесса. Однако достаточного объяснения целесообразности этих значений не приводится. Понятно, что среднее значение гармонического колебания $x = x_a \sin\omega t$, где x_a — амплитуда; ω — круговая частота; t — время за период $T = 2\pi/\omega$, определяемое формулой $x_{\text{ср}} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T x_a \sin\omega t\, dt = 0$. Это среднее значение выводится чисто математически и в практике исследования механических колебаний является бесполезным. Другое дело среднее абсолютного значения

$$U_{\text{ср.абс}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T |x(t)|\, dt, \tag{1}$$

которое физически отражает действие механических гармонических колебаний в виде двух их полуволн. В теоретических основах электротехники [3] для гармонических токов и напряжений формула (1) модернизирована в виде

$$x_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} x(t)\, dt = \frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} x_a \sin\omega t\, dt = \frac{2x_a}{\pi}. \tag{2}$$