УДК 517.9

П. О. Касьянов

Про періодичні розв'язки еволюційних включень першого порядку з w_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{В. С. Мельником}}$)

We consider the first-order differential-operator inclusions with operators of the w_{λ_0}-pseudomonotone type. The existence of periodic solutions for such inclusions by using the Faedo–Galerkin method is justified. The a priori estimates have been obtained. An example illustrating the given result has been adduced.

Значний прогрес при дослідженні нелінійних граничних задач для рівнянь в частинних похідних став можливим завдяки глибокому розвитку методів нелінійного аналізу, які знайшли застосування в різних розділах математики. Останнім часом стало природним зводити ці задачі до вивчення нелінійних операторних та диференціально-операторних рівнянь і включень у функціональних просторах. При такому підході результати для конкретних систем отримуються як наслідки операторних теорем. При доведенні збіжності до відповідних розв'язків часто використовують метод монотонності, метод компактності та їх комбінацію. Класична теорія охоплює випадок псевдомонотонних операторів [1]. Ф. Браудером та П. Гессом [2] введено клас узагальнено псевдомонотонних операторів. Ідея І. В. Скрипника переходу в класичних означеннях до підпослідовностей [3], реалізована для стаціонарних включень М. З. Згуровським, В. С. Мельником та О. М. Новіковим [4–7], дала можливість розглядати істотно ширший клас λ-псевдомонотонних відображень, замкнений відносно суми відображень, що для класичних означень виявилось проблематичним [6]. П. О. Касьяновим, В. С. Мельником і С. Тоскано [8, 9] було введено клас w_{λ_0}-псевдомонотонних відображень, що включає в себе, зокрема, клас узагальнено псевдомонотонних відображень і є замкненим відносно підсумовування. Виникає задача обгрунтування методу Фаедо–Гальоркіна для періодичних розв'язків диференціально-операторних включень з w_{λ_0}-псевдомонотонними багатозначними відображеннями в банахових просторах.

У даній роботі розглядаються періодичні розв'язки для еволюційних включень I порядку з многозначними w_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями. Для досить широкого класу істотно многозначних відображень доводиться розв'язність та виводяться апріорні оцінки для розв'язків. Як приклад розглядається клас задач з нелінійними операторами, збуреними субдиференціалом Кларка, для якого доводиться розв'язність. Одержані результати є новими і для рівнянь також.

Постановка задачі. Нехай $(V_i; H; V_i^*)$, $i = 1, 2$, — еволюційні трійки такі, що множина $V = V_1 \bigcap V_2$ щільна в V_1, в V_2 та в H. Для чисел p_i, r_i, q_i, $i = 1, 2$, які задовольняють умови:

$$1 < p_i \leqslant r_i < +\infty, \qquad q_i \geqslant r_i' > 1, \qquad p_i^{-1} + q_i^{-1} = r_i^{-1} + r_i'^{-1} = 1, \qquad i = 1, 2,$$

розглянемо простори

$$X = L_{r_1}(S; H) \bigcap L_{r_2}(S; H) \bigcap L_{p_1}(S; V_1) \bigcap L_{p_2}(S; V_2),$$

$$X^* = L_{q_1}(S;V_1^*) + L_{q_2}(S;V_2^*) + L_{r_2'}(S;H) + L_{r_1'}(S;H),$$

$$X_i = L_{r_i}(S;H) \bigcap L_{p_i}(S;V_i), \qquad X_i^* = L_{q_i}(S;V_i^*) + L_{r_i'}(S;H), \qquad i = 1,2,$$

із відповідними нормами [10].

Для многозначних відображень $A\colon X_1 \to C_v(X_1^*)$ та $B\colon X_2 \to C_v(X_2^*)$ розглядається така проблема на пошук розв'язку методом Фаедо–Гальоркіна в класі $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$:

$$\begin{cases} y' + A(y) + B(y) \ni f, \\ y(0) = y(T). \end{cases} \tag{1}$$

Тут похідна y' елемента $y \in X$ розуміється в сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S;V^*) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S);V_w^*)$, з $V = V_1 \bigcap V_2$ та V_w^*, що дорівнює V^*, з топологією $\sigma(V^*,V)$ [11]. На W розглядається така норма:

$$\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*} \text{ для кожного } y \in W.$$

Зауваження. Простір W неперервно вкладений в $C(S;H)$. Тому умови на краях в (1) мають сенс.

Метод Фаедо–Гальоркіна. Додержуючись [1], припустимо існування сепарабельного гільбертового простору V_σ такого, що $V_\sigma \subset V_1$, $V_\sigma \subset V_2$ неперервно та щільно, $V_\sigma \subset H$ компактно та щільно. Тоді

$$V_\sigma \subset V_1 \subset H \subset V_1^* \subset V_\sigma^*, \qquad V_\sigma \subset V_2 \subset H \subset V_2^* \subset V_\sigma^*$$

неперервно та щільно. Для $i = 1,2$ покладемо

$$X_{i,\sigma} = L_{r_i}(S;H) \bigcap L_{p_i}(S;V_\sigma), \qquad X_\sigma = X_{1,\sigma} \bigcap X_{2,\sigma},$$

$$X_{i,\sigma}^* = L_{r_i'}(S;H) + L_{q_i}(S;V_\sigma^*), \qquad X_\sigma^* = X_{1,\sigma}^* + X_{2,\sigma}^*,$$

$$W_{i,\sigma} = \{y \in X_i \mid y' \in X_\sigma^*\}, \qquad W_\sigma = W_{1,\sigma} \bigcap W_{2,\sigma}.$$

Як повну систему векторів $\{h_i\}_{i\geqslant 1} \subset V_\sigma$ візьмемо спеціальний базис [12], тобто

i) $\{h_i\}_{i\geqslant 1}$ ортонормована в H;

ii) $\{h_i\}_{i\geqslant 1}$ ортогональна в V_σ;

iii) $\forall i \geqslant 1$ $(h_i,v)_{V_\sigma} = \lambda_i(h_i,v)$ $\forall v \in V_\sigma$, де $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2,\ldots,\lambda_j \longrightarrow \infty$ при $j \longrightarrow \infty$, $(\cdot,\cdot)_{V_\sigma}$ — природний скалярний добуток в V_σ.

Для кожного $n \geqslant 1$ покладемо $H_n = \operatorname{span}\{h_i\}_{i=1}^n$, $p_0 = \max\{r_1,r_2\}$ і розглянемо банахові простори

$$X_n = L_{p_0}(S;H_n), \qquad X_n^* = L_{q_0}(S;H_n), \qquad W_n = \{y \in X_n \mid y' \in X_n^*\},$$

де $1/p_0 + 1/q_0 = 1$. Для будь-якого $n \geqslant 1$ I_n — канонічне вкладення X_n в X, $I_n^*\colon X^* \to X_n^*$ — спряжений до I_n. Тоді

$$\sup_{n\geqslant 1} \|I_n^*\|_{\mathcal{L}(X_\sigma^*;X_\sigma^*)} = 1.$$

Введемо такі відображення:

$$A_n\colon = I_n^* A I_n\colon X_n \rightrightarrows X_n^*, \qquad B_n\colon = I_n^* B I_n\colon X_n \rightrightarrows X_n^*, \qquad f_n := I_n^* f \in X_n^*.$$

Разом із задачею (1) $\forall\, n \geqslant 1$ розглянемо такий клас задач:

$$\begin{cases} y_n' + A_n(y_n) + B_n(y_n) \ni f_n, \\ y_n(0) = y_n(T). \end{cases} \tag{2}$$

Тут похідна y_n' елемента $y_n \in X_n$ розуміється в сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S; H_n)$.

Означення 1. Будемо казати, що $y \in W$ — розв'язок задачі (1) отриманий методом Фаедо–Гальоркіна, якщо y — слабка границя деякої підпослідовності $\{y_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ у просторі W_σ послідовності розв'язків $\{y_n \in W_n,\, n \geqslant 1\}$ відповідних задач (2).

Класи відображень. Нехай Y — деякий банахів простір, Y^* — його топологічно спряжений простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y \colon Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ — спарювання. Для строгого многозначного відображення $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ визначимо верхню $[A(y), \omega]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \langle d, w \rangle_Y$ і нижню $[A(y), \omega]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \langle d, w \rangle_Y$ опорні функції, де $y, \omega \in Y$, а також верхню $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d \in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{Y^*}$ і нижню $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d \in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{Y^*}$ норми. Розглянемо пов'язані з A відображення $\mathrm{co}A : Y \rightrightarrows Y^*$ та $\overline{\mathrm{co}}^{*} A : Y \rightrightarrows Y^*$, визначені співвідношеннями $(\mathrm{co}A)(y) = \mathrm{co}(A(y))$ та $(\overline{\mathrm{co}}^{*} A(y)) = \overline{\mathrm{co}}^{*} (A(y))$ відповідно, де $\underline{*}$ — $*$-слабке замикання в Y^*. Опорні функції мають ряд властивостей [7]. Позначимо через $C_v(Y)$ сім'ю всіх непорожніх замкнених опуклих обмежених підмножин з простору Y.

Нехай W — нормований простір, неперервно вкладений в Y.

Означення 2. Многозначне відображення $A\colon Y \to 2^{Y^*}$ називається:

$+(-)$-*коерцитивним*, якщо існує дійсна функція $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах, така, що $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$ та

$$[A(y), y]_{+(-)} \geqslant \gamma(\|y\|_Y)\|y\|_Y \qquad \forall y \in Y;$$

локально обмеженим, якщо для фіксованого $y \in Y$ існують $m > 0$ та $M > 0$ такі, що $\|A(\xi)\|_+ \leqslant M$, коли $\|y - \xi\|_Y \leqslant m$, $\xi \in Y$;

λ_0-*псевдомонотонним* на W (w_{λ_0}-псевдомонотонним), якщо для будь-якої послідовності $\{y_n\}_{n\geqslant 0} \subset W$ такої, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^* при $n \to +\infty$, де $d_n \in \overline{\mathrm{co}}^{*} A(y_n)$ $\forall n \geqslant 1$, із нерівності

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_Y \leqslant 0$$

випливає існування таких підпослідовностей $\{y_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ з $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ та $\{d_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ з $\{d_n\}_{n\geqslant 1}$, для яких виконується

$$\varliminf_{k\to\infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_Y \geqslant [A(y_0), y_0 - w]_- \qquad \forall w \in Y.$$

Означене вище многозначне відображення задовольняє

властивість (П), якщо для довільної обмеженої множини $B \subset Y$, деякого $k > 0$ та деякого селектора ($d(y) \in A(y)$ $\forall\, y \in B$):

$$\langle d(y), y \rangle_Y \leqslant k \quad \text{для довільних} \quad y \in B,$$

має місце існування $K > 0$:

$$\|d(y)\|_{Y^*} \leqslant K \quad \text{для довільних} \quad y \in B.$$

Основний результат.

Теорема. *Нехай* $A\colon X_1 \to C_v(X_1^*)$ *та* $B\colon X_2 \to C_v(X_2^*)$ *— многозначні відображення такі, що:*

1) A *—* λ_0*-псевдомонотонне на* $W_{\sigma,1}$ *та задовольняє властивість* (П)*;*

2) B *—* λ_0*-псевдомонотонне на* $W_{\sigma,2}$ *та задовольняє властивість* (П)*;*

3) $C = A + B\colon X \rightrightarrows X^*$ *— локально обмежене на довільному скінченновимірному підпросторі з* X *та* $+$*-коерцитивне.*

Більше того, нехай $\{h_j\}_{j\geqslant 1} \subset V_\sigma$ *— спеціальний базис. Тоді для довільного* $f \in X^*$ *множина*

$$K_H^{\text{per}}(f) := \{y \in W \mid y \text{ — розв'язок } (1), \text{ одержаний методом Фаедо–Гальоркіна}\}$$

непорожня та

$$K_H^{\text{per}}(f) = \bigcap_{n\geqslant 1}\left[\bigcup_{m\geqslant n} K_m^{\text{per}}(f_m)\right]_{X_w},$$

де для довільного $n \geqslant 1$

$$K_n^{\text{per}}(f_n) = \{y_n \in W_n \mid y_n \text{ — розв'язок } (1)\}.$$

У випадку, коли $A + B\colon X \rightrightarrows X^*$ *— -коерцитивне, тоді* $K_H^{\text{per}}(f)$ *— слабкий компакт в* X *та в* W_σ*.*

П р и к л а д. Розглянемо обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$, $S = [0, T]$, $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0; T)$. Нехай при $i = 1, 2$, $m_i \in \mathbb{N}$, N_1^i (відповідно N_2^i) — число диференціювань за x порядку $\leqslant m_i - 1$ (відповідно m_i) та $\{A_\alpha^i(x, t, \eta, \xi)\}_{|\alpha|\leqslant m_i}$ — сім'я дійсних функцій, означених на $Q \times R^{N_1^i} \times R^{N_2^i}$. Нехай

$$D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\} - \text{ диференціювання за } x,$$

$$\delta_i u = \{u, Du, \ldots, D^{m_i - 1}u\},$$

$$A_\alpha^i(x, t, \delta_i u, D^{m_i} v)\colon x, t \to A_\alpha^i(x, t, \delta_i u(x, t), D^{m_i} v(x, t)).$$

Більше того, нехай $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — локально ліпшіцова функція, $\Phi = \partial_{Cl}\psi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ — узагальнений градієнт Кларка [13]:

$$\exists C > 0\colon \quad \|\Phi(t)\|_+ \leqslant C(1 + |t|), \qquad [\Phi(t), t]_+ \geqslant \frac{1}{C}(t^2 - 1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Розглянемо таку задачу:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m_1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^1(x, t, \delta_1 y(x,t), D^{m_1} y(x,t))) + \\ + \sum_{|\alpha|\leqslant m_2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^2(x, t, \delta_2 y(x,t), D^{m_2} y(x,t))) + \Phi(y(x,t)) \ni f(x,t) \text{ в } Q, \tag{4}$$

$$y(x,0) = y(x,T) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5}$$

$$D^\alpha y(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma_T \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant \max\{m_1; m_2\}. \tag{6}$$

Припустимо, що $H = L_2(\Omega)$ та $V_i = W_0^{m_i,p_i}(\Omega)$ з $p_i \in (1,2]$: $V_i \subset H$ неперервно. За відповідних умов на A_α^i дану проблему перепишемо як

$$y' + A_1(y) + A_2(y) + \partial\varphi(y) \ni f, \qquad y(0) = y(T), \tag{7}$$

де $f \in X^* = L_2(S; L_2(\Omega)) + L_{q_1}(S; W^{-m_1,q_1}(\Omega)) + L_{q_2}(S; W^{-m_2,q_2}(\Omega))$ $(p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1)$, $\partial\varphi$ — субдиференціал Кларка інтегрального функціонала $\varphi(y) = \int\limits_Q \psi(y(x,t))\,dxdt$ в $L_2(S; L_2(\Omega)) = \mathcal{H}$. Елемент $y \in W$, що задовольняє (7), називається узагальненим розв'язком задачі (4)–(6).

Вибір базису. Як повну систему векторів у просторі $W_0^{m_i,p_i}(\Omega)$ можемо взяти спеціальний базис для пари $(H_0^{\max\{m_1;m_2\}+\varepsilon}(\Omega);\ L_2(\Omega))$ з відповідним $\varepsilon \geqslant 0$.

Означення операторів $\boldsymbol{A_i}$. Нехай $A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)$, означені в $Q \times R^{N_1^i} \times R^{N_2^i}$, задовольняють умови:

для майже всіх x, $t \in$ Q η, $\xi \to A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)$ неперервна на $R^{N_1^i} \times R^{N_2^i}$;

для всіх η, ξ відображення x, $t \to A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)$ вимірне на Q;

$$\sum_{|\alpha|=m_i} A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)\xi_\alpha \frac{1}{|\xi| + |\xi|^{p_i-1}} \to +\infty \qquad \text{при} \qquad |\xi| \to \infty$$

для майже всіх x, $t \in Q$ та обмежених $|\eta|$;

$$\sum_{|\alpha|=m_i} (A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi) - A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi^*))(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*) > 0 \qquad \text{при} \qquad \xi \neq \xi^*$$

для майже всіх x, $t \in Q$ та $\forall\eta$;

$$\sum_{|\alpha|=m_i} A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)\xi_\alpha \geqslant c|\xi|^{p_i} \qquad \text{для великих} \qquad |\xi|;$$

$$|A_\alpha^i(x,t,\eta,\xi)| \leqslant c[|\eta|^{p_i-1} + |\xi|^{p_i-1} + k(x,t)], \qquad k \in L_{q_i}(Q).$$

Застосувавши теорему, отримаємо, що задача (4)–(6) має узагальнений розв'язок, який можна одержати методом Фаедо–Гальоркіна.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
2. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mapping of monotone type in Banach spaces // J. Func. Anal. – 1972. – **11**, No 2. – P. 251–294.
3. *Скрыпник И. В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. – Москва: Наука, 1990. – 442 с.
4. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 4. – С. 57–69.
5. *Мельник В. С.* Про критичні точки деяких класів багатозначних відображень // Там же. – 1997. – № 2. – С. 87–98.
6. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Там же. – 2002. – № 2. – С. 70–85.
7. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. – 590 с.

8. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103–126.
9. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano S.* Periodic solutions for nonlinear evolution equations with W_{λ_0}-pseudomonotone maps // Нелінійні коливання. – 2006. – No 2. – С. 187–212.
10. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with w_λ-pseudomonotone maps. – Киев: Наук. думка, 2007. – 308 с.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. В 4 т. – Москва: Мир, 1977. – Т. 1. – 359 с.
12. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York, 1988. – 643 p.
13. *Clarke F. H.* Optimization and nonsmooth analysis. – Philadelphia: SIAM, 1990. – 280 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 23.08.2007

УДК 512.54

Я. В. Лавренюк, В. В. Некрашевич

Групи зберігаючих міру гомеоморфізмів множини Кантора

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

We study the Bernoulli measure-preserving groups of self-homeomorphisms of spherically homogeneous trees.

1. Нагадаємо необхідні нам поняття, пов'язані з кореневими деревами та їхніми границями. Більш докладно про це можна прочитати в [1, 2]. Кореневе дерево — це дерево з виділеною вершиною, яка називається коренем дерева. Ми розглядатимемо лише локально скінченні дерева.

Вершина v дерева T лежить під вершиною w, якщо шлях, що з'єднує вершину v з коренем, містить вершину w (позначатимемо це $v \prec w$). Ми позначатимемо T_v повне піддерево дерева T, що складається з усіх вершин, що лежать нижче від v з коренем v.

Рівнем n (сферою радіусом n) називається множина V_n, що складається з усіх вершин, які лежать на відстані n від кореня. Кореневе дерево T називається сферично однорідним, якщо в кожному рівні дерева T усі вершини мають однакову валентність. Сферичний індекс сферично однорідного дерева T — це послідовність $(n_0, n_1, \ldots)$, де n_0 — валентність кореневої вершини, а $n_m + 1$ — валентність довільної вершини з рівня m. Нагадаємо, що супернатуральним числом називається формальний нескінченний добуток вигляду $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$, де p_1, p_2, $\ldots$ — усі прості числа в природному порядку, а α_i — або ціле невід'ємне число,