ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 513.6



**Ю. В. Боднарчук, Д. І. Морозов**

# Скінченностанова спряженість лінійних функцій на кільці цілих 2-адичних чисел

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)*

*For automorphisms of an infinity binary tree which are realized as linear functions on the ring of integer 2-adic numbers, the problem of finite state conjugation has solved.*

Під бінарним деревом $T_2$ будемо розуміти нескінченне дерево з однією кореневою вершиною степеня 2, решта вершин якого мають степінь 3. Добре відомо (див. [1, 2]), що група автоморфізмів $T_2$ є проективною границею ітерованих вінцевих добутків циклічної групи другого порядку, тобто

$$\operatorname{Aut} T_2 \simeq \varprojlim_n \wr_{i=1}^{n} C_2^i.$$

Автоморфізм $\alpha \in \operatorname{Aut} T_2$ індукує дію на піддеревах $T_2$. Назвемо $\alpha$ скінченностановим, якщо він індукує скінченну кількість дій на піддеревах. Скінченностанові автоморфізми утворюють групу, яку позначимо $F \operatorname{Aut} T_2$.

З іншого боку, ребрам дерева можна приписати мітки — 0,1 для лівого та правого ребра, що йдуть униз. При цьому кожному нескінченному шляху на дереві, що починається з кореня, буде відповідати нескінченна послідовність нулів та одиниць, яку можна зіставити з цілим 2-адичним числом. Після цього автоморфізми $T_2$ можуть бути ототожнені з бієкціями кільця цілих 2-адичних чисел $Z_2$. Наприклад, нижченаведений 2-становий автоморфізм можна визначити рекурентно:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma, \tag{1}$$

тут вказано, що автоморфізм $\varepsilon$ діє на лівому піддереві тотожно, на правому самоподібно, а $\sigma$ переставляє ці піддерева.

З іншого боку, автоморфізм $\varepsilon$ може бути визначений як функція $\epsilon\colon Z_2 \to Z_2$, $x \to x+1$, і тому має назву "додавальна машина" (adding machine). Добре відомо (див. [3, 4]), що централізатор $C_{\operatorname{Aut} T_2}(\varepsilon)$ збігається із замиканням циклічної групи $\langle\varepsilon\rangle$ в топології проективної границі на групі $\operatorname{Aut} T_2$ і складається з функцій $x \to x+p$, $p \in Z_2$, $C_{\operatorname{Aut} T_2}(\varepsilon) \simeq Z_2^+$.

Метою даної роботи є дослідження проблеми спряженості для автоморфізмів $T_2$, які реалізуються лінійними функціями виду $x \to ax + b$, $a \in Z_2^*$, $b \in Z_2$ у групі скінченностанових автоморфізмів $F\operatorname{Aut}T_2$. Зауважимо, що проблема скінченностанової спряженості в загальному випадку є надзвичайно складною, на відміну від $\operatorname{Aut}T_2$, де проблема спряженості є повністю розв'язаною.

Характеризація скінченностанових автоморфізмів $T_2$, які задаються лінійними функціями на $Z_2$, буде здійснена за допомогою раціональних чисел.

**Лема 1.** $(x + p) \in F\operatorname{Aut}T_2 \Leftrightarrow p \in Z_2 \bigcap \mathbb{Q}$.

**Доведення.** $\Rightarrow$ Автоморфізм $x + p\colon 0 \to p$. Скінченностановий автоморфізм переводить квазіперіодичні кінці в квазіперіодичні. Оскільки $\ldots 000$ квазіперіодичний, то і $p$ квазіперіодичний, тобто належить $Z_2 \bigcap \mathbb{Q}$. Квазіперіодичне число $p$ має такий двійковий запис:

$$\begin{aligned} p = {} & \ldots a_{k+m} \ldots a_{k+1} \ldots a_{k+m} \ldots a_{k+1} a_k \ldots a_2 a_1 = \\ & = \ldots 0 \ldots 01 \ldots 0 \ldots 01 \cdot 2^k \cdot q + a_k \ldots a_2 a_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Натуральне число $a_{k+m} \ldots a_{k+1}$ будемо називати періодом числа $p$.

$\Leftarrow$ Згідно з (1) автоморфізм $\varepsilon$ підноситься у 2-адичний степінь таким чином:

$$\varepsilon^{2p} = (\varepsilon^p, \varepsilon^p), \varepsilon^{2p+1} = (\varepsilon^p, \varepsilon^{p+1}) \circ \sigma. \tag{3}$$

Виходячи з (2), маємо

$$\varepsilon^p = \left(\varepsilon^{\ldots 01 \frac{0\ldots01}{m}}\right)^{q*2^n} \circ \varepsilon^v,$$

де $q$, $m$, $v$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $v$ — початок довжини $n$ двійкового запису числа $p$ до початку періоду $q$ довжини $m$.

Згідно з (3) автоморфізм $\varepsilon^{\ldots 01 \frac{0\ldots01}{m}}$ містить $m$ станів вигляду

$$\left(\varepsilon^{\ldots 01 \frac{0\ldots01}{m}}\right)^{2^k}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

та $m - 1$ станів вигляду $\left(\varepsilon^{\ldots 01} \dfrac{0\ldots01}{m}\right)^{2^k} \circ \varepsilon$, $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, тобто містить $2m-1$ станів. Оскільки $\varepsilon^{\ldots 01} \dfrac{0\ldots01}{m}$ скінченностановий автоморфізм, то і $\varepsilon^p$ скінченностановий, оскільки $q$, $v$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

**Лема 2.** *Автоморфізм* $px \in F\operatorname{Aut}T_2 \Leftrightarrow p \in (Z_2 \bigcap \mathbb{Q})^*$.

**Доведення.** Автоморфізми $f_1(x) = (2k+1)x$ та $f_2(x) = f_1(x)^{-1} = (1/(2k+1))x$ можуть бути скінченностановими тільки одночасно. Оскільки

$$\begin{aligned} & f_1 = {f_2}^{-1}, \\ & \frac{2m+1}{2k+1}x = (2m+1)x \circ \frac{1}{2k+1}x, \\ & -kx = -x \circ kx, \end{aligned}$$

то достатньо довести, що $-x$ та $(2t+1)x$ є скінченностановими при $t \in \mathbb{Z}^+$.

Автоморфізм $(2t+1)x$ містить тільки стани вигляду $(2t+1)x+f$, де $f \in \{0, 1, \ldots, (2t+1)\}$. Дійсно,

$$(2t+1)x = ((2t+1)x, (2t+1)x+t),$$
$$(2t+1)x + 2f = ((2t+1)x+f, (2t+1)x + (k+f))(2t+1)x + (2f+1) =$$
$$= ((2t+1)x+f, (2t+1)x + (t+f+1)) \circ \sigma.$$

Якщо $f \leqslant t$, то $t+f \leqslant 2k$, $t+f+1 \leqslant 2t+1$, тобто автоморфізм $(2t+1)x$ має не більше $2t+2$ станів.

Далі отримаємо рівності

$$-x = (-x, -x-1),$$
$$-x-1 = (-x-1, -x-1) \circ \sigma,$$

тобто $-x$ є автоморфізмом з двома станами.

**Лема 3.** $f(x) = p_1 x + p_2 \in F\operatorname{Aut} T_2 \Leftrightarrow p_1,\ p_2 \in Z_2 \bigcap \mathbb{Q}$.

**Доведення.** Для доведення леми, скористаємося розкладом

$$p_1 x + p_2 = p_1 x \circ (x + p_2).$$

$\Leftarrow$ Оскільки за лемами 1, 2 $x+p_2$ та $p_1 x$ є скінченностановими, то і $p_1 x + p_2$ є скінченностановим.

$\Rightarrow$ Автоморфізм $p_1 x + p_2$ переводить 0 в $p_2$. Оскільки $p_1 x + p_2 \in F\operatorname{Aut} T_2$, то $p_2 \in Z_2 \bigcap \mathbb{Q}$. За лемою 1 $x + p_2 \in F\operatorname{Aut} T_2$, отже, і автоморфізм $p_1 x \in F\operatorname{Aut} T_2$, а за лемою 2 $p_1 \in Z_2 \bigcap \mathbb{Q}$.

Перейдемо до питання спряженості. Для цього розглянемо рівняння відносно автоморфізму $\chi \in \operatorname{Aut} T_2$

$$\alpha^{\chi} = \beta, \tag{4}$$

для даних $\alpha$, $\beta \in \operatorname{Aut} T_2$. Зауважимо, що згідно з [3] якщо автоморфізми $\alpha$, $\beta$ мають максимальний пропорядок, то рівняння (4) має єдиний розв'язок, який фіксує $\ldots 000$. Позначимо цей розв'язок через $\chi_0$. На відміну від автоморфізмів $x+1, 5x+1, 9x+1, \ldots$ автоморфізми $3x+1, 7x+1 \ldots$ не є максимального пропорядку. Для розширення класу лінійних функцій на $Z_2$ введемо операцію $\bigoplus$ додавання за модулем 2. З використанням цієї операції отримуємо

**Теорема 1.** *Функції* $f_1(x) = (4k+1)x+1$ *та* $f_2(x) = -(4k+1)x \oplus 1$ $(k \in Z_2)$ *спряжені в* $F\operatorname{Aut} T_2$.

**Доведення.** Має місце рівність

$$(-x, x)^{-1} \circ ((4k+1)x+1) \circ (-x, x) = -(4k+1)x \oplus 1.$$

А оскільки $-x \in F\operatorname{Aut} T_2$ (за лемою 2), то і $(-x, x) \in F\operatorname{Aut} T_2$.

**Теорема 2.** *Скінченностанові автоморфізми максимального пропорядку вигляду* $ax+1$ *та* $a^{-1}x+1$ *не спряжені в* $F\operatorname{Aut} T_2$.

**Доведення.** Множина функцій

$$\left\{ \chi_k(x) = \frac{a^k x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)} \,\middle|\, k \in Z_2 \right\} \tag{5}$$

містить усі розв'язки рівняння (4), яке при $\alpha = ax+1$, $\beta = a^{-1}x+1$ набуває вигляду

$$\chi^{-1} \circ (ax+1) \circ \chi = \frac{1}{a}x + 1. \tag{6}$$

Покажемо, що $\chi_k(x)$ є розв'язком рівняння (6).

$$\chi_k^{-1}(x) = \frac{-a^{k-1}x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x-a)},$$

$$\chi_k^{-1}(x) \circ (ax+1) \circ \chi_k(x) = \left(\frac{-a^{k-1}x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x-a)}\right) \circ (ax+1) \circ \left(\frac{a^kx + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}\right) =$$

$$= \left(a\left(\frac{-a^{k-1}x + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x-a)}\right) + 1\right) \circ \left(\frac{a^kx + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}\right) =$$

$$= \left(\frac{-a^{k-2}x + a^{\widehat{k-1}}}{a^{k-2}((a-1)x-a)}\right) \circ \left(\frac{a^kx + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)}\right) = \frac{\dfrac{-x-a}{(a-1)x-a}}{\dfrac{-a}{(a-1)x-a}} = \frac{-x-a}{-a} = \frac{1}{a}x + 1.$$

Зауважимо, що згідно з [3] для фіксованого $t$ існує єдиний розв'язок рівняння (6) такий, що $\chi\colon 0 \to t$. Отже, усі розв'язки рівняння (6) мають вигляд $\chi(x) = \chi_k(x)$, де $k = \log_a(a^{k-1}(a-1)t+1)$.

Покажемо, що для будь-якого $k$ автоморфізм

$$\chi_k(x) = \frac{a^kx + a^{\widehat{k}}}{a^{k-1}((a-1)x+1)} \tag{7}$$

не є скінченностановим.

Дійсно, має місце рівність

$$\chi_k(x) = (a^kx + a^{\widehat{k}}) \circ \left(\frac{x}{px+q}\right),$$

де $p = (a-1)/a$, $q = 1/a$.

Припустимо, що $\chi_k(x)$ є скінченностановим. Тоді $\chi_k(x)$ переводить $\ldots 0000$ у послідовність $a^{\widehat{k}}/a^{k-1}$, що є квазіперіодичною. Оскільки $a^k$, $a^{\widehat{k}}$ та $a^{\widehat{k}}/a^{k-1}$ є квазіперіодичними одночасно, то і $a^kx + a^{\widehat{k}}$ є скінченностановим. Але автоморфізм $x/(px+q)$ містить нескінченну кількість станів вигляду

$$\frac{x}{p\,2^tx+q}, \qquad t \in \mathbb{Z}^+,$$

тобто маємо протиріччя. Отже, автоморфізм $\chi_k(x)$ нескінченностановий $\forall\, k \in Z_2$.

Як наслідок отримаємо, що рівняння (6) не має розв'язків у $F\,\mathrm{Aut}\,T_2$.

**Теорема 3.** *Функції* $f_1(x) = (4k_1+1)x+1$ *та* $f_2(x) = (4k_2+1)x+1$ $(k_1, k_2 \in Z_2 \bigcap \mathbb{Q})$ *спряжені в* $F\,\mathrm{Aut}\,T_2$ *тоді і тільки тоді, коли* $4k_1+1 = 4k_2+1$.

**Доведення.** Покажемо, що скінченностанові автоморфізми $ax+1$, $bx+1$ максимального пропорядку ($a = 4k_1+1$, $b = 4k_2+1$, $k_1, k_2 \in Z_2 \bigcap \mathbb{Q}$) при $a \neq b$ не спряжені в $F\,\mathrm{Aut}\,T_2$.

Дійсно, якщо автоморфізми $\alpha$, $\beta \in F\operatorname{Aut} T_2$ спряжені в $F\operatorname{Aut} T_2$, то автоморфізми $\alpha^p$ та $\beta^p$ скінченностанові одночасно для всіх $p \in Z_2$. Згідно з теоремою (2), ця умова не є достатньою. Далі, без обмеження загальності можна вважати $b \neq a^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq \pm 1$).

Функція $\log_a((a-1)x+1)$ є бієкцією $Z_2 \to Z_2$, як обернена до $a^{\widehat{x}}$ при $a = 4k+1$, $k \in Z_2$. Має місце рівність

$$(ax+1)^t = \left(a^t x + a^{\widehat{t}}\right) \qquad (t \in Z_2). \tag{8}$$

За теоремою Діріхле про наявність простих чисел в арифметичній прогресії, існує $x \in \mathbb{Z}$ таке, що $c = (a-1)x+1$ є простим числом, якого немає в розкладі $a$ та $b$. Тоді, згідно з лемою 3 та формулою (8), маємо $(ax+1)^{\log_a c} \in F\operatorname{Aut} T_2$, оскільки $a^{\log_a c} = c$ є раціональним числом, а $(bx+1)^{\log_a c}$ не належить $F\operatorname{Aut} T_2$, оскільки $b^{\log_a c}$ не є раціональним числом. Враховуючи теорему (2), отримуємо твердження теореми.

*Робота частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень (Ф 25/546–2007 № ДР 0107U010 499) та Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.*

1. *Сущанский В. И.* Группы изометрий $p$-пространства Бэра // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 8. – С. 28–30.
2. *Сущанский В. И.* Сплетения по последовательности груп подстановок и финитно-апроксимируемые группы // Докл. АН СССР. – 1984. – № 2. – С. 19–22.
3. *Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.* Будова централізаторів елементів максимального про-порядку в групі автоморфізмів бінарного дерева // Наук. зап. НаУКМА. Фіз.-мат. науки. – 2005. – **39**. – С. 25–27.
4. *Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.* Розширені 2-адичні числа як централізатори автоморфізмів регулярного кореневого дерева валентності 3 // Там само. – 2006. – **51**. – С. 4–7.

*Національний університет "Києво-Могилянська академія"* *Надійшло до редакції 25.02.2008*

УДК 517.962.24:519.21



**Н. В. Брадул**

# Об устойчивости разностного аналога математической модели "хищник-жертва" при случайных возмущениях

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)*

*A discrete analog of the mathematical predator-prey model is considered. The sufficient conditions on the discretization step for which the considered discrete analog saves the stability property of the initial model are obtained.*

Математические модели типа "хищник-жертва" и их разностные аналоги исследуются во многих работах (см., напр., [1] и приведенную там библиогр.). Одной из важнейших задач этих исследований является задача устойчивости положительной точки равновесия таких систем. В связи с проблемами численного анализа особый интерес представляет способность разностного аналога исследуемой системы сохранять это свойство устойчивости.