УДК 539.226.86

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при механічних навантаженнях

Вперше запропоновано метод визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при довільних у часі механічних навантаженнях.

При механічному навантаженні п'єзоелектричних перетворювачів останні працюють в режимі прямого п'єзоефекту і є джерелом електричного струму. Електрична напруга на розімкнутих електродах п'єзоелектричного елемента буде електрорушійною силою джерела струму. Закінченого алгоритму визначення електрорушійної сили при довільних за часом навантаженнях не існує. В даній роботі запропоновано метод розв'язання цієї задачі.

Розглянемо п'єзоелектричну пластину товщиною $2h$ з циліндричною бічною поверхнею $S_б$. Введемо декартову прямокутну систему координат x_1, x_2, x_3. Граничні площини $x_3 = \pm h$ пластини покриті електродами. Пружноелектричний деформований стан п'єзоелектричного тіла описується [5] рівняннями

$$\frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0, \tag{2}$$

які замикаються матеріальними залежностями

$$\sigma_{ij} = c^E_{ijmn} K_{mn} - e_{kij} E_k, \qquad D_i = e_{imn} K_{mn} + \varepsilon^S_{ik} E_k \tag{3}$$

та формулами

$$2K_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}, \qquad E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \tag{4}$$

Початкові умови [4] приймемо нульовими

$$u_j(\mathbf{x}, t=0) = 0, \qquad \dot{u}_j(\mathbf{x}, t=0) = 0. \tag{5}$$

Граничні умови на бічній поверхні $S_б$ пластини візьмемо у вигляді

$$\sigma_{nx_k}(S_б, t) = p_k(S_б, t), \tag{6}$$

$$D_n(S_б, t) = 0, \tag{7}$$

де $p_k(S_б, t)$ — задане механічне навантаження; n — зовнішня одинична нормаль до циліндричної бічної поверхні $S_б$, а на площинах $x_3 = \pm h$

$$\sigma_{3j}(x_1, x_2, x_3 = \pm h, t) = 0, \tag{8}$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3 = \pm h, t) = \pm\xi(t). \tag{9}$$

Невідома функція $\xi(t)$ — електрорушійна сила перетворювача як джерела електричного струму. Для її визначення треба скористатися, як це робиться в електротехніці, умовою рівності нулю струму при розімкнутих електродах [5]

$$\oiint\limits_{S^+} \dot{D}_3(x_1, x_2, x_3 = +h, t)\, dS^+ = 0, \tag{10}$$

де S^+ — область, покрита електродом на площині $x_3 = +h$.

Перш за все розглянемо випадок гармонійних коливань з циклічною частотою ω, коли всі функції можна подати у вигляді $f(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}\, f^a(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t)$. Для комплексних амплітудних величин з (1)–(4) одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&\partial_i \sigma^a_{ik} + \rho\omega^2 u^a_k = 0, \qquad \partial_i D^a_i = 0,\\
&\sigma^a_{ij} = c^E_{ijmn} K^a_{mn} - e_{kij} E^a_k,\\
&D^a_i = e_{imn} K^a_{mn} + \varepsilon^S_{ik} E^a_k,\\
&2K^a_{mn} = \partial_m u^a_n + \partial_n u^a_m, \qquad E^a_k = -\partial_k \varphi^a
\end{aligned} \tag{11}$$

при граничних умовах

$$\sigma^a_{nx_k}(S_б) = p^a_k(S_б), \qquad D^a_n(S_б) = 0 \tag{12}$$

на бічній поверхні $S_б$ та

$$\begin{aligned}
&\sigma^a_{3j}(x_1, x_2, x_3 = \pm h) = 0,\\
&\varphi^a(x_1, x_2, x_3 = \pm h) = \pm\xi^a
\end{aligned} \tag{13}$$

на площинах $x_3 = \pm h$.

При усталених коливаннях початкові умови ставити не потрібно.

Умова рівності нулеві струму при розімкнутих електродах (10) тепер запишеться так:

$$\oiint\limits_{S^+} D^a(x_1, x_2, x_3 = +h)\, dS^+ = 0. \tag{14}$$

Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді суперпозиції двох розв'язків

$$\begin{aligned}
&u^a_j = u^{a(1)}_j + \xi^a u^{a(2)}_j,\\
&\varphi^a = \varphi^{a(1)} + \xi^a \varphi^{a(2)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Обидва розв'язки $u^{a(k)}_j$, $\varphi^{a(k)}$ повинні задовольняти рівняння (11). Для першого розв'язку граничні умови приймаються у вигляді

$$\begin{aligned}
&\sigma^{a(1)}_{nx_k}(S_б) = p^a_k(S_б), \qquad D^{a(1)}_n(S_б) = 0,\\
&\sigma^{a(1)}_{3j}(x_1, x_2, x_3 = \pm h) = 0,\\
&\varphi^{a(1)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h) = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

тоді як для другого розв'язку —

$$\begin{aligned}
&\sigma_{nx_k}^{a(2)}(S_б) = 0, \qquad D_n^{a(2)}(S_б) = 0,\\
&\sigma_{3j}^{a(2)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h) = 0,\\
&\varphi^{a(2)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h) = \pm 1.
\end{aligned} \tag{17}$$

В цьому разі сумарний розв'язок (15) буде задовольняти граничні умови (12), (13).

Тепер з умови (14) знаходимо алгебраїчне рівняння для визначення амплітуди електрорушійної сили ξ^a

$$\oiint\limits_{S^+} D^{a(1)}(x_1, x_2, x_3 = h)\, dS^+ + \xi^a \oiint\limits_{S^+} D^{a(2)}(x_1, x_2, x_3 = h)\, dS^+ = 0. \tag{18}$$

За таким алгоритмом знаходилась електрорушійна сила (електромеханічна чутливість) в роботах [1, 3, 6].

При довільному механічному навантаженні для визначення електрорушійної сили скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа [2]

$$\begin{aligned}
&f^L(\ldots, p) = \int\limits_0^\infty f(\ldots, t) e^{-p^t} dt,\\
&f(\ldots, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a^+ - i\infty}^{a^+ + i\infty} f^L(\ldots, p) e^{p^t} dp, \qquad t > 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

де $a^+ > a$, якщо функція $f(\ldots, t)e^{-at}$ обмежена при $t \to \infty$.

Застосовуючи перетворення Лапласа до рівнянь (1)–(4), одержимо

$$\begin{aligned}
&\partial_i \sigma_{ik}^L - \rho p^2 u_k^L = 0, \qquad \partial_i D_i^L = 0,\\
&\sigma_{ij}^L = c_{ijmn}^E K_{mn}^L - e_{kij} E_k^L,\\
&D_i^L = e_{imn} K_{mn}^L + \varepsilon_{ik}^S E_k^L,\\
&2K_{mn}^L = \partial_m u_n^L + \partial_n u_m^L, \qquad E_k^L = -\partial_k \varphi^L,
\end{aligned} \tag{20}$$

де враховані нульові початкові умови (5). Граничні умови (6)–(9) в просторі зображень будуть такі:

$$\sigma_{nx_k}^L(S_б, p) = p_k^L(S_б, p), \qquad D_n^L(S_б, p) = 0 \tag{21}$$

на бічній поверхні $S_б$ та

$$\begin{aligned}
&\sigma_{3j}^L(x_1, x_2, x_3 = \pm h, p) = 0,\\
&\varphi^a(x_1, x_2, x_3 = \pm h, p) = \pm \xi^a(p)
\end{aligned} \tag{22}$$

на електродованих площинах $x_3 = \pm h$.

Зауважимо також, що перехід від простору оригіналів до простору зображень ще раз підтверджує те положення [4], що в початково-крайових задачах електропружності початкові умови для електричного потенціалу задавати не потрібно.

Розв'язок задачі знову шукаємо у вигляді суперпозиції двох розв'язків

$$\begin{aligned} &u_j^L = u_j^{L(1)} + \xi^L u_j^{L(2)}, \\ &\varphi^L = \varphi^{L(1)} + \xi^L \varphi^{L(2)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Обидва розв'язки $u_j^{L(k)}$, $\varphi^{L(k)}$ повинні задовольняти рівняння (20). Для першого розв'язку граничні умови приймаємо у вигляді

$$\begin{aligned} &\sigma_{nx_k}^{L(1)}(S_б, p) = p_k^L(S_б, p), \qquad D_n^{L(1)}(S_б, p) = 0, \\ &\sigma_{3j}^{L(1)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h, p) = 0, \\ &\varphi^{L(1)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h, p) = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

тоді як для другого розв'язку —

$$\begin{aligned} &\sigma_{nx_k}^{L(2)}(S_б, p) = 0, \qquad D_n^{L(2)}(S_б, p) = 0, \\ &\sigma_{3j}^{L(2)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h, p) = 0, \\ &\varphi^{L(2)}(x_1, x_2, x_3 = \pm h, p) = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

У такому випадку сумарний розв'язок (23) задовольнятиме граничні умови (21), (22).

Користуючись теоремою Бореля про згортку [2], оригінал розв'язку (23) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} &u_j(\ldots, t) = u_j^{(1)}(\ldots, t) + \int\limits_0^t \xi(\tau) u_j^{(2)}(\ldots, t-\tau)\, d\tau, \\ &\varphi(\ldots, t) = \varphi^{(1)}(\ldots, t) + \int\limits_0^t \xi(\tau) \varphi^{(2)}(\ldots, t-\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{26}$$

Тепер умова (10) запишеться так:

$$\oiint\limits_{S^+} \dot{D}_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3 = +h, t)\, dS^+ + \int\limits_0^t \xi(\tau) \oiint\limits_{S^+} \dot{D}_3^{(2)}(x_1, x_2, x_3 = +h, t-\tau)\, dS^+ d\tau = 0 \tag{27}$$

при $\xi(0) = 0$. Отже, для визначення електрорушійної сили $\xi(t)$ одержали інтегральне рівняння Вольтерра першого роду (27).

Зауважимо, що розв'язки $w^{(k)}(\ldots, t)$ не обов'язково шукати операційним методом, а можна скористатися іншими способами.

Зміст викладеного алгоритму при довільній зміні за часом механічного навантаження можна трактувати і таким чином: якщо відома реакція на одиничне електричне збурення (другий розв'язок), то реакція на довільне збурення $\xi(t)$ визначається згорткою (інтегралом Дюамеля) (26).

1. *Болкисев А. М., Рудницкий С. И., Шульга Н. А.* Электроакустическая чувствительность пьезокерамического цилиндра при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 12. – С. 68–73.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – Москва: Высш. шк., 1966. – 406 с.
3. *Евсейчик Ю. Б, Рудницкий С. И., Шарапов В. М., Шульга Н. А.* Чувствительность биморфного преобразователя типа металл — пьезокерамика // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 12. – С. 67–75.
4. *Шульга М. О.* Про варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського і початково-крайові задачі електропружності // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 76–81.
5. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезокермических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
6. *Шульга Н. А., Рудницкий С. И., Качаенко О. Б.* Электроакустическая чувствительность пьезокерамической цилиндрической оболочки в акустической среде // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 2. – С. 44–48.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 13.03.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga**

Determination of the electromotive force of piezoelectric transformers on mechanical loads

A method of determination of the electromotive force of piezoelectric transformers under mechanical loadings arbitrary in time is first offered.