УДК 519.24

І. В. Самойленко

Слабка збіжність стохастичних еволюційних систем у схемі усереднення

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Доведено слабку збіжність стохастичної еволюційної системи до усередненої еволюційної системи. Використано метод, запропонований Р. Ліпцером для семімартингалів, але замість ергодичної теореми при доведенні збіжності використовується розв'язок задачі сингулярного збурення.

При розв'язанні задач про слабку збіжність різних класів випадкових процесів зазвичай використовуються різні методи доведення: ергодичні теореми, відносна компактність, мартингали і т. ін., залежно від досліджуваних процесів (див., напр., [1–7]).

Ми пропонуємо досліджувати стохастичну еволюційну систему за допомогою комбінації двох методів: методу, запропонованого Р. Ліпцером в [4] для семімартингалів у поєднанні з розв'язанням задачі про сингулярне збурення, замість використання ергодичної теореми. Таким чином, ми використовуємо таку теорему.

Теорема 1 [1, теорема 6.3]. *Нехай для сімейства марковських процесів* $\xi^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, *мають місце такі умови:*

C1: *існує сімейсво тест-функцій* $\varphi^\varepsilon(u,x)$ *в* $C_0^2(\mathbb{R}^d \times E)$ *таких, що*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u),$$

рівномірно за u, x;

C2: *має місце збіжність*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \mathbb{L}\varphi(u),$$

рівномірно за u, x. *Сімейство функцій* $\mathbb{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *рівномірно обмежено та* $\mathbb{L}\varphi(u)$ *і* $\mathbb{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon$ *належать* $C(\mathbb{R}^d \times E)$;

C3: *квадратичні характеристики мартингалів, що описують марковський процес, визначений парою* $\xi^\varepsilon(t)$, $x^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, *мають вигляд* $\langle \mu^\varepsilon \rangle_t = \int_0^t \zeta^\varepsilon(s)\,ds$, *де випадкові функції* ζ^ε, $\varepsilon > 0$, *задовольняють умову*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \mathbf{E}|\zeta^\varepsilon(s)| \leqslant c < +\infty;$$

C4: *початкові значення збігаються та*

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbf{E}|\zeta^\varepsilon(0)| \leqslant C < +\infty.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi(t), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Еволюційна система, яку ми будемо досліджувати, побудована таким чином, що умови C1, C2 задовольняються як результат розв'язання задачі про сингулярне збурення системи. Для перевірки умов C3, C4 ми використовуємо метод, запропонований в [4] для узагальнення принципу усереднення Боголюбова на розривні семімартингали.

Розглянемо стохастичну еволюційну систему з перемикаючим ергодичним процесом Маркова

$$\frac{du_t^\varepsilon}{dt} = b\biggl(u_t^\varepsilon; æ\biggl(\frac{t}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \qquad u_0^\varepsilon = u. \tag{1}$$

Перемикаючий марковський процес $æ(t)$, $t \geqslant 0$, який визначається на стандартному (польському) фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$, задано генератором

$$Q\varphi(x) = \int_E Q(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $Q(x, dy) = q(x)P(x, dy)$.

Стаціонарний розподіл $\pi(dx)$ ергодичного процесу визначає проектор

$$\Pi\varphi(x) = \widehat{\varphi}\mathbf{1}(x), \widehat{\varphi} := \int_E \pi(dx)\varphi(x), \qquad \mathbf{1}(x) \equiv 1.$$

Ми також означаємо потенціал R_0, який для ергодичного марковського процесу з генератором Q та напівгрупою P_t, $t \geqslant 0$, є обмеженим оператором

$$R_0 = \int_0^\infty (P_t - \Pi)dt, \qquad QR_0 = R_0Q = \Pi - I.$$

Функція швидкості $b(u; x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $x \in E$ задає загальний розв'язок детермінованого рівняння

$$\frac{du_x(t)}{dt} = b(u_x(t); x), \qquad u_x(0) = u, \qquad x \in E.$$

Марковський процес u_t^ε, $æ^\varepsilon(t) := æ(t/\varepsilon)$, $t \geqslant 0$, можна охарактеризувати за допомогою генератора [1, твердження 3.3]

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi(u; x) = [\varepsilon^{-1}Q + \mathbb{B}(x)]\varphi(u; x), \tag{2}$$

де оператор $\mathbb{B}(x)\varphi(u) = b(u; x)\varphi'(u)$.

З твердження 5.6 [1] випливає, що розв'язок задачі сингулярного збурення для генератора (2) задається співвідношенням

$$\mathbb{L}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u; x) = \widehat{\mathbb{B}}\varphi(u) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(u) \tag{3}$$

на функціях $\varphi^\varepsilon(u; x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u; x)$, де $\varphi(u) \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$.

Таким чином, з (3) бачимо що розв'язок задачі сингулярного збурення для $\mathbb{L}^\varepsilon$, $\varphi^\varepsilon(u; x)$ задовольняє умови C1, C2.

Тут оператор

$$\widehat{\mathbb{B}}\varphi(u) = \widehat{b}(u)\varphi'(u), \qquad \widehat{b}(u) = \int\limits_E \pi(dx)b(u;x),$$

а член $\theta^\varepsilon(x) = \mathbb{B}(x)R_0\widetilde{\mathbb{B}}(x)$, $\widetilde{\mathbb{B}}(x) := \mathbb{B}(x) - \widehat{\mathbb{B}}$, задовольняє умову $|\theta^\varepsilon\varphi(u)| \leqslant C < \infty$.

Зауваження 1. Означення оператора $\widetilde{\mathbb{B}}(x)$ залежить від означення потенціалу R_0. А саме, якщо $QR_0 = \Pi - I$, як ми і означили, то $\widetilde{\mathbb{B}}(x) := \mathbb{B}(x) - \widehat{\mathbb{B}}$. Якби ми дали означення $QR_0 = I - \Pi$, то мали б $\widetilde{\mathbb{B}}(x) := \widehat{\mathbb{B}} - \mathbb{B}(x)$.

Розглянемо тепер усереднену еволюційну систему

$$\frac{d\widehat{u}_t}{dt} = \widehat{b}(\widehat{u}_t), \qquad \widehat{u}_0 = u. \tag{4}$$

Наша мета — довести слабку збіжність стохастичної еволюційної системи (1) до усередненої еволюційної системи (4). Для цього ми маємо показати, що умови С1–С4 теореми 1 задовольняються. Як вже було показано, умови С1, С2 виконуються завдяки розв'язанню задачі сингулярного збурення для еволюційної системи. Таким чином, залишається перевірити умови С3, С4.

Наслідуючи [4], будемо вимагати від функції $b(u;x)$ відповідності таким умовам:

I (лінійне зростання) — $|b(u;x)| \leqslant L(1 + |u|)$,

II (умова Ліпшіца) — $|b(u;x) - b(u';x)| \leqslant C|u - u'|$.

Для доведення основного результату необхідна така лема.

Лема 1. *За умови* **I** *існує стала* $k_T > 0$*, незалежна від* ε*, але залежна від* T*:*

$$\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|u_t^\varepsilon|^2 \leqslant k_T.$$

Доведення (за методом з [4]). Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$u_t^\varepsilon = u + \int\limits_0^t b\left(u_s^\varepsilon; æ\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right)ds =: u + A_t^\varepsilon.$$

Якщо покласти $u_t^* = \sup\limits_{s\leqslant t}|u_t|$, то

$$((u_t^\varepsilon)^*)^2 \leqslant 2[u^2 + ((A_t^\varepsilon)^*)^2]. \tag{5}$$

З умови **I** маємо $(A_t^\varepsilon)^* \leqslant L\int\limits_0^t(1 + (u_s^\varepsilon)^*)ds$.

Остання нерівність разом з нерівністю (5) та нерівністю Коші–Буняковського $\left(\left[\int\limits_0^t\varphi(s)ds\right]^2 \leqslant t\int\limits_0^t\varphi^2(s)ds\right)$ означають, що

$$\mathbf{E}((u_t^\varepsilon)^*)^2 \leqslant k_1 + k_2\int\limits_0^t\mathbf{E}((u_s^\varepsilon)^*)^2ds$$

для $t \leqslant T$ та деяких сталих k_1 та k_2, незалежних від ε.

Згідно з нерівністю Гронуола–Беллмана отримаємо

$$\mathbf{E}((u_t^\varepsilon)^*)^2 \leqslant k_1 \exp(k_2 T).$$

Лему доведено.

Наслідок (випливає з нерівності Чебишова). *За умови* **I** *має місце умова компактності:*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\varepsilon\leqslant\varepsilon_0} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\leqslant T} |u_t^\varepsilon| > c\right\} = 0.$$

Лема 2. *За умов* **I**, **II** *існує стала $k > 0$, незалежна від ε:*

$$\mathbf{E}|u_t^\varepsilon - u_s^\varepsilon| \leqslant k|t-s|.$$

Доведення. Аналогічно (5) запишемо

$$|u_t^\varepsilon - u_s^\varepsilon|^2 \leqslant |A_t^\varepsilon + A_s^\varepsilon|^2.$$

За припущеннями **I**, **II** зі сталою k_3, незалежною від ε, маємо

$$|A_t^\varepsilon + A_s^\varepsilon|^2 \leqslant k_3[1 + ((u_T^\varepsilon)^*)^2]|t-s|.$$

Твердження леми є наслідком останньої нерівності та леми 1.

Лему доведено.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 2. *За умов* **I**, **II**

$$\mathbf{P} - \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\leqslant T} |u_t^\varepsilon - \widehat{u}_t| = 0. \qquad (6)$$

Доведення. Як було зазначено, для доведення теореми 2 необхідно перевірити виконання умов C3, C4 теореми 1.

Умова C3 теореми 1 означає, що квадратична характеристика мартингала, що відповідає досліджуваному марковському процесу, відносно компактна. Це твердження, згідно з [6], є наслідком умови компактності з наслідку та леми 2.

Оскільки $u_0^\varepsilon = \widehat{u}_0 = u$, то умова C4 випливає з леми 1.

Таким чином, усі умови теореми 6.3 [1] задоволені і (6) дійсно має місце.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Порівнюючи отримані у роботі результати з відповідними результатами роботи [4], зауважимо, що Р. Ліпцер використовує таку схему: спочатку застосовує умови **I**, **II** для доведення лем 1 та 2, а умова компактності є наслідком цих лем. Ми також діємо за цим методом.

Далі, в [4] слабка збіжність доводиться із застосуванням ергодичної теореми. Ми натомість використовуємо задачу сингулярного збурення і, таким чином, слабка збіжність випливає з умов C1, C2.

Подібний підхід застосовується в [7, 8]. Але в цих роботах умовою слабкої збіжності є існування генератора, еквівалентного нашому $\widehat{\mathbb{B}}$, що відповідає функціоналу від процесу. Цей генератор має апроксимувати залишок функціонала.

Інший метод використовується в [2]. Тут відомі умови компактності застосовуються до сімейства процесів. Як наслідок, слабка збіжність випливає з компактності та збіжності "гарного" класу тест-функцій.

1. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Hackensack: World Scientific, 2005. – 331 p.
2. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* Markov processes: characterization and convergence. – New York: Wiley, 1986. – 529 p.
3. *Свириденко М. Н.* Мартингальный подход к получению предельных теорем для марковских процессов. – Москва: ВИНИТИ, 1986. – № 37. – 30 с.
4. *Liptser R. Sh.* The Bogolubov averaging principle for semi-martingales // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. – 1994. – N 4. – 12 p.
5. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. – Berlin: Springer, 1979. – 339 p.
6. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. – Berlin: Springer, 1987. – 325 p.
7. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
8. *Skorokhod A. V., Hoppensteadt F. C., Salehi H.* Random perturbation methods with applications in science and engineering. – New York: Springer, 2002. – 488 p.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 09.10.2008

I. V. Samoilenko

On the weak convergence for stochastic evolutionary systems in an averaging scheme

Weak convergence of the stochastic evolutionary system to an average evolutionary system is proved. The method proposed by R. Liptser for semimartingales is used, but we apply a solution of the singular perturbation problem instead of the ergodic theorem.