

Член-кореспондент НАН України М. О. Шульга, С. А. Григор'єв

## Чисельний аналіз нестационарних пружноелектричних осесиметричних коливань п'єзокерамічної кулі з товщинною поляризацією

*Робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання і аналізу осесиметричних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при динамічних електричних збуреннях. Динамічні рівняння електропружності для кулі дискретизуються за допомогою скінченних різниць і явних або неявних чисельних схем за часом. Проводиться аналіз деформованого стану кулі при динамічному електричному збуренні з врахуванням розрізу на електродах, досліджується зміна розподілу механічних переміщень по меридіанній координаті в різні моменти часу.*

Порожнесті п'єзокерамічні кулі застосовуються як конструктивні елементи пристроїв, що діють на основі прямого та оберненого п'єзоефекту [2, 3, 9]. В процесі експлуатації п'єзоелектричні елементи можуть зазнавати довільних в часі динамічних електричних збурень, що вимагає кількісного дослідження електромеханічного стану тіла при нестационарних режимах роботи.

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу осесиметричних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при динамічних електричних збуреннях.

Розглядаються осесиметричні коливання порожнистої кулі, меридіанний переріз якої в сферичній системі координат  $r, \alpha, \beta$  займає область  $D = \{R - h \leq r \leq R + h, 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ . Оскільки основні електромеханічні характеристики не залежать від координати  $\beta$ , то розв'язок шукається у вигляді функцій  $u_r(r, \alpha, t)$ ,  $u_\alpha(r, \alpha, t)$ ,  $\varphi(r, \alpha, t)$ .

Осесиметричні коливання п'єзокерамічної сфери описуються рівняннями руху [5, 8]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{r\alpha} \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial \alpha}; \\ \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\alpha} + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}) \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (1)$$

та квазістатичним наближенням рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r} D_\alpha = 0, \quad (2)$$

які доповнюються матеріальними співвідношеннями при радіальній поляризації

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{13}}{r} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha \right) + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{33}}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + (c_{33} + c_{23}) \frac{u_r}{r} + \frac{c_{23}}{r} u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{\beta\beta} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{23}}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + (c_{33} + c_{23}) \frac{u_r}{r} + \frac{c_{33}}{r} u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\alpha} &= 2c_{55} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \right) + e_{53} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\ D_r &= e_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{e_{31}}{r} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ D_\alpha &= 2e_{53} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \right) - \varepsilon_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Тут  $u_r, u_\alpha$  і  $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{r\alpha}$  — механічні переміщення і напруження;  $D_r, D_\alpha$  — компоненти вектора електричної індукції;  $\varphi$  — електричний потенціал;  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  — пружні модулі матеріалу при постійному електричному полі;  $e_{31}, e_{33}, e_{42}$  — п'єзоелектричні модулі;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  — діелектричні проникності при постійній деформації;  $\rho$  — густина матеріалу.

Задача (1)–(3) замикається початковими умовами, що накладаються на переміщення та їх швидкості [7, 8]

$$\begin{aligned}u_r(r, \alpha, t = 0) &= f^0(r, \alpha), & \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, \alpha, t = 0) &= f^1(r, \alpha); \\ u_\alpha(r, \alpha, t = 0) &= g^0(r, \alpha), & \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(r, \alpha, t = 0) &= g^1(r, \alpha),\end{aligned}\tag{4}$$

та граничними умовами, що описують поведінку електричних та механічних величин на границі тіла. Нехай на зовнішніх електродованих поверхнях сфери задано різницю потенціалів ( $\alpha \in [0, \pi]$ )

$$\varphi(r_i, \alpha, t) = \pm V(\alpha, t),\tag{5}$$

де  $i = 1, 2, r_1 = R - h, r_2 = R + h$ .

Механічні граничні умови на зовнішніх поверхнях накладаються на переміщення або напруження

$$\begin{aligned}u_r(r_i, \alpha, t) &= y_{r,i}(\alpha, t) \vee \sigma_{rr}(r_i, \alpha, t) = q_{r,i}(\alpha, t); \\ u_\alpha(r_i, \alpha, t) &= y_{\alpha,i}(\alpha, t) \vee \sigma_{r\alpha}(r_i, \alpha, t) = q_{\alpha,i}(\alpha, t), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{6}$$

Внаслідок симетрії в точках  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$  повинні виконуватися умови

$$\frac{\partial u_r}{\partial \alpha}(r, \alpha_i, t) = 0, \quad u_\alpha(r, \alpha_i, t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(r, \alpha_i, t) = 0, \quad i = 1, 2.\tag{7}$$

Перейдемо до безрозмірних величин

$$\begin{aligned}r &= R + x, & \bar{x} &= \frac{x}{h}, & \bar{t} &= \frac{t}{t_h}, & \bar{u}_i &= \frac{u_i}{h}, & \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, & \bar{\varphi} &= \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}, \\ \varepsilon &= \frac{h}{R}, & \bar{D}_i &= \frac{D_i}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_{00}}, & \bar{c}_{ij} &= \frac{c_{ij}}{c_{00}}, & \bar{e}_{ij} &= \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, & \bar{\varepsilon}_{ii} &= \frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{00}},\end{aligned}\tag{8}$$

де  $\rho_{00}, c_{00}, \varepsilon_{00}, t_h = h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$  — нормуючі величини;  $\varepsilon$  — параметр кривизни. Надалі знаки безрозмірності опускаються.

Після підстановки (3) в (1), (2) та безрозмірювання (8) маємо рівняння електропружності через переміщення та електричний потенціал в безрозмірній формі

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= c_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + 2c_{11}\xi \frac{\partial u_r}{\partial x} + 2(c_{13} - c_{33} - c_{23})\xi^2 u_r + 2c_{55}\xi^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \\
&+ (c_{13} - c_{33} - c_{23} - 2c_{55})\xi^2 \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha \right) + (2c_{55} + c_{13})\xi \left( \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial \alpha} \right) + \\
&+ 2c_{55}\xi^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha^2} + 2(e_{11} - e_{31})\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + e_{53}\xi^2 \left( \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right); \\
\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= (2c_{55} + c_{13})\xi \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha \partial x} + (c_{33} + c_{23} + 4c_{55})\xi^2 \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + 2c_{55} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \\
&+ \xi^2 \left( -4c_{55} + (c_{23} - c_{33}) \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{c_{23}}{\sin^2 \alpha} \right) u_\alpha + 4c_{55}\xi \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \\
&+ c_{33}\xi^2 \left( \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right) + (e_{53} + e_{31})\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial x} + 2e_{53}\xi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\
e_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} &+ 2e_{31}\xi^2 u_r + 2(e_{31} + e_{11})\xi \frac{\partial u_r}{\partial x} + 2e_{53}\xi^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + 2e_{53}\xi^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha^2} + \\
&+ (e_{31} + 2e_{53})\xi \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + (e_{31} - 2e_{53})\xi^2 \left( \operatorname{ctg} \alpha u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \\
&+ (e_{31} + 2e_{53})\xi \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial r} - 2\varepsilon_{11}\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon_{33}\xi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33}\xi^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

У співвідношеннях (9)  $\xi = \varepsilon/(1 + \varepsilon x)$ .

Для знаходження розв'язку поставленої початково-крайової задачі розвивається чисельний метод розв'язання, що базується на різницевих апроксимаціях та різних методах інтегрування за часом.

Для реалізації методу в області перетину кулі  $D = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$  вводиться розбиття

$$\Omega = \left\{ x_i = (i - 0,5)\Delta x - 1, \alpha_j = (j - 0,5)\Delta \alpha \mid \Delta x = \frac{2}{n}, \Delta \alpha = \frac{2\pi}{m} \right\},$$

де  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, m + 1$ . Крайні точки розбиття знаходяться на відстані в половину кроку по просторовій координаті відносно відповідної границі області, що дає змогу записати граничні умови з другим порядком точності за просторовими координатами. Розв'язок шукається в вигляді набору значень  $u_{i,j}^{r,k} = u_r(x_i, \alpha_j, t_k)$ ,  $u_{i,j}^{\alpha,k} = u_\alpha(x_i, \alpha_j, t_k)$ ,  $\varphi_{i,j}^k = \varphi(x_i, \alpha_j, t_k)$ .

Перетворимо диференціальні рівняння в частинних похідних (9) до звичайних диференціальних рівнянь за часом шляхом переходу від похідних за просторовими координатами до скінченно-різницевих виразів другого порядку точності [5]. Запишемо рівняння (9) в цілих точках розбиття  $\Omega = \{x_i, \alpha_j\}$  (тут  $\zeta_i = \varepsilon/(1 + \varepsilon x_i)$ ):

$$\rho \frac{\partial^2 u_{i,j}^r}{\partial t^2} = \frac{c_{11}}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i-1,j}^r) + \frac{c_{11}\zeta_i}{\Delta x} (u_{i+1,j}^r - u_{i-1,j}^r) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2c_{55}\zeta_i^2}{2\Delta\alpha} \operatorname{ctg} \alpha_j (u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r) + 2(c_{13} - c_{33} - c_{23})\zeta_i^2 u_{i,j}^r + \\
& + \frac{2c_{55}\zeta_i^2}{\Delta\alpha^2} (u_{i,j+1}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i,j-1}^r) + \zeta_i^2 (c_{13} - c_{33} - c_{23} - 2c_{55}) \times \\
& \quad \times \left( \frac{u_{i,j+1}^\alpha - u_{i,j-1}^\alpha}{2\Delta\alpha} + u_{i,j}^\alpha \operatorname{ctg} \alpha_j \right) + (2c_{55} + c_{13})\zeta_i \times \\
& \quad \times \left( \operatorname{ctg} \alpha_j \frac{u_{i+1,j}^\alpha - u_{i-1,j}^\alpha}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+1}^\alpha - u_{i+1,j-1}^\alpha - u_{i-1,j+1}^\alpha - u_{i-1,j-1}^\alpha}{4\Delta x \Delta\alpha} \right) + \\
& + \frac{2(e_{11} - e_{31})}{2\Delta x} \zeta_i (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) + \frac{e_{11}}{\Delta x^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) + \\
& + e_{53} \zeta_i^2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha_j}{2\Delta\alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}) + \frac{e_{53}\zeta_i^2}{\Delta\alpha^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}); \\
\rho \frac{\partial^2 u_{i,j}^\alpha}{\partial t^2} = & (2c_{55} + c_{13}) \frac{\zeta_i}{4\Delta x \Delta\alpha} (u_{i+1,j+1}^r - u_{i-1,j+1}^r - u_{i+1,j-1}^r + u_{i-1,j-1}^r) + \\
& + (c_{33} + c_{23} + 4c_{55}) \frac{\zeta_i^2}{2\Delta\alpha} (u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r) + \frac{2c_{55}}{\Delta\alpha^2} (u_{i+1,j}^\alpha - 2u_{i,j}^\alpha + u_{i+1,j}^\alpha) + \\
& + \zeta_i^2 (-4c_{55} + (c_{23} - c_{33}) \operatorname{ctg}^2 \alpha_j - \frac{c_{23}}{\sin^2 \alpha_j}) u_{i,j}^\alpha + \frac{4c_{55}\zeta_i}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^\alpha - u_{i-1,j}^\alpha) + \\
& + \frac{c_{33}\zeta_i^2}{\Delta\alpha^2} (u_{i,j+1}^\alpha - 2u_{i,j}^\alpha + u_{i,j+1}^\alpha) + \frac{c_{33}\zeta_i^2}{2\Delta\alpha} \operatorname{ctg} \alpha_j (u_{i,j+1}^\alpha - u_{i,j-1}^\alpha) + \\
& + \frac{\zeta_i (e_{53} + e_{31})}{4\Delta x \Delta\alpha} (\varphi_{i+1,j+1}^- \varphi_{i-1,j+1}^- \varphi_{i+1,j-1}^+ \varphi_{i-1,j-1}^-) + \frac{e_{53}\zeta_i^2}{\Delta\alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}); \\
\frac{e_{11}}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i-1,j}^r) + & 2e_{31}\xi_i^2 u_{i,j}^r + (e_{31} + e_{11}) \frac{\xi_i}{\Delta x} (u_{i+1,j}^r - u_{i-1,j}^r) + \\
& + \frac{e_{53}\xi_i^2}{\Delta\alpha} \operatorname{ctg} \alpha_j (u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r) + \frac{2e_{53}\xi_i^2}{\Delta\alpha^2} (u_{i,j+1}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i,j-1}^r) + \\
& + (e_{31} + 2e_{53}) \frac{\xi_i \operatorname{ctg} \alpha_j}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^\alpha - u_{i-1,j}^\alpha) + \\
& + (e_{31} - 2e_{53}) \xi_i^2 \left( \operatorname{ctg} \alpha_j u_{i,j}^\alpha + \frac{1}{2\Delta\alpha} (u_{i,j+1}^\alpha - u_{i,j-1}^\alpha) \right) + \\
& + \frac{(e_{31} + 2e_{53})\xi_i}{4\Delta x \Delta\alpha} (u_{i+1,j+1}^\alpha - u_{i-1,j+1}^\alpha - u_{i+1,j-1}^\alpha - u_{i-1,j-1}^\alpha) - \\
& - \frac{\varepsilon_{11}\xi_i}{\Delta x} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) - \frac{\varepsilon_{33}\xi_i^2}{\Delta\alpha^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}) - \\
& - \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta x^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) - \varepsilon_{33}\xi_i^2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha_j}{2\Delta\alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Значення невідомих в законтурних точках необхідно виключити з системи (10), що робимо за допомогою умов (5)–(7). З (7) випливає, що при  $i = 0, 1, \dots, n + 1$

$$\begin{aligned}
u_{i,-0,5}^r &= u_{i,1,5}^r; & u_{i,-0,5}^\alpha &= -u_{i,1,5}^\alpha; & \varphi_{i,-0,5} &= \varphi_{i,1,5}; \\
u_{i,m+1,5}^r &= u_{i,m-0,5}^r; & u_{i,m+1,5}^\alpha &= -u_{i,m-0,5}^\alpha; & \varphi_{i,m+1,5} &= \varphi_{i,m-0,5}.
\end{aligned}
\tag{11}$$

Значення електричного потенціалу в законтурних точках відносно сферичних поверхонь  $x = \pm 1$  легко визначаються з (5):

$$\varphi_{0,j} = -\varphi_{1,j} - 2V(t); \quad \varphi_{m+1,j} = -\varphi_{m,j} + 2V(t), \quad j = 0, 1, \dots, m+1. \tag{12}$$

Значення переміщень  $u_{i,j}^r, u_{i,j}^\alpha$  в законтурних точках відносно сферичних поверхонь визначаються з (6) залежно від умов закріплення. При заданих на границях  $x = \pm 1$  переміщеннях невідомі  $u_{0,j}^r, u_{0,j}^\alpha, u_{m+1,j}^r, u_{m+1,j}^\alpha$  визначаються аналогічно до електричного потенціалу (12). При заданих механічних напруженнях переміщення в законтурних точках визначаються з різницевої форми запису матеріальних співвідношень (3) в точках  $(x_{0,5}, \alpha_j)$ , що лежать на границі області.

Для інтегрування за часом системи диференціальних та алгебраїчних рівнянь (10) вводимо розбиття інтервалу часу  $t \in [0, T]$  з кроком  $\Delta t$ . Розв'язок шукається за допомогою явної різницевої схеми або методом Ньюмарка [9]. Явна різницева схема зручна в реалізації, але є умовно стійкою, внаслідок чого крок за часом береться значно меншим за крок за просторовими координатами ( $\Delta t \approx 0,1\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$ ), що призводить до громіздких обчислень. До того ж на кожному часовому шарі для знаходження електричного потенціалу  $\varphi$  потрібно розв'язувати систему  $nm$  алгебраїчних рівнянь, що впливає з третього рівняння (10). Метод Ньюмарка складніше реалізується, оскільки на кожному кроці за часом розв'язується система з  $3nm$  рівнянь, але абсолютна стійкість цього методу дозволяє інтегрувати систему рівнянь (10) з значно більшим кроком за часом  $\Delta t \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$ . Тестування правильності роботи схеми проводилося на основі розв'язків задач про одновимірні нестационарні коливання п'єзокерамічних тіл [1, 3, 10].

**3. Аналіз одержаних результатів.** Розглянемо задачу про осесиметричні нестационарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [6]

$$\begin{aligned}
c_{11}^E &= 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & c_{33}^E &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & c_{23}^E &= 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
c_{13}^E &= 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & c_{55}^E &= 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
e_{11} &= 15,1 \text{ Кл/м}^2, & e_{31} &= -5,2 \text{ Кл/м}^2, & e_{53} &= 12,7 \text{ Кл/м}^2, \\
\varepsilon_{11}^S &= 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, & \varepsilon_{33}^S &= 646 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}
\end{aligned}$$

з параметром кривизни  $\varepsilon = 0, 1$  при нульових початкових умовах. За нормуючі параметри вибрано  $\rho_{00} = \rho, c_{00} = c_{11}^E, \varepsilon_{00} = \varepsilon_{11}^S, t_h = h\sqrt{\rho/c_{11}^E}$ .

Зовнішні поверхні вільні від механічних навантажень, тобто

$$\sigma_{rr}(\pm 1, \alpha, t) = 0; \quad \sigma_{r\alpha}(\pm 1, \alpha, t) = 0. \tag{13}$$

Електроди на сферичних поверхнях кулі мають при  $\alpha = \alpha_0$  ізоляційну лінію розрізу, що дає змогу задавати різну різницю потенціалів на окремих областях електродованості. Розглянемо коливання кулі, що виникають при навантаженні різницею електричного потенціалу  $2V(t)$ , де

$$V(\alpha, t) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq \alpha < \alpha_0, \\ -V_0, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \pi. \end{cases} \tag{14}$$

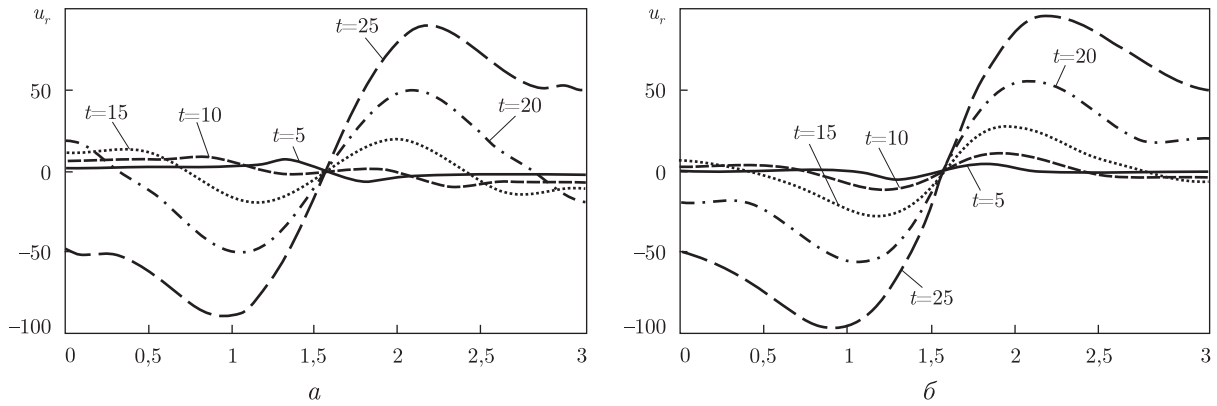


Рис. 1. Розподіл радіальних переміщень: *a* — на внутрішній поверхні кулі в різні моменти часу; *б* — на зовнішній поверхні

Двовимірність задачі та велика кількість механічних та електричних невідомих робить розв'язок досить складним для аналізу. Розв'язок задачі при відсутності розрізу на електродах наведено в [8]. На рис. 1, *a* представлені радіальні переміщення на поверхні  $x = -1$  в різні моменти часу при амплітуді потенціалу  $V_0 = 1$  та розрізі на меридіані  $\alpha_0 = \pi/2$ . При такому навантаженні радіальні переміщення антисиметричні, а меридіанні переміщення  $u_\alpha$  симетричні відносно екваторіальної площини кулі. Рис. 1, *б* ілюструє розподіл радіальних переміщень при  $x = 1$ . Всі наведені результати представлені в безрозмірній формі.

При  $t < 20$  на кривих розподілу переміщень є горизонтальні ділянки. Значення переміщень на цих ділянках збігається з відповідними значеннями в одновимірній задачі [8]. Двовимірні збурення поширюються від розрізу на електродах, і в момент часу  $t \approx 20$  весь переріз опиняється в зоні двовимірних збурень.

При наявності розрізу, на відміну від розв'язку одновимірної задачі [8], в якій максимальних переміщень набувала внутрішня поверхня, максимальні переміщення виникають на зовнішній поверхні і перевищують переміщення внутрішньої поверхні приблизно на 10%. Відхилення від одновимірного розв'язку на поверхні  $x = 1$  настає раніше, ніж на внутрішній поверхні  $x = -1$ . Максимальні переміщення досягають значення  $\bar{u}_{\max} = 100$ , що при навантаженні різницею потенціалів  $2V_0 = 200$  В та  $h = 1$  мм відповідає значенню  $u_{\max} = 2,21 \cdot 10^{-3}$  мм.

1. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. — Киев: Наук. думка, 1990. — 176 с.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. — Москва: Наука, 1982. — 424 с.
3. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. — Киев: Выща шк., 1989. — 184 с.
4. Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость/ Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. — Киев: Наук. думка, 1989. — 280 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — Москва: Наука, 1989. — 432 с.
6. Шульга Н. А., Болжисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. — Киев: Наук. думка, 1990. — 228 с.
7. Шульга М. О. Про варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності // Доп. НАН України. — 2008. — № 6. — С. 36–45.
8. Шульга М. О. Про структуру рівнянь електропружності // Там само. — 2008. — № 4. — С. 81–85.

9. Шульга М. О., Григор'єв С. А. Радіальні пружноелектричні нестационарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 159–166.
10. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 280 с.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 13.10.2008*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shulga, S. A. Grigoryev**

**The numerical analysis of nonsteady elastoelectric axisymmetric vibrations of a piezoceramic ball with polarization by thickness**

*A numerical method of solution and analysis of the problem on axisymmetric nonsteady vibrations of a hollow piezoceramic polarized ball under electric loading is constructed. The dynamic equations of electroelasticity for the ball are digitized by means of the finite-difference method and explicit and implicit numerical schemes by time. A strained state of the ball under a dynamic electric loading with regard for a cut on electrodes is analyzed, and the distribution of mechanical displacements along the meridional coordinate at various time moments is studied.*