УДК 517.9

Л. М. Шегда

Вироджені нелінійні нетерові крайові задачі

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Отримано умови існування розв'язку слабко нелінійної виродженої крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з нетеровим оператором в лінійній частині.

1. Постановка задачі. Розглянемо крайові задачі для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з малим невід'ємним параметром ε вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x, t, \varepsilon), \qquad t \in [a; b], \tag{1}$$

$$lx = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними, достатню кількість раз неперервно диференційовними на $[a; b]$ функціями $A(t), B(t) \in C^{3q-2}[a; b]$; $\det B(t) = 0$, $\forall\, t \in [a; b]$; $f(t)$ — n-вимірний вектор-стовпець з простору $C^{q-1}[a; b]$; α — m-вимірний вектор-стовпець констант; $\alpha \in R^m$; l — лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних, неперервних на $[a; b]$ вектор-функцій $l = \operatorname{col}(l_1, \ldots, l_m)\colon C[a; b] \to R^m$, $l_i\colon C[a; b] \to R$ [1, 2]; $Z(x, t, \varepsilon)$ — нелінійна за x n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна за x в околі породжуючого розв'язку і неперервна за t, ε: $Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leqslant \beta]$; $Z(x, \cdot, \varepsilon) \in C^{q-1}[a; b]$; $Z(x, t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$; $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний обмежений m-вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний за x у розумінні Фреше [3] і неперервний за ε в околі породжуючого розв'язку.

Розглянемо випадок, коли відповідна однорідна породжуюча крайова задача має нетривіальні розв'язки $x_0(t, c_r)$ [4]. Будемо шукати умову існування і алгоритм побудови розв'язку $x = x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a; b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ крайової задачі (1), (2), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один з розв'язків породжуючої крайової задачі

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in [a; b], \tag{3}$$

$$lx(\cdot) = \alpha \in R^m. \tag{4}$$

Вважатимемо, що система (3) така, що невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми у випадку, коли матриці $A(t), B(t) \in C^{3q-2}[a, b]$ і вектор-стовпець $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$ [5]. Тоді згідно з теоремою 1 [4], породжуюча крайова задача (3), (4) має r-параметричне сімейство лінійно незалежних розв'язків

$$x_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X_{n-s}(t)Q^+\alpha, \qquad \forall\, c_r \in R^r, \tag{5}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ в диференціальній системі та $\alpha \in R^m$ в крайовій умові задовольняють d лінійно незалежні умови:

$$P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\Bigg)\Bigg) = 0 \qquad (d = m - n_1). \tag{6}$$

2. Основний результат. Спочатку розглянемо питання про необхідну умову існування розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r)$ (5). Справедливим буде таке твердження.

Теорема 1 (необхідна умова). *Нехай крайова задача* (1), (2) *має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$: $x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *який перетворюється при* $\varepsilon = 0$ *в породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ (5) *з константою* $c_r = c_r^0$. *Тоді вектор* $c_r^0 \in R^r$ *задовольняє рівняння*

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)\right]^{-1}](\cdot)\Psi^*(\cdot)Z(x_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)\Bigg)\Bigg\} = 0. \tag{7}$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.5 [1]. Позначимо ліву частину рівняння (7) через $F(c_r^0)$ і називатимемо його рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1), (2). У випадку періодичних задач константа c_r^0 має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, а в класичній періодичній задачі рівняння (7) має назву рівняння для породжуючих амплітуд [6].

Якщо рівняння (7) має розв'язок $c_r = c_r^0 \in R^r$, то вектор c_r^0 визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t,\varepsilon)$ вихідної крайової задачі (1), (2), який перетворюється в $x_0(t,c_r^0)$ при $\varepsilon = 0$. Якщо рівняння (7) не має розв'язків, то і крайова задача (1), (2) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння для породжуючих констант.

Для отримання достатньої умови існування розв'язку зробимо заміну змінних в крайовій задачі (1), (2)

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y(t,\varepsilon),$$

в якій вектор констант $c_r^0 \in R^r$ задовольняє рівняння (7). Будемо шукати умови існування розв'язку $y = y(t,\varepsilon)$: $y(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$, який перетворюється в нульовий при $\varepsilon = 0$ крайової задачі

$$B(t)\dot{y} = A(t)y + \varepsilon Z(x_0(t,c_r^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$ly = \varepsilon J(x_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{9}$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$ і векторного функціонала $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ за x в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у вектор-функції $Z(x_0 + y,t,\varepsilon)$

та у векторному функціоналі $J(x_0(\cdot, c_r^0, 0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ лінійну частину за y і члени нульового порядку за ε. Тоді має місце розклад

$$Z(x_0 + y, t, \varepsilon) = Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)y + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon); \tag{10}$$

$$J(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(x_0(\cdot, c_r^0)) + l_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{11}$$

де

$$Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) \in C[t], \qquad J(x_0(\cdot, c_r^0)) = J(x_0(\cdot, c_r^0), 0),$$

$$A_1(t) = A_1(t, c_r^0) = \frac{\partial Z(x, t, 0)}{\partial x}\bigg|_{x = x_0(t, c_r^0)} \in C[t],$$

$l_1 y(\cdot, \varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J(x_0(\cdot, c_r^0, 0) + y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$. Згідно з [3], лінійний оператор $l_1 := J'(x_0)$ є похідною Фреше. Нелінійна вектор-функція $R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ належить до класу $C^1[y]$, $C[t]$, $C[\varepsilon]$ в області $\|y\| \leqslant q$, $t \in [a, b]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. При цьому

$$R(0, t, 0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0, t, 0)}{\partial y} = 0, \qquad R_1(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial R_1(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Отже, розглянемо крайову задачу

$$B(t)\dot{y} = A(t)y + \varepsilon\{Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)y + R(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}, \tag{12}$$

$$ly = \varepsilon\{J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) + l_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}. \tag{13}$$

Вона має розв'язок:

$$y(t, \varepsilon) = X_r(t)c + \overline{y}(t, \varepsilon), \qquad c = c(\varepsilon) \in R^r,$$

$$\overline{y}(t, \varepsilon) = \varepsilon(G[Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) + A_1(\tau)y + R(y(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)])(t) +$$
$$+ \varepsilon X_{n-s}(t) Q^+ (J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) + l_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon))$$

при виконанні умови

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) + l_1 y(\cdot, \varepsilon) + R_1(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau)\{Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) + A_1(\tau)y + R(y(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\}d\tau -$$
$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot) \times$$
$$\times \{Z(x_0(\cdot, c_r^0), \cdot, 0) + A_1(\cdot)y + R(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}\Bigg)\Bigg\} = 0.$$

В лінійну частину останнього виразу замість y підставимо вираз $X_r(t)c+\overline{y}(t,\varepsilon)$ і врахувавши, що виконується умова (7), отримаємо алгебраїчну відносно $c \in R^r$ систему:

$$B_0c = -P_{Q_d^*}\Biggl\{l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\Biggl(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Theta(\tau,\varepsilon)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Theta(\cdot,\varepsilon)\Biggr)\Biggr\}, \tag{14}$$

де $(d \times r)$-вимірна матриця B_0 має вигляд:

$$B_0 := P_{Q_d^*}\Biggl(l_1X_r(\cdot) - l\Biggl(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)A_1(\cdot)X_r(\cdot)\Biggr)\Biggr),$$

$$\Theta(t,\varepsilon) = A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon).$$

Приходимо до операторної системи:

$$\begin{cases} y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \overline{y}(t,\varepsilon), \\ \overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon(G[Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)y + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)])(t) + \\ \qquad + \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+(J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)), \\ B_0c = -P_{Q_d^*}\Biggl\{l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\Biggl(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Theta(\tau,\varepsilon)d\tau - \\ \qquad - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Theta(\cdot,\varepsilon)\Biggr)\Biggr\}. \end{cases} \tag{15}$$

Для розв'язності третього рівняння операторної системи (15) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Biggl\{l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\Biggl(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Theta(\tau,\varepsilon)d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Theta(\cdot,\varepsilon)\Biggr)\Biggr\} = 0. \tag{16}$$

При умові

$$P_{B_0^*} = 0, \text{ яка еквівалентна [7] умові: } \operatorname{rank} B_0 = d, \tag{17}$$

умова (16) виконується, де $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^d на нуль-простір $N(B_0^*)$.

Знайшовши розв'язок третього рівняння, операторну систему (15) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \overline{y}(t,\varepsilon), \\ c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y^*_{n-s}(\tau)\Theta(\tau,\varepsilon)d\tau - \\ \qquad - \Phi(\cdot)\Bigg[\sum\limits_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \dfrac{d^k}{dt^k} [\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1} \Bigg](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Theta(\cdot,\varepsilon)\Bigg)\Bigg\}, \\ \overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon(G[Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)y + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)])(t) + \\ \qquad + \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+(J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)). \end{cases} \tag{18}$$

Аналогічно [1, 2], введемо змінну $u = \mathrm{col}(y(t,\varepsilon), c(\varepsilon), \overline{y}(t,\varepsilon)$, тоді система (18) у нових змінних буде такою:

$$u = L^{(1)}u + Fu, \tag{19}$$

де

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & X_r(t) & I_n \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Fu = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau - \\ \qquad - \Phi(\cdot)\Bigg[\sum\limits_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \dfrac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\Bigg](\cdot)\Psi^*(\cdot)R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Bigg)\Bigg\} \\ \varepsilon(G[Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)y(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)])(t) + \\ \qquad + \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+(J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))) \end{pmatrix},$$

$$L_1\varphi := -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\varphi(\cdot,\varepsilon) - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)\}d\tau -$$

$$- \Phi(\cdot)\Bigg[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\Bigg](\cdot)\Psi^*(\cdot)A_1(\cdot)\varphi(\cdot)\Bigg)\Bigg\}.$$

Систему (19) запишемо у вигляді

$$(I_\varrho - L^{(1)})u = Fu \qquad (\varrho = 2n + r).$$

Матриця $(I_\varrho - L^{(1)})$ блоково-діагональна, яка має завжди обернену. Тоді

$$u = Su, \qquad S := (I_\varrho - L^{(1)})^{-1}F,$$

де оператор S є оператором стиску: $u \to u$; $\overline{u}, \overline{\overline{u}} \in u$, $\|S\overline{u} - S\overline{\overline{u}}\| \leqslant \mu\|\overline{u} - \overline{\overline{u}}\|$, $\mu < 1$ [8]. В околі породжуючого розв'язку $y = 0$, $\varepsilon = 0$ операторне рівняння $u = Su$ з оператором стиску S

буде мати єдиний розв'язок [8], який можна знайти як $u = \lim\limits_{\nu\longrightarrow\infty} u_\nu$, $u_0 = 0$, $u_\nu = Su_{\nu-1}$, де $u_0 = \operatorname{col}(y_0, c_0, \overline{y}_0) = 0$.

Отже, для знаходження розв'язку $y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$ крайової задачі (12), (13) ітераційний процес буде таким:

$$
\begin{aligned}
&y_{p+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_p + \overline{y}_{p+1}(t,\varepsilon), \qquad p = 0,1,2,\ldots, \qquad y_0(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t,\varepsilon) = 0,\\
&c_p = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Biggl\{ l_1\overline{y}_p(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_p(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\Biggl(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Theta_p(\tau,\varepsilon)d\tau -\\
&\qquad - \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L\Phi(t)]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Theta_p(\cdot,\varepsilon)\Biggr)\Biggr\}, \qquad (20)\\
&\Theta_p(t,\varepsilon) = A_1(t)\overline{y}_p(t,\varepsilon) + R(y_p(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\\
&\overline{y}_{p+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon(G[Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)y_p(\tau,\varepsilon) + R(y_p(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)])(t) +\\
&\qquad + \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+(J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1 y_p(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_p(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

Теорема 2 (достатня умова). *Нехай крайова задача* (1), (2) *така, що* $\operatorname{rank} Q = n_1 \ll \ll \min(m, n-s)$ *і відповідна породжуюча крайова задача* (3), (4) *при умові* (6) *має* r*-параметричне* ($r = n - s - n_1$) *сімейство розв'язків* (5). *Тоді для кожного дійсного значення вектора* $c_r = c_r^0 \in R^r$, *який задовольняє рівняння* (7) *для породжуючих констант, при умові* (17) *крайова задача* (1), (2) *має хоча б один розв'язок* $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ (5). *Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного ітераційного процесу* (20) *і формули* $x_p(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_p(t,\varepsilon)$, $p = 0,1,2,\ldots$.

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд. Ин-та математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht-Boston: VSP, 2004. – 317 p.
3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие. – Москва: Высш. шк., 1982. – 271 с.
4. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303–312. (http.www.springer.com)
5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 572 с.
8. *Красносельський М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1968. – 455 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 20.11.2008

L. M. Shegda

Degenerated nonlinear Noether boundary-value problems

We have obtained conditions for the existence of a solution of the weakly nonlinear degenerated boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with a Noether operator in the linear part.