ОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2010

МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. І. Гуляєв, П. З. Луговий, О. В. Глушакова

Біфуркації хвильових торсіонних автоколивань складених бурильних колон

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

На підставі розрахунку нелінійної фрикційної взаємодії долота і руйнівної породи поставлено задачу про дослідження самозбудження хвильових і коливальних рухів у вертикальній складеній колоні глибокого буріння з урахуванням ефектів відбиття-заломлення хвилі крутіння в місцях зчленування ділянок колон з різними жорсткостями. Аналізується вплив ефекту запізнювання хвилі крутіння, що прийшла, на динамічний процес. Проведено дослідження цих ефектів.

1. Автоколивання механічних систем з тертям є одним з найбільш поширених явищ в природі. Вони реалізуються в результаті саморегуляції підводу в систему енергії від зовнішнього джерела таким чином, щоб компенсувати її втрати на тертя. При рівності енергії, якої система набуває від зовнішнього джерела за один період, і енергії, що витрачається на подолання сил тертя, коливання, які збуджуються, стають незатухаючими і періодичними. Частота цих коливань, в загальному випадку, відрізняється від частоти власних коливань [1, 2].

Автоколивальні явища часто виникають і в бурильних колонах при роторному способі буріння глибоких нафтових і газових свердловин. Одним з динамічних явищ, що сприяють виникненню позаштатної ситуації в процесі буріння, є самозбудження крутильних коливань обертової бурильної колони. Оскільки бурильна колонна (БК) являє собою торсіонний маятник, у нижній частині якого за рахунок дисипативної взаємодії між долотом і руйнівною породою відбувається відтік енергії від приводного механізму в навколишнє середовище, при порушенні умов цього відтоку колона може переходити від режиму стаціонарного рівноважного обертання в режим крутильних автоколивань.

Для їх встановлення важлива нелінійність силової взаємодії між окремими частинами системи, що керує надходженням енергії і її витратою, і яка, таким чином, призводить до обмеженості амплітуди коливань. У бурильних установках причиною самозбудження торсіонних коливань є біфуркаційне порушення балансу моментів сил пружності в колоні й нелінійних сил тертя між долотом і стінкою свердловини. В роботах [3, 4] поставлена і розв'язана задача про моделювання хвильових крутильних автоколивань в однорідних

БК. В даній роботі розглянута динаміка колони, що складається з двох ділянок з різними жорсткостями при крутінні.

2. Основні співвідношення проблеми самозбудження хвильових торсіонних коливань бурильних колон. У роботі [3] розглядалася бурильна колона у вигляді торсіонного маятника, до нижнього кінця якого прикріплене долото. Верхній кінець БК обертається із заданою постійною швидкістю ω. Пружні крутильні рухи БК описуються рівнянням

$$\rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - G I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

де ρ — густина матеріалу БК; G — його модуль пружності при зсуві; I_z — полярний момент інерції площі поперечного перерізу труби БК.

Позначивши $\beta = \sqrt{G/\rho}$, де β — швидкість поширення поперечної пружної хвилі (хвилі крутіння), рівняння (1) зведемо до стандартної форми [5]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Воно має розв'язок у формі Даламбера

$$\varphi(z,t) = f(z - \beta t) + g(z + \beta t). \tag{3}$$

Вказані функції мають граничні умови

$$F[f(0 - \beta t), g(0 + \beta t)] = 0 \qquad (z = 0), \tag{4}$$

$$f(L - \beta t) + g(L + \beta t) = 0 \qquad (z = L), \tag{5}$$

де F — нелінійний диференціальний оператор, що описує рух долота.

Умова (4) формується за допомогою рівняння балансу моментів сил інерції M^{in}, сил тертя M^{fr} і сил пружності M^{el}

$$M^{\text{in}} + M^{\text{fr}} + M^{\text{el}} = 0, \tag{6}$$

що випливає з принципу Даламбера, записаного для долота, умовно відокремленого від труби БК.

Розглянемо тепер складену бурильну колону. Нехай, наприклад, БК складається з двох ділянок (рис. 1), довжини яких становлять l_1, l_2 і механічні характеристики дорівнюють β_1, ρ_1, l_1 та β_2, ρ_2, l_2, відповідно.

Тоді елементи хвилі $f(z - \beta t)$, поширюючись від точки $z = 0$ і досягаючи точки $z = l_1$, будуть в ній піддаватися впливу актів ударного заломлення-відбиття. Для обчислення інтенсивностей відповідних заломлених і відображених хвиль розглянемо процес дифракції елемента хвилі довжиною $\beta_1 \Delta t$ протягом часу Δt. Виділимо елементи БК у падаючій, відбитій і прониклій хвилях, що беруть участь у цій взаємодії і мають кутові швидкості $\dot{\varphi}_1^i$, $\dot{\varphi}_1^r$, $\dot{\varphi}_2^t$ і довжини $\beta_1 \Delta t$, $\beta_1 \Delta t$, $\beta_2 \Delta t$, відповідно. Тут індексами i, r, t позначені, відповідно, падаюча, відбита і заломлена хвилі. Вважаючи, що $\dot{\varphi}_1^i$ відома, підрахуємо $\dot{\varphi}_1^r$, $\dot{\varphi}_2^t$. Для цього використаємо умову збереження моменту кількостей руху виділених елементів до і після удару. Воно має вигляд

$$\Delta K_1^i = \Delta K_1^r + \Delta K_2^t, \tag{7}$$

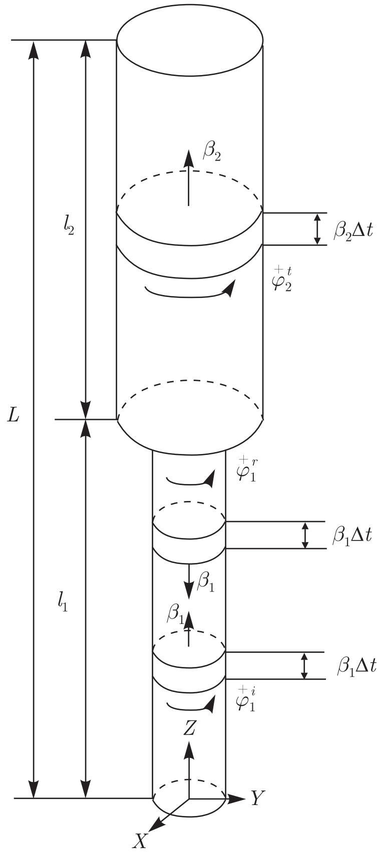

Рис. 1. Схема поширення хвиль крутіння в складеній бурильній колоні

де

$$\Delta K_1^i = \dot{\varphi}_1^i \cdot \rho_1 I_1 \beta_1 \Delta t, \qquad \Delta K_1^r = \dot{\varphi}_1^r \cdot \rho_1 I_1 \beta_1 \Delta t, \qquad \Delta K_2^t = \dot{\varphi}_2^t \cdot \rho_2 I_2 \beta_2 \Delta t. \tag{8}$$

Доповнивши рівняння (7) умовою нерозривності кутових швидкостей

$$\dot{\varphi}_1^i + \dot{\varphi}_1^r = \dot{\varphi}_2^t, \tag{9}$$

отримуємо систему двох рівнянь для обчислення $\dot{\varphi}_1^r$ і $\dot{\varphi}_2^t$. Вона має розв'язок

$$\dot{\varphi}_1^r = \frac{\beta_2\rho_2 I_2 - \beta_1\rho_1 I_1}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\dot{\varphi}_1^i, \qquad \dot{\varphi}_2^t = \frac{2\beta_1\rho_1 I_1}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\dot{\varphi}_1^i. \tag{10}$$

З умов нерозривності крутного моменту і кута крутіння φ обчислюються кути крутіння у відбитій і прониклій хвилях

$$\varphi_1^r = \frac{\beta_2\rho_2 I_2 - \beta_1\rho_1 I_1}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\varphi_1^i, \qquad \varphi_2^t = \frac{2\beta_1\rho_1 I_1}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\varphi_1^i. \tag{11}$$

При розгляді дифракції хвилі $g(z + \beta t)$ в перерізі $z = l_1$ хвиля $g_2^i(z + \beta_2 t)$ на другій ділянці, прибуваюча до цього перерізу, є падаючою і вважається відомою, а хвилі $g_2^r(z - \beta_2 t)$ $(z \geqslant l_1)$ і $g_1^t(z + \beta_1 t)$ $(z \leqslant l_1)$ — відбитою і заломленою і підлягають визначенню. Їх кінематичні характеристики обчислюються за викладеною вище методикою за допомогою рівностей

$$\dot{\varphi}_2^r = \frac{\beta_1\rho_1 I_1 - \beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\dot{\varphi}_2^i, \qquad \dot{\varphi}_1^t = \frac{2\beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\dot{\varphi}_2^i, \tag{12}$$

$$\varphi_2^r = \frac{\beta_1\rho_1 I_1 - \beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\varphi_2^i, \qquad \varphi_1^t = \frac{2\beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2}\varphi_2^i. \tag{13}$$

В результаті дифракції хвиль $\varphi_1^i(z-\beta_1 t)$ і $\varphi_2^i(z-\beta_2 t)$ суперпозиція прониклӧї $\varphi_2^t(z-\beta_2 t)$ і відбитої $\varphi_2^r(z-\beta_2 t)$ хвиль складає хвилю $f_2(z-\beta_2 t)$ на другій ділянці, а сума $\varphi_1^r(z+\beta_1 t)+\varphi_1^t(z+\beta_1 t)$ — хвилю $g_1(z+\beta_1 t)$ на першій ділянці. З урахуванням цього отримаємо початкові умови в точці $z=l_1$ для хвилі $f_2(z-\beta_2 t)$ в області $l_1 \leqslant z \leqslant L$

$$\begin{aligned} f_2(l_1-\beta_2 t) &= \frac{2\beta_1\rho_1 I_1}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} f_1^i(l_1-\beta_2 t) - \frac{\beta_1\rho_1 I_1 - \beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} g_2^i(l_1+\beta_1 t), \\ \dot{f}_2(l_1-\beta_2 t) &= \frac{2\beta_1\rho_1 I_1}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1-\beta_2 t) - \frac{\beta_1\rho_1 I_1 - \beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1+\beta_1 t) \end{aligned} \tag{14}$$

і початкові умови в цій точці для хвилі $g_1(z+\beta_1 t)$ в області $0 \leqslant z \leqslant l_1$

$$\begin{aligned} g_1(l_1+\beta_1 t) &= \frac{\beta_1\rho_1 I_1 - \beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} f_1^i(l_1-\beta_2 t) + \frac{2\beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} g_2^i(l_1+\beta_2 t), \\ \dot{g}_1(l_1+\beta_1 t) &= \frac{\beta_1\rho_1 I_1 - \beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1-\beta_2 t) + \frac{2\beta_2\rho_2 I_2}{\beta_1\rho_1 I_1 + \beta_2\rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1+\beta_2 t). \end{aligned} \tag{15}$$

Рівняння (2), (3) разом з граничними умовами (5), (6) і умовами спряження (14), (15) описують триточкову крайову задачу відносно змінної φ з умовами в точках $z=0$, $z=l_1$ і $z=L$. Для її розв'язання застосовується метод Рунге–Кутта.

3. Аналіз результатів. Для встановлення залежності особливостей виникнення біфуркацій народження циклу й процесу крутильних автоколивань БК довжиною $L=1000$ м від характеру зміни її механічних властивостей вздовж осьової лінії розв'язані дві задачі. В задачі 1 розглянута БК, що складається із двох секцій довжинами $l_1=l_2=500$ м. Значення основних визначальних параметрів: $J=3{,}1$ кг$\cdot$ м^3, $G=8{,}076\cdot10^{10}$ Па, $\beta=3218$ м/с. Вибрана функція $M^{fr}(\omega+\dot{\varphi})$ задається рівністю

$$M^{fr} = -\frac{a_1(\omega+\dot{\varphi})+a_3(\omega+\dot{\varphi})^3+a_5(\omega+\dot{\varphi})^5+a_7(\omega+\dot{\varphi})^7+a_9(\omega+\dot{\varphi})^9}{1+a_2(\omega+\dot{\varphi})^2} \tag{16}$$

при значеннях коефіцієнтів $a_1=2400$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с, $a_2=225$ с^2, $a_3=15000$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с^3, $a_5=1$ Н$\cdot$м$\cdot$с^5, $a_7=4$ Н$\cdot$м$\cdot$с^7, $a_9=-130$ Н$\cdot$м$\cdot$с^9. Переріз верхньої секції має момент інерції $I_{z,2}=3{,}12\cdot10^{-5}$ м^4, переріз нижньої секції — $I_{z,1}=0{,}404\cdot10^{-5}$ м^4. В задачі 2 довжини секцій БК становлять $l_1=667$ м, $l_1=333$ м.

Чисельні дослідження показали, що при малих і великих значеннях швидкості ω долото знаходиться в стані стаціонарного обертання з постійним кутом закручування $\varphi(t)=\text{const}$ і $\dot{\varphi}(t)=0$. Крутильні автоколивання долота збуджуються всередині діапазону $\omega_b \leqslant \omega \leqslant \omega_d$, де ω_b, ω_d — біфуркаційні значення ω, при яких народжуються і втрачаються цикли автоколивань. Вивчалася поведінка системи в стані біфуркації народження циклу при $\omega=\omega_b$. Результати подані в табл. 1, де φ_{st} — кут пружного квазістатичного закручування

Таблиця 1

Номер задачі	ω_b, рад/с	$\varphi_{\rm st}$, рад	φ_{av}, рад	D, рад	T, с
1	0,71	−105,8	−85,9	39,8	139,9
2	0,71	−178,4	−145,2	66,4	124,5

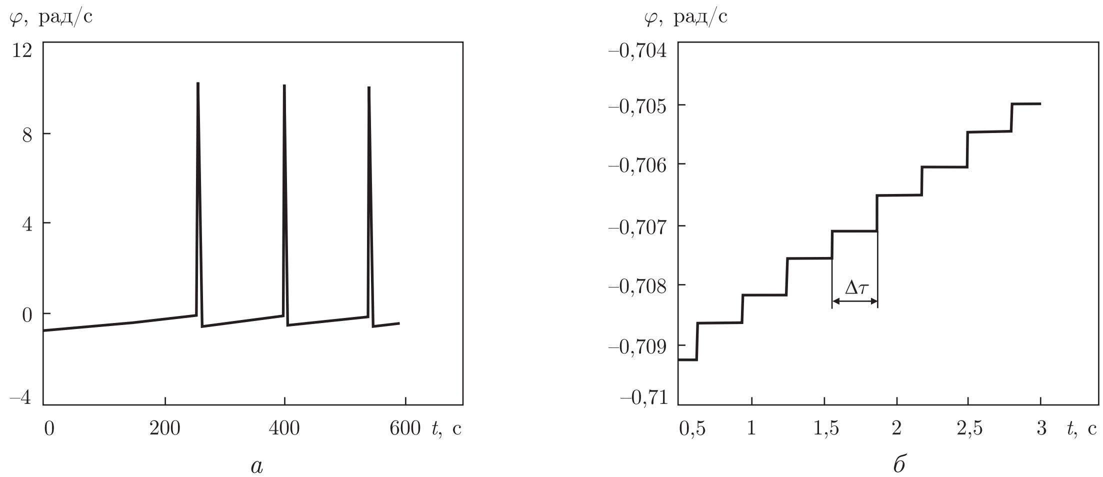

Рис. 2. Графік зміни кутової швидкості долота: *а* — великий масштаб; *б* — малий масштаб

долота в передбіфуркаційному стані; φ_{av} — значення φ, відносно якого відбуваються автоколивання; D — розмах автоколивань; T — період автоколивань.

Заслуговує на увагу встановлений ефект незалежності біфуркаційного значення $\omega_b = 0{,}71$ рад/с від жорсткісних і інерційних властивостей БК, проте інші числові значення параметрів автоколивального процесу відрізняються один від одного істотно.

Рис. 2, *а* відображає зміну кутової швидкості $\dot{\varphi}(t)$ долота за часом для задачі 1. Аналіз цієї функції показав, що автоколивання набули більш впорядкованої квантованої структури з довжиною кванта $\Delta t = 2L/3\beta \approx 0{,}20833$, однакової для обох задач (рис. 2, *б*). Такий ефект для однорідних БК описаний в [6].

1. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – Москва: Наука, 1980. – 364 с.
2. *Рабинович М. К., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. – Москва: Наука, 1984. – 432 с.
3. *Gulyayev V., Hudoliy S., Glushakova O.* The Hopf bifurcations in the wave models of torsional vibrations of superdeep drill columns // ENOC 2008. – Sixth Euromech Nonlinear Dynamics Conference. – June 30 – July 4, 2008. – Saint Petersburg, Russia. – P. 136.
4. *Gulyayev V., Hudoliy S., Glushakova O.* Quantized attractors in the wave torsion models of superdeep drill columns // Internat. symp. RA08 on Rare attractors and rare phenomena in nonlinear dynamics. – 2008. – Riga, Latvia. – P. 33.
5. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 671 с.
6. *Гуляев В. И., Худолий С. Н., Глушакова О. В.* Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения // Пробл. прочности. – 2009. – No 6. – С. 31–43.

Національний транспортний університет, Київ
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 20.04.2010

V. I. Gulyayev, P. Z. Lugovyy, O. V. Glushakova

Bifurcations of wave torsion autovibrations of articulated drill columns.

On the basis of calculations of the nonlinear frictional interaction of a bit and broken rock, the problem on the excitation of wave and vibration torsion motions of a hyperdeep drill column is stated. The effects of the wave refraction-reflection at the joint points are taken into account. The influence of the incident wave delay on the dynamic process is investigated.