ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2010

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 530.3+550.344

© **2010**

Є. М. Бицань

Поширення плоских теплових і термопружних сейсмічних хвиль в узагальненому реологічному тілі Максвелла

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Розв'язано задачу про поширення плоских теплових та термопружних сейсмічних хвиль у реологічному тілі, яке складається з довільного числа паралельно з'єднаних реологічних тіл Максвелла, — узагальненому реологічному тілі Максвелла. Отримано аналітичні вирази для швидкостей і коефіцієнтів згасання теплових та термопружних сейсмічних хвиль. Доведено, що для цього реологічного тіла виконується принцип причинності.

Одним з найважливіших джерел інформації про будову Землі є сейсмічні хвилі, а тому дослідження їхніх властивостей — одна з важливіших задач геофізики. Між параметрами сейсмічних хвиль і властивостями фізичних середовищ, в яких вони поширюються, існує зв'язок, за допомогою якого можна отримати дані про склад і структуру геологічних середовищ. Реальні фізичні середовища є непружними (К. М. Зінер, 1954), що проявляється насамперед у зсуві фаз між напругою й деформацією, повзучості, а також враховується [1] за допомогою реологічних моделей шляхом включення в математичну модель поряд з пружними в'язкі й пластичні елементи. Зауважимо, що врахування підвищеної температури середовища вимагає додаткових доповнень у математичну модель.

У повідомленні розглядається задача про поширення плоских теплових і термопружних хвиль в однорідному ізотропному середовищі, непружні властивості якого апроксимуються реологічним тілом, що схематично зображується паралельним об'єднанням n ($n > 2$) реологічних тіл (РТ) Максвелла. Його реологічна формула записується таким чином: $M_n^* = M_1|M_2\cdots|M_n$, де $M = N{-}H$ — тіло Максвелла: H — пружний, а N — в'язкий елементи; вертикальна риска означає паралельне з'єднання, а горизонтальна — послідовна. Реологічне рівняння (РР) узагальненого тіла Максвелла виводиться рекурентно з умови

$$M_k^* = M_{k-1}^*|M_k, \qquad k = 2,\ldots,n, \tag{1}$$

при цьому враховується, що деформація в досліджуваному тілі та в РТ-складових однакова, а напруга в досліджуваному тілі дорівнює сумі напруг в його складових:

$$\sigma_k^* = \sigma_{k-1}^* + \sigma_k = \sigma, \qquad \varepsilon_k^* = \varepsilon_{k-1}^* + \varepsilon_k = \varepsilon. \tag{2}$$

Тут σ — напруга; ε — деформація; нижній індекс указує на належність до певного РТ.

Зв'язок між напругою й деформацією в ординарному РТ Максвелла описується таким чином:

$$\sigma_i + \tau^{(i)}\dot{\sigma}_i = \eta_i[\dot{\varepsilon}_i - \beta_{0i}\dot{\theta}_i], \tag{3}$$

де $\tau^{(i)} = \eta_i/E_i$ — час релаксації напруги при постійній деформації у i-му тілі Максвелла, η_i й E_i — його в'язкі й пружні модулі; $\beta_{0i} = ((1+\nu_i)/(1-\nu_i))\alpha_{T_i}$, ν_i — коефіцієнт Пуассона, α_{T_i} — коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\theta_i = T_i - T_{0i}$, T_{0i} — температура недеформованого, а T_i — деформованого i-го тіла Максвелла в точці з поточною координатою x $(\theta_i/T_{0i} \ll 1)$. Крапка зверху означає диференціювання по часовій координаті t.

РР досліджуваного тіла отримаємо, якщо виключити із системи (1) за допомогою рівнянь (2) парціальні напруги й деформації та припустити, що $\theta_2\beta_{02}/\beta_{01} \cong \theta_1 = \theta$:

$$P_n(D)\sigma = H_n D Q_{n-1}(D)[\varepsilon - \beta_{01}\theta], \tag{4}$$

де $D = d/dt$ — оператор диференціювання по часовій координаті t; P_n і Q_{n-1} — поліноми від D, адитивна константа в яких дорівнює одиниці, а інші константи виражаються через механічні параметри досліджуваного РТ, показник внизу вказує на порядок цих поліномів, $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i$ — релаксуючий в'язкий модуль узагальненого РТ Максвелла.

Зауважимо, що можуть бути вироджені випадки об'єднання РТ Максвелла, коли один з елементів останнього РТ Максвелла буде дорівнювати нулю:

$$M_n^{*H} = M_n^*|H, \qquad M_n^{*N} = M_{n-1}^*|N,$$

а їхні РР запишуться таким чином:

$$P_n\sigma = EQ_n^H(\varepsilon - \beta_{01}\theta), \qquad P_{n-1}\sigma = H_n D Q_{n-1}^N(\varepsilon - \beta_{01}\theta),$$

де $Q_n^H = P_n + \nu_n D Q_{n-1}$, $\nu_n = H_n/E$, $Q_{n-1}^N = H_n D(\eta_n P_{n-1}/H_n + Q_{n-2}H_{n-1}/H_n)$, $H_n = H_{n-1} + \eta_n$, а P_i і Q_{i-1} — коефіцієнти при напрузі та деформації у РР РТ M_i^*.

Система рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності складається з рівняння руху в переміщеннях та рівняння теплопровідності.

Рівняння руху для плоскої поздовжньої одновимірної хвилі за допомогою другого закону Ньютона, який має такий вигляд:

$$\rho\ddot{u} = \sigma', \tag{5}$$

де u — поздовжнє зміщення середовища в напрямі поширення сейсмічної хвилі; ρ — питома густина; штрихом позначено диференціювання по лінійній змінній x.

Продиференціюємо співвідношення (4) по змінній x і підставимо туди σ з рівняння (5). З огляду на те, що $\varepsilon = u'$, отримаємо в підсумку рівняння руху в переміщеннях для досліджуваного тіла:

$$\rho D^2 P_n u = \frac{H_n D Q_{n-1}[u'' - \beta_{01}\theta']}{\rho}. \tag{6}$$

Рівняння теплопровідності записується таким чином [2]:

$$\theta'' - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - m\dot{u}' = 0, \tag{7}$$

де κ — коефіцієнт температуропровідності; $m = \beta_{01}E_0T_0/\lambda_q$, λ_q — коефіцієнт теплопровідності, E_0 — пружний модуль.

Розв'язок системи рівнянь термопружності (6), (7) шукаємо в такому вигляді [2]:

$$u = u_0e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \theta = \theta_0e^{i(kx-\omega t)}, \tag{8}$$

де u_0 і θ_0 — довільні постійні інтегрування; ω — кругова частота; $k = \omega/c_0 + i\alpha$ — хвильове число, c_0 — фазова швидкість, а α — коефіцієнт згасання досліджуваних сейсмічних хвиль; $i = \sqrt{-1}$.

Підставимо u й θ у формі (8) у систему рівнянь динамічної задачі термопружності (6), (7) та приходимо до такої однорідної лінійної системи рівнянь для визначення сталих інтегрування u_0 і θ_0:

$$\begin{aligned} &\left(-k^2 + i\frac{\omega}{\kappa}\right)\theta_0 - m\omega k u_0 = 0, \\ &iH_n\beta_{01}kQ_{n-1}\theta_0 + [-\rho i\omega P_n + Hk^2Q_{n-1}]u_0 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

З умови нетривіальності розв'язку системи рівнянь (9) для досліджуваного тіла отримуємо таке характеристичне біквадратне рівняння для хвильових чисел:

$$H_nQ_{n-1}k^4 - \left[i\rho\omega P_n + \frac{i\omega H_n}{\kappa}Q_{n-1} + im\omega\beta_{01}\right]k^2 - \frac{\rho\omega^2}{\kappa}P_n = 0,$$

яке можна записати у наведеній формі таким чином:

$$k^4 - \left[\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{\omega}{\kappa}(1+\delta_0)i\right]k^2 - \frac{\omega^3}{\kappa c_0^2} = 0, \tag{10}$$

де $c_0^2 = E/\rho$ — комплексна швидкість; $E = \omega H_nQ_{n-1}/(iP_n) = E_0(1 - i\beta)$ — комплексний, а $E_0 = \mathrm{Re}(E)$ — динамічний модулі; $\beta = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im}(E)/\mathrm{Re}(E))$ — фазова характеристика комплексного модуля, яка для більшості гірських порід мала відносно одиниці [3] і називається кутом втрат або внутрішнім тертям [4, 5]; $\delta_0 = m\kappa\beta_{01}/(H_nQ_{n-1})$ — константа зв'язності, яка мала порівняно з одиницею [2].

Корені біквадратного рівняння (10) визначаються за формулою

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0) \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0)\right)^2 - \frac{4i\omega^3}{\kappa c_0^2}}\right], \tag{11}$$

яку можна перетворити, враховуючи, що складові в радикалі мають різний порядок, і після елементарних перетворень отримати в підсумку такий вираз для хвильових чисел:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0) \pm \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0)\right)\sqrt{1+\delta}\right], \tag{12}$$

де

$$\delta = \frac{4i\delta_0\omega^2/c_0^2}{[\omega^2/c_0^2 - i\omega(1-\delta_0)/\kappa]^2} = \frac{4i\delta_0\xi}{[\xi - i(1-\delta_0)]^2} \ll 1, \qquad \xi = \frac{\omega\kappa}{c_0^2} \ll 1.$$

Відомо, що необхідною і достатньою умовою дотримання принципу причинності [6, 7] є вимога, щоб корені хвильового числа $k(\omega)$ знаходилися в нижній півплощині ($\operatorname{Im}\omega < 0$). Ця умова буде виконуватися у випадку, коли показник степеня у виразі для часової складової у формулі (8) буде від'ємним.

Дійсно, визначальним фактором в наявності коренів у хвильовому числі є корені комплексного модуля, який записується таким чином:

$$E = \frac{\omega H_n Q_{n-1}(D)}{iP_n(D)}. \tag{13}$$

Характеристичні поліноми P і Q розкладаються на множники так:

$$Q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i D^i = b_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(D-\mu_i), \qquad P_{n1} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i = a_n\prod_{i=1}^{n}(D-\lambda_i), \tag{14}$$

де $a_0 = b_0 = 1$, $\lambda_i = -\tau_i^{-1}$, $\mu_i = -\nu_i^{-1}$ — корені характеристичних рівнянь $P(D)$ і $Q(D)$, τ_i — часи релаксацій, а ν_i — часи післядії. Підставимо в формулу (13) вирази для характеристичних поліномів P і Q, згідно з формулою (14), і враховуючи, згідно з теоремою Вієта, що $b_{n-1} = \prod\limits_{i=1}^{n-1}\nu_i$, $a_n = \prod\limits_{i=1}^{n}\tau_i$, отримаємо при $D = -i\omega$ вираз для комплексного модуля:

$$E = \frac{\omega H_n \prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(\omega + \dfrac{i}{\nu_i}\right)}{i\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\omega + \dfrac{i}{\tau_i}\right)},$$

звідки видно, що комплексний модуль, а отже, і хвильове число не мають коренів у верхній півплощині.

Рівняння (12) дає дві пари хвильових чисел. Перша пара відноситься до термопружної хвилі, а друга — до теплової. Додатне значення береться для хвилі, що рухається в позитивному напрямі осі x, а від'ємне — для хвилі, що рухається у зворотному напрямі.

Модуль комплексної константи δ малий порівняно з одиницею, це дозволяє лінеаризувати радикал у формулі (12) та отримати в підсумку лінеаризовані формули для хвильових чисел:

$$k_1 = \frac{\omega}{\widehat{c}_0\sqrt{1-i\beta}}\left[1 - \frac{\delta_0}{2}\right], \qquad k_2 = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0/2)}{2\kappa}}(1-i),$$

де $\widehat{c}_0 = \sqrt{E_0/\rho}$.

Співвідношення (13) для слабопружних середовищ набувають такої форми:

$$k_1 = \frac{\omega}{\widehat{c}_0}\left[1 - \frac{\delta_0}{2} + i\frac{\beta}{2}\right], \qquad k_2 = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0)}{2\kappa}}[1+i],$$

звідки можна отримати вирази для фазових швидкостей і коефіцієнтів згасання термопружних і теплових сейсмічних хвиль [2]:

$$V_1 = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_1)} = \frac{\widetilde{c}_0}{1-\delta_0/2}, \qquad \alpha_1 = \mathrm{Im}(k_1) = \frac{\omega\beta}{2\widetilde{c}_0},$$

$$V_2 = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_2)} = \sqrt{\frac{2\kappa(1+\delta_0)}{\omega}}, \qquad \alpha_2 = \mathrm{Im}(k_2) = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0)}{2\kappa}}.$$

Далі розглянемо поведінку досліджуваного РТ у стандартних випадках у фіксованій точці $x = x_0$.

1. Якщо в РТ M_n^* підтримується постійна напруга $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$, то в цьому випадку в тілі відбувається процес повзучості. Рівняння теплопровідності (7) дає таку залежність між температурою й деформацією:

$$\theta = -m\kappa\varepsilon, \tag{15}$$

а РР (4) зводиться до диференціального рівняння відносно деформації ε:

$$H_n D Q_{n-1}(1+\delta_0)\varepsilon = \sigma_0, \tag{16}$$

розв'язок якого (функція повзучості) запишеться таким чином:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{-t/\lambda_i} + \frac{\sigma_0 t}{H_n(1+\delta_0)} + c_0, \tag{17}$$

де c_i — сталі інтегрування, які знаходяться з початкових умов, а λ_i — часи релаксації деформації при постійній напрузі, які визначаються за допомогою характеристичного рівняння: $Q_{n-1}(\lambda) = 0$.

У виразі (17) для деформації в узагальненому тілі Максвелла є складова, що прямо пропорційна часу. Звідси випливає, що при постійній напрузі деформація в ньому необмежено зростає і в тілі буде відбуватися плин. Отже, це тіло є у певному розумінні рідиною.

Якщо в момент $t = t_1$ тіло розвантажити, то в ньому буде відбуватися післядія. Деформація (функція післядії) в цьому випадку буде описуватись виразом

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{-t'/\lambda_i} + c_0,$$

де $t' = t - t_1$, і буде змінюватися від $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ $(t = t_1)$ до c_0 $(t = \infty)$.

Зауважимо, що для РТ M_n^{*N} відмінності функцій повзучості і післядії від аналогічних у РТ M_n^* будуть визначатись різницею коефіцієнтів у лівих частинах їхніх РР, а деформація в РТ M_n^{*H} — з диференціального рівняння

$$Q_n^H(\varepsilon) = \frac{\sigma_0}{E(1+\delta_0)},$$

за допомогою якого можна отримати вирази для функції повзучості

$$\varepsilon^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i' e^{-t/\lambda_i} + \frac{\sigma_0}{E(1+\delta_0)}$$

і для функції післядії

$$\varepsilon^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} c_i' e^{-t'/\lambda_i}.$$

2. У випадку, коли в РТ M_n^* підтримується постійна деформація $\varepsilon = \varepsilon_0 = \mathrm{const}$, має місце релаксація напруг, а РР (4) дає таке диференціальне рівняння для напруг σ

$$P_n(D)\sigma = 0, \tag{18}$$

розв'язок якого (функція релаксації) набуває вигляду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-t/\tau_i}, \tag{19}$$

де d_i — сталі інтегрування, які знаходяться з початкових умов, а часи релаксації напруг при постійній деформації τ_i (часи післядії) задовольняють характеристичному рівнянню

$$P_n(\tau) = 0. \tag{20}$$

З рівняння (19) випливає, що напруга буде релаксувати від σ_0 $(t = 0)$ до 0 $(t = \infty)$.

Релаксація напруг в РТ M_n^{*N} зводиться до розглянутого вище випадку при показникові в ЛДВ Q, що дорівнює $n-1$, для РТ M_n^{*H} рівняння (18) матиме вигляд

$$P_n(D)\sigma = E\varepsilon_0(1 + \delta_0),$$

а функція релаксації запишеться як

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-t/\tau_i} + E\varepsilon_0(1 + \delta_0),$$

напруга буде релаксувати від σ_0 $(t = 0)$ до $E\varepsilon_0(1 + \delta_0)$ $(t = \infty)$.

3. Якщо в тілі підтримується гармонічна напруга $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$, то деформація у цьому випадку буде запізнюватись по фазі від напруги і запишеться виразом

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \phi)}, \tag{21}$$

а зсув фаз ϕ між деформацією й напругою та початкова деформація ε_0 визначаються таким чином:

$$\phi = \beta, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{|E|}, \tag{22}$$

де $\hat{E} = \hat{E}_0(1 + i\beta) = \hat{E}_1 + i\hat{E}_2$ — комплексний в'язкопружний модуль.

1. *Рейнер М.* Реология. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 165 с.
3. *Уайт Дж.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. – Москва: Недра, 1986. – 261 с.
4. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения. – Москва: Госстройиздат, 1960. – 152 с.
5. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. – Москва: Госстройиздат, 1968. – 416 с.

6. *Коган С. Я.* Краткий обзор теорий поглощения сейсмических волн // Изв. АН СССР. Физика земли. – 1966. – № 11. – С. 1–28.
7. *Futterman W. I.* Dispersive body waves // J. Geoph. Res. – 1962. – **67**, No 13. – P. 5279–5291.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.03.2010

Je. M. Bytsan'

Distribution of plane thermal and thermoelastic seismic waves in an integrated rheological Maxwell's body

The problem of a distribution of plane thermal and thermoelastic seismic waves in a rheological body, which consists of an arbitrary number of parallel rheological Maxwell's bodies (integrated rheological Maxwell's body), is solved. The analytical dispersive formulas have been obtained for phase velocities and absorption coefficients in the wave processes under study. It is proved that the causality principle is valid for this rheological body.