



УДК 539.375

© 2010

В. Л. Богданов

## Неосесиметрична задача про дві паралельні співвісні тріщини нормального відриву в матеріалі з початковими напруженнями

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

*В рамках підходів лінеаризованої теорії пружності досліджено неосесиметричну задачу про взаємодію двох паралельних співвісних тріщин нормального відриву в нескінченному тілі з початковими напруженнями, що діють вздовж площин розташування тріщин. З використанням зображень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та інтегральних перетворень Фур'є–Ганкеля задачу зведено окремо для кожної гармоніки за кутовою координатою до розв'язуючих систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах контурів тріщин. Виявлено нові механічні ефекти, пов'язані з впливом початкових напружень та взаємодією тріщин між собою.*

За термінологією, запропонованою в [1, 2], розглянута в роботі задача відноситься до не-класичних проблем механіки руйнування, оскільки в рамках класичної механіки крихкого руйнування неможливо врахувати вплив складових зусиль, що діють вздовж тріщин, на параметри руйнування, зокрема, на коефіцієнти інтенсивності напружень та величини розкриття тріщин.

Для дослідження закономірностей впливу на напружено-деформований стан матеріалів з тріщинами початкових (або залишкових) напружень, які діють вздовж тріщин, в роботах [1, 3, 4] було запропоновано підхід в рамках лінеаризованої теорії пружності та сформульовано відповідні критерії руйнування матеріалів з початковими напруженнями. Із використанням зазначеного підходу були отримані розв'язки окремих класів статичних та динамічних задач, переважно для ізольованих тріщин в нескінченних тілах з початковими напруженнями (стислий огляд зазначених робіт наведено в [1, 5]). В [5–11] досліджено окремі задачі про взаємодіючі тріщини нормального відриву, радіального зсуву та кручення в попередньо напружених ізотропних матеріалах та композитах.

Задачу розв'язано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих пружних тіл шляхом її зведення з використанням інтегральних перетворень Фур'є–Ганкеля окремо для кожної гармоніки за кутовою координатою спочатку до парних інтегральних рівнянь, а потім

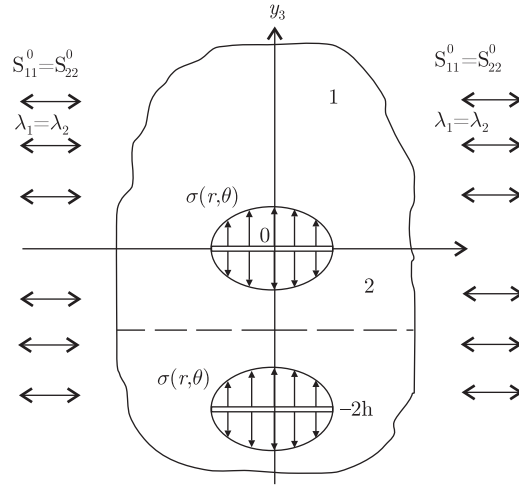


Рис. 1

до систем неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі контурів тріщин, проаналізовано їх залежність від початкових напружень та виявлено пов'язані з цим нові механічні ефекти.

**1. Постановка задачі.** Розглядається необмежене пружне тіло, що містить дві співвісні тріщини однакового радіусу  $a$ , які розташовані в паралельних площинах  $y_3 = 0$  та  $y_3 = -2h$  з центрами на осі  $Oy_3$  (рис. 1). Тут застосовуються лагранжеві координати початкового напружено-деформованого стану, які пов'язані з координатами недеформованого стану такими співвідношеннями:

$$y_j = \lambda_j x_j; \quad \lambda_j = \text{const} \quad (j = 1, 2, 3),$$

де  $\lambda_j$  — зумовлені дією початкових напружень коефіцієнти подовження (скорочення) вздовж координатних осей, які визначають переміщення в початковому стані.

Вздовж координатних осей  $Oy_1, Oy_2$  діють однакові початкові напруження, які реалізують однорідний початковий напружено-деформований стан вигляду

$$S_{33}^0 = 0, \quad S_{11}^0 = S_{22}^0 = \text{const} \neq 0, \quad \lambda_j = \text{const}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad (1)$$

де  $S_{ij}^0$  — компоненти симетричного тензора напружень, віднесені до одиниці площі тіла в недеформованому стані. В подальшому будемо також використовувати такі позначення:  $Q'_{ij}$  — компоненти несиметричного тензора напружень, віднесені до одиниці площі тіла в початковому (зумовленому дією початкових напружень  $S_{ij}^0$ ) стані;  $u_j$  — компоненти відповідного їм вектора переміщень.

Поверхні тріщин завантажені додатковими (відносно початкових напружень  $S_{11}^0 = S_{22}^0$ ) взаємозрівноваженими нормальними розтягуючими зусиллями однакової інтенсивності  $\sigma(r, \theta)$ . Граничні умови на берегах тріщин у цьому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} Q'_{33} &= -\sigma(r, \theta), & Q'_{3r} &= 0, & Q'_{3\theta} &= 0 & (y_3 = (0)_{\pm}, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < a), \\ Q'_{33} &= -\sigma(r, \theta), & Q'_{3r} &= 0, & Q'_{3\theta} &= 0 & (y_3 = (-2h)_{\pm}, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < a), \end{aligned} \quad (2)$$

де нижні індекси “+” та “-” позначають відповідні береги тріщин.

Враховуючи очевидну симетрію силової та геометричної схем задачі (2), переформулюємо її для півпростору  $y_3 \geq -h$  з однією верхньою тріщиною з такими граничними умовами на берегах тріщини та границі півпростору:

$$\begin{aligned} Q'_{33} &= -\sigma(r, \theta), & Q'_{3r} &= 0, & Q'_{3\theta} &= 0 & (y_3 = (0)_{\pm}, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < a), \\ u_3 &= 0, & Q'_{3r} &= 0, & Q'_{3\theta} &= 0 & (y_3 = -h, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (3)$$

При цьому продовження розв'язку на область  $y_3 \leq -h$  забезпечується умовами симетрії зі збереженням граничних умов при  $y_3 = (-2h)_{\pm}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq r < a$  (другий рядок в (2)). Граничні умови (3) необхідно також доповнити умовами регулярності (затухання) напружень та переміщень при віддаленні від тріщини, коли  $y_3 \rightarrow \infty$ .

Умовно розіб'ємо півпростір  $y_3 \geq -h$  на дві області: півпростір  $y_3 \geq 0$  та шар  $-h \leq y_3 \leq 0$ , позначивши відповідні величини індексами 1 та 2. На межі вказаних областей поза тріщиною виконуються умови неперервності переміщень та напружень (тут і в подальшому  $0 \leq \theta < 2\pi$ )

$$\begin{aligned} u_3^{(1)} &= u_3^{(2)}, & u_r^{(1)} &= u_r^{(2)}, & u_{\theta}^{(1)} &= u_{\theta}^{(2)} & (y_3 = 0, a < r < \infty), \\ Q'_{33}^{(1)} &= Q'_{33}^{(2)}, & Q'_{3r}^{(1)} &= Q'_{3r}^{(2)}, & Q'_{3\theta}^{(1)} &= Q'_{3\theta}^{(2)} & (y_3 = 0, a < r < \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Розглядаючи спільно граничні умови (3) та умови неперервності (4), можемо переформулювати постановку задачі у вигляді

$$u_3^{(2)} = 0, \quad Q'_{3r}^{(2)} = 0, \quad Q'_{3\theta}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = -h, 0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)} \quad (y_3 = 0, a < r < \infty), \quad (6)$$

$$Q'_{33}^{(1)} = Q'_{33}^{(2)}, \quad Q'_{3r}^{(1)} = Q'_{3r}^{(2)}, \quad Q'_{3\theta}^{(1)} = Q'_{3\theta}^{(2)} \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty), \quad (7)$$

$$Q'_{33}^{(2)} = -\sigma(r, \theta); \quad Q'_{3r}^{(2)} = 0; \quad Q'_{3\theta}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r \leq a). \quad (8)$$

В [1] побудовано зображення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції, вигляд яких залежить від співвідношення коренів характеристичного рівняння. Так, для випадку нерівних коренів характеристичного рівняння, яким в подальшому для спрощення викладок обмежимося, зазначені зображення мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, & u_{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, & u_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, \\ Q'_{3r} &= C_{44} \left\{ d_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_1 + d_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_2} \varphi_2 - n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_3} \varphi_3 \right\}, \\ Q'_{3\theta} &= C_{44} \left\{ d_1 n_1^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1} \varphi_1 + d_2 n_2^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_2} \varphi_2 + n_3^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_3} \varphi_3 \right\}, \\ Q'_{33} &= C_{44} \left[ d_1 l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_1 + d_2 l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \varphi_2 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де  $z_i \equiv n_i^{-1/2} y_i$ , а параметри  $C_{44}$ ,  $d_i$ ,  $l_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  залежать від механічних характеристик матеріалу та від початкових напружень [1].

Використовуючи (9), в кожній з областей 1 та 2 на основі умов (5)–(8) формулюємо відповідну граничну задачу для потенціальних функцій  $\varphi^{(i)}$  ( $i = \overline{1,3}$ ) (за браком місця зазначені формулювання для потенціальних функцій не наводяться).

**2. Парні інтегральні рівняння.** Подамо функцію інтенсивності зовнішніх навантажень на берегах тріщини у вигляді ряду Фур'є за окружною координатою  $\theta$ , припускаючи для спрощення викладок, що  $\sigma(r, \theta)$  є парною функцією за  $\theta$  (у випадку, коли  $\sigma(r, \theta)$  є непарною функцією за  $\theta$ , тут і в подальшому косинуси слід замінити синусами і навпаки; а в загальному випадку треба використовувати суперпозицію розв'язків)

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}(r) \cos n\theta,$$

де

$$\sigma^{(0)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(r, \theta) d\theta, \quad \sigma^{(n)}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(r, \theta) \cos n\theta d\theta. \quad (10)$$

Наведемо також потенціальні гармонічні функції, що використовуються в зображеннях загальних розв'язків (9) у кожній з областей 1 та 2 у вигляді рядів Фур'є за кутовою координатою  $\theta$  з коефіцієнтами у вигляді інтегральних розкладів Ганкеля за координатою  $r$  відповідного гармоніці за  $\theta$  порядку:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} A_n(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \varphi_2^{(1)}(r, \theta, z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} B_n(\lambda) e^{-\lambda z_2} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \varphi_3^{(1)}(r, \theta, z_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\infty} C_n(\lambda) e^{-\lambda z_3} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \varphi_1^{(2)}(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} [A_n^{(1)}(\lambda) ch\lambda(z_1 + h_1) + A_n^{(2)}(\lambda) sh\lambda(z_1 + h_1)] J_n(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda sh\lambda h_1}, \\ \varphi_2^{(2)}(r, \theta, z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} [B_n^{(1)}(\lambda) ch\lambda(z_2 + h_2) + B_n^{(2)}(\lambda) sh\lambda(z_2 + h_2)] J_n(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda sh\lambda h_2}, \\ \varphi_3^{(2)}(r, \theta, z_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\infty} [C_n^{(1)}(\lambda) ch\lambda(z_3 + h_3) + C_n^{(2)}(\lambda) sh\lambda(z_3 + h_3)] J_n(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda sh\lambda h_3}, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $h_i = hn_i^{-1/2}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ; а  $A_n^{(j)}(\lambda)$ ,  $B_n^{(j)}(\lambda)$ ,  $C_n^{(j)}(\lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , — нові невідомі функції. Зазначимо, що зображення (11) забезпечують задоволення умов регулярності для переміщень та напружень при  $y_3 \rightarrow \infty$ .

Підставивши (11) в граничні умови (5) та (7), що задані на всій області  $y_3 = \text{const}$ , отримуємо шість співвідношень, які пов'язують дев'ять невідомих функцій:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{k}(k_2 + k_1 \text{cth } \mu_1)A_n^{(1)} + \frac{d_2 l_2 k_1}{d_1 l_1 k}(1 + \text{cth } \mu_2)B_n^{(1)}, \\ B_n &= -\frac{d_1 l_1 k_2}{d_2 l_2 k}(1 + \text{cth } \mu_1)A_n^{(1)} - \frac{1}{k}(k_1 + k_2 \text{cth } \mu_1)B_n^{(1)}, \\ C_n &= -C_n^{(1)}, \quad A_n^{(2)} = 0, \quad B_n^{(2)} = 0, \quad C_n^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\mu_i = \lambda h_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $k_1 = l_1 n_2^{-1/2}$ ;  $k_2 = l_2 n_1^{-1/2}$ ;  $k = k_1 - k_2$ .

Граничні умови (6) та (8), що залишились, дозволяють звести задачу окремо для кожної гармоніки за координатою  $\theta$  до системи парних інтегральних рівнянь виду

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [n_1^{-1/2} d_1 A_n^{(1)}(\lambda) + n_2^{-1/2} d_2 B_n^{(1)}(\lambda) + n_3^{-1/2} C_n^{(1)}(\lambda)] \lambda J_{n+1}(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r < a, \\ \int_0^\infty [n_1^{-1/2} d_1 A_n^{(1)}(\lambda) + n_2^{-1/2} d_2 B_n^{(1)}(\lambda) - n_3^{-1/2} C_n^{(1)}(\lambda)] \lambda J_{n-1}(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r < a, \\ \int_0^\infty [d_1 l_1 \text{cth } \mu_1 A_n^{(1)}(\lambda) + d_2 l_2 \text{cth } \mu_2 B_n^{(1)}(\lambda)] \lambda J_n(\lambda r) d\lambda &= -\frac{1}{C_{44}} \sigma^{(n)}(r), \quad r < a, \\ \int_0^\infty X_1 J_{n+1}(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a, \quad \int_0^\infty X_2 J_{n-1}(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \\ \int_0^\infty X_3 J_n(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a, \end{aligned} \quad (13)$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(1 - \frac{d_1 l_1}{d_2 l_2}\right) \frac{k_2}{k} (1 + \text{cth } \mu_1) A_n^{(1)}(\lambda) - \left(1 - \frac{d_2 l_2}{d_1 l_1}\right) \frac{k_1}{k} (1 + \text{cth } \mu_2) B_n^{(1)}(\lambda) - \\ &\quad - (1 + \text{cth } \mu_3) C_n^{(1)}(\lambda), \\ X_2 &= \left(1 - \frac{d_1 l_1}{d_2 l_2}\right) \frac{k_2}{k} (1 + \text{cth } \mu_1) A_n^{(1)}(\lambda) - \left(1 - \frac{d_2 l_2}{d_1 l_1}\right) \frac{k_1}{k} (1 + \text{cth } \mu_2) B_n^{(1)}(\lambda) + \\ &\quad + (1 + \text{cth } \mu_3) C_n^{(1)}(\lambda), \\ X_3 &= d_1 l_1 (1 + \text{cth } \mu_1) A_n^{(1)}(\lambda) + d_2 l_2 (1 + \text{cth } \mu_2) B_n^{(1)}(\lambda) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

Слід відзначити, що випадок осесиметричної задачі ( $n = 0$ ) особливий, оскільки для нього кількість парних інтегральних рівнянь є меншою, ніж для неосесиметричного випадку. Випадок осесиметричної задачі було детально досліджено в [8] і в цій роботі він не розглядається.

**3. Розв'язуючі інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.** Для розв'язання системи парних інтегральних рівнянь (13) будемо використовувати метод підстановки [12], згідно з яким виберемо розв'язок парних рівнянь у вигляді, який дозволяє тотожно задовольнити три останні рівняння в (13) для області  $r > a$ , а саме:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{3/2} \int_0^a t^{1/2} \varphi(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt = \\
&= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a \tilde{\varphi}(t) [a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) - t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t)] dt, \\
X_2 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a t^{1/2} \psi(t) J_{n-1/2}(\lambda t) dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a t^{1/2} \psi(t) J_{n-1/2}(\lambda t) dt, \\
X_3 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \int_0^a t^{1/2} \omega(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt = \\
&= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \lambda^{-1/2} \int_0^a \tilde{\omega}(t) [a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) - t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t)] dt,
\end{aligned} \tag{15}$$

де  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\omega(t)$  — нові невідомі функції, неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку  $[0, a]$ , а також введено позначення

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}[t^n \varphi(t)], \quad \tilde{\omega}(t) = \frac{d}{dt}[t^n \omega(t)]. \tag{16}$$

Підставивши (15) в перші три рівняння (13), після досить громіздких перетворень, аналогічних виконаним, наприклад, в [6], отримуємо неоднорідну систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (окремо для кожної гармоніки за координатою  $\theta$ )

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} + q\right) \tilde{f}_1(x) + \frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} - q\right) \tilde{f}_2(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_1(t) \tilde{K}_{11}(x, t) dt + \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_2(t) \tilde{K}_{12}(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_3(t) \tilde{K}_{13}(x, t) dt = 0, \\
&\frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} - q\right) \tilde{f}_1(x) + \frac{1}{2} \left(s \frac{k}{k_1} + q\right) \tilde{f}_2(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_1(t) \tilde{K}_{21}(x, t) dt + \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_2(t) \tilde{K}_{22}(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_3(t) \tilde{K}_{23}(x, t) dt = 0, \\
&\frac{1}{2} s \frac{k}{k_2} \tilde{f}_3(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_1(t) \tilde{K}_{31}(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_2(t) \tilde{K}_{32}(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{f}_3(t) \tilde{K}_{33}(x, t) dt =
\end{aligned} \tag{17}$$

$$= \frac{4}{\pi} x \int_0^{\pi/2} \tilde{u}'(x \sin \theta) d\theta,$$

де

$$\tilde{u}(r) = \frac{k_1}{C_{44}k_2} r^n \sigma^{(n)}(r); \quad s = n_2^{-1/2} d_2 \left(1 - \frac{d_2 l_2}{d_1 l_1}\right)^{-1}; \quad q = n_3^{-1/2}; \quad (18)$$

$$\tilde{f}_1(x) \equiv \tilde{\varphi}(x) \equiv \frac{d}{dx}[x^n \varphi(x)]; \quad \tilde{f}_2(x) \equiv x^n \psi(x); \quad \tilde{f}_3(x) \equiv \tilde{\omega}(x) \equiv \frac{d}{dx}[x^n \omega(x)],$$

а ядра мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11}(x, t) = & -\pi x^{n+1/2} \int_0^{\infty} L(\lambda) \lambda \left[ a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) - t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t) \right] \times \\ & \times \left[ J_{n-1/2}(\lambda x) - \frac{1}{\Gamma(n+1/2)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{n-1/2} \right] d\lambda \quad \text{і т. д.,} \end{aligned}$$

де

$$L(\lambda) = \frac{1}{4} \left[ s \frac{k_2}{k_1} e^{-2\mu_1} - s e^{-2\mu_2} - q e^{-2\mu_3} \right].$$

Проведемо знерозмірювання системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (17), увівши такі безрозмірні змінні та функції:

$$\begin{aligned} \xi = xa^{-1}, \quad \eta = ta^{-1}, \quad \beta = ha^{-1}, \quad f_1(\xi) \equiv a^{-n-1} \tilde{f}_1(a\xi) = a^{-n-1} \frac{d}{dx}[x^n \varphi(x)], \\ f_2(\xi) \equiv a^{-n-1} f_2(a\xi) = a^{-n-1} x^n \psi(x), \quad f_3(\xi) \equiv a^{-n} \tilde{f}_3(a\xi) = a^{-n} \frac{d}{dx}[x^n \omega(x)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Зробивши відповідні перетворення, отримуємо систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду у безрозмірному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} + q \right) f_1(\xi) + \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} - q \right) f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{13}(\xi, \eta) d\eta = 0, \\ \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} - q \right) f_1(\xi) + \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} + q \right) f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{23}(\xi, \eta) d\eta = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}s\frac{k}{k_2}f_3(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_1(\eta)K_{31}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_2(\eta)K_{32}(\xi, \eta) d\eta + \\ + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_3(\eta)K_{33}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi}\xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta,$$

де

$$u(\xi) = \frac{k_1}{C_{44}k_2}\xi^n \sigma^{(n)}(a\xi).$$

Ядра інтегральних рівнянь (20) мають вигляд

$$K_{11}(\xi, \eta) = n\xi^{n-1} \left\{ -2s\frac{k_2}{k_1}\beta_1[\eta^{-n-1}S_n(z_{11}) - S_n(z_{21})] + \right. \\ \left. + 2s\beta_2[\eta^{-n-1}S_n(z_{12}) - S_n(z_{22})] + 2q\beta_3[\eta^{-n-1}S_n(z_{13}) - S_n(z_{23})] \right\} + \\ + \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)}\xi^{2n} \left\{ -s\frac{k_2}{k_1}[R_n(2\beta_1, \eta) - R_n(2\beta_1, 1)] + s[R_n(2\beta_2, \eta) - R_n(2\beta_2, 1)] + \right. \\ \left. + q[R_n(2\beta_3, \eta) - R_n(\beta_3, 1)] \right\} \quad \text{і. т. д.,} \quad (21)$$

де

$$z_{11} = \frac{(2\beta_1)^2 + \eta^2 + \xi^2}{2\eta\xi}; \quad z_{12} = \frac{(2\beta_2)^2 + \eta^2 + \xi^2}{2\eta\xi}; \quad z_{13} = \frac{(2\beta_3)^2 + \eta^2 + \xi^2}{2\eta\xi}; \\ z_{21} = \frac{(2\beta_1)^2 + 1 + \xi^2}{2\xi}; \quad z_{22} = \frac{(2\beta_2)^2 + 1 + \xi^2}{2\xi}; \quad z_{23} = \frac{(2\beta_3)^2 + 1 + \xi^2}{2\xi}; \\ S_n(z) = \frac{1}{4}(z^2 - 1)^{-1}[Q_n(z) - zQ_n(z)]; \quad R_n(b, t) = \frac{1}{2}b(b^2 + t^2)^{-n-1};$$

$Q_n(z)$  — функція Лежандра другого роду.

**4. Коефіцієнти інтенсивності напружень.** Як і в класичній механіці руйнування матеріалів без початкових напружень [13], коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контура тріщини визначаємо як коефіцієнти при сингулярностях в розподілі відповідних компонентів тензора напружень при наближенні до контура тріщини, тобто

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{33}(r, 0), \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3r}(r, 0), \\ K_{III} = \lim_{r \rightarrow a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3\theta}(r, 0). \quad (22)$$

З розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (20) з урахуванням виразів (19), (18), (15), (14), (12), (11) та подання розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції (9) можна отримати розподіл напружень та переміщень



в матеріалі. Розглянемо значення компонент тензора напружень  $Q'_{33}$ ,  $Q'_{3r}$ ,  $Q'_{3\theta}$  в області ( $y_3 = 0$ ,  $r > a$ ) (тобто в площині розташування тріщини, в області 2). З (9) маємо

$$\begin{aligned} Q'_{33}^{(2)}(r, \theta, 0) &= \frac{1}{4} C_{44} \frac{k}{k_1} s \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \frac{\int_0^a \tilde{\omega}(t) dt}{r^n \sqrt{r^2 - a^2}} + O(1), \\ Q'_{3r}^{(2)}(r, \theta, 0) &= \frac{1}{4} C_{44} \frac{k}{k_1} s \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \left[ \frac{\tilde{\varphi}(a)}{a} + a^{n-1} \psi(a) \right] \frac{1}{r^{n-1} \sqrt{r^2 - a^2}} + O(1), \\ Q'_{3\theta}^{(2)}(r, \theta, 0) &= \frac{1}{4} C_{44} q \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta \left[ \frac{\tilde{\varphi}(a)}{a} - a^{n-1} \psi(a) \right] \frac{1}{r^{n-1} \sqrt{r^2 - a^2}} + O(1), \end{aligned} \quad (23)$$

де через  $O(1)$  позначено вирази, які не мають особливостей при  $r \rightarrow a$ .

Використовуючи визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (22), з (23) отримуємо для коефіцієнтів інтенсивності напружень такі вирази:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{1}{4} C_{44} s \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \left[ a^{-n} \int_0^a \tilde{\omega}(t) dt \right], \\ K_{II} &= \frac{1}{4} C_{44} s \frac{k}{k_1} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \left[ a^{-n+1} \left( \frac{\tilde{\varphi}(a)}{a} + a^{n-1} \psi(a) \right) \right], \\ K_{III} &= \frac{1}{4} C_{44} q \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta \left[ a^{-n+1} \left( \frac{\tilde{\varphi}(a)}{a} - a^{n-1} \psi(a) \right) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

або у безрозмірному вигляді

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{1}{4} C_{44} s \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 f_3(\eta) d\eta, \\ K_{II} &= \frac{1}{4} C_{44} s \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta [f_1(1) + f_2(1)], \\ K_{III} &= \frac{1}{4} C_{44} q \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta [f_1(1) - f_2(1)], \end{aligned} \quad (25)$$

де функції  $f_1(\eta)$ ,  $f_2(\eta)$ ,  $f_3(\eta)$  визначаються з розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (20).

Як видно з виразів для коефіцієнтів інтенсивності напружень (24), (25), взаємний вплив двох тріщин в нескінченному тілі призводить до якісних змін у асимптотичному розподілі напружень біля контура тріщин, а саме — до ненульових значень коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_{II}$  та  $K_{III}$  у випадку завантаження берегів тріщини нормальними зусиллями (для ізольованої тріщини нормального відриву в необмеженому тілі мали [1, 13]  $K_I \neq 0$ ,  $K_{II} = 0$ ,  $K_{III} = 0$ ). Крім того, з виразів (25) бачимо, що всі три коефіцієнти інтенсивності напружень залежать від початкових напружень, оскільки параметри  $C_{44}$ ,  $s$ ,  $q$ ,  $k$ ,  $k_i$ ,  $l_i$ ,  $n_i$ ,

$i = 1, 2$ , а також функції  $f_1, f_2, f_3$  залежать від параметра початкового подовження (або скорочення)  $\lambda_1$ , зумовленого дією початкових напружень  $S_{11}^0 = S_{22}^0$ .

Розглянемо випадок, коли відстань між тріщинами прямує до нескінченності  $h \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ). Аналізуючи вирази для ядер (21), приходимо до висновку, що  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} K_{ij}(\xi, \eta) = 0$ .

Тоді з (20) отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} + q \right) f_1^\infty(\xi) + \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} - q \right) f_2^\infty(\xi) &= 0, \\ \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} - q \right) f_1^\infty(\xi) + \frac{1}{2} \left( s \frac{k}{k_1} + q \right) f_2^\infty(\xi) &= 0, \\ \frac{1}{2} s \frac{k}{k_2} f_3^\infty(\xi) &= \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

де

$$f_i^\infty(\xi) \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_i(\xi).$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} f_1^\infty(\xi) &= 0, \quad f_2^\infty(\xi) = 0, \\ f_3^\infty(\xi) &= \frac{8}{\pi} \frac{k_2}{sk} \xi \int_0^\infty u'(\xi \sin \theta) d\theta = \frac{8}{\pi} \frac{1}{C_{44}} \frac{k_1}{sk} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta^{n+1} \sigma^{(n)}(a\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta, \end{aligned}$$

і з (24), (25) одержуємо

$$\begin{aligned} K_I^\infty &\equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} K_I = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n=0}^\infty \cos n\theta \int_0^1 \frac{\eta^{n+1} \sigma^{(n)}(a\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\cos n\theta}{a^n} \int_0^a \frac{t^{n+1} \sigma^{(n)}(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \\ K_{II}^\infty &= 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Вирази (27) повністю збігаються зі значеннями, отриманими в неосесиметричній задачі про тріщину нормального відриву в нескінченному матеріалі без початкових напружень [13, 14].

Таким чином, в роботі вперше в рамках лінеаризованої постановки досліджено загальну неосесиметричну задачу про напружено-деформований стан попередньо напруженого тіла з двома паралельними співвісними круговими тріщинами нормального відриву.

Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень та показано, що взаємний вплив двох тріщин в тілі з початковими напруженнями призводить до змін якісного та кількісного характеру в асимптотичному розподілі напружень в околі контурів тріщин порівняно з випадком однієї ізольованої тріщини в необмеженому попередньо напруженому тілі. Також показано, що початкові напруження, що діють вздовж площин розташування тріщин, впливають на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах контурів тріщин.

1. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 2).
2. Guz A. N. On non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 8. – P. 138–144.
3. Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer, 1999. – 555 p.
4. Гузь А. Н. К линеаризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
5. Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L. Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. and Appl. Fracture Mech. – 2007. – **48**. – P. 285–303.
6. Богданов В. Л. Напряженное состояние тела с периодической системой соосных круговых трещин при действии направленных вдоль них усилий // Прикл. проблемы механики і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 1–16.
7. Богданов В. Л. О разрушении материала с периодической системой соосных круговых трещин при действии направленных вдоль них начальных напряжений // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 53–59.
8. Богданов В. Л. Напряженное состояние упругого тела с двумя соосными круговыми трещинами нормального отрыва при действии начальных напряжений // Там само. – № 10. – С. 52–60.
9. Богданов В. Л. О кручении предварительно напряженного материала с двумя параллельными соосными трещинами // Там само. – № 11. – С. 59–66.
10. Bogdanov V. L. Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2008. – **15**, No 6. – P. 453–460.
11. Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М. Осесимметричная задача о разрушении тела с периодической системой соосных трещин под действием направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 3–18.
12. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
13. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff, 1975. – Vol. 2. – 452 p.
14. Саврук М. П. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пос. В 8 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Киев: Наук. думка, 1988. – 2005. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – 1988. – 620 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 17.12.2009

**V. L. Bogdanov**

### **A non-axisymmetric problem on two parallel coaxial mode I cracks in a material with initial stresses**

*A non-axisymmetric problem on the interaction of two parallel coaxial cracks of normal rupture in an infinite solid with initial stresses acting along cracks is investigated in the framework of the linearized theory of elasticity. The problem is reduced to systems of Fredholm's integral equations of the second kind by the use of representations of general solutions of the linearized equilibrium equations in terms of harmonic potential functions and the Fourier–Hankel integral transforms. The representations of stress intensity factors at the cracks' edges are obtained. New mechanical effects related to the influence of initial stresses and to the cracks' interaction are analyzed.*