

В. М. Сичко, А. В. Завгородний, М. И. Вертелецкий

Вынужденные резонансные изгибные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругой прямоугольной толстой плиты

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Наводиться постановка просторової задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної товстої прямокутної плити з шарнірно опертими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні і теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Задача розв'язується методом Фур'є і зводиться до крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язування цих систем пропонується використовувати ефективний метод дискретної ортогоналізації. Дається порівняння результатів розрахунків з використанням просторової постановки і класичної та уточненої теорій пластин.

Толстые плиты из неупругих материалов находят широкое применение во всех областях современной техники. Для моделирования их динамического поведения используются различные приближенные модели, основанные на гипотезах Тимошенко и их обобщениях. Для оценки пределов применимости указанных моделей необходимо иметь точные аналитические решения задачи в пространственной постановке. При изготовлении таких элементов конструкций из полимерных материалов и композитов на их основе необходимо учитывать их вязкоупругие свойства. При гармоническом механическом нагружении с частотой, близкой к резонансной, в элементе конструкции может наблюдаться существенное повышение температуры диссипативного разогрева, возникающей в результате гистерезисных потерь в материале. В работах [1–5] дается обзор основных достижений по термомеханике связанных полей в телах из неупругих материалов при моногармоническом механическом нагружении. Для решения этих задач, как правило, используют численные методы. В литературе отсутствуют точные решения о колебаниях и диссипативном разогреве тел пространственной конфигурации. Связано это с большими математическими трудностями при аналитическом решении такого класса задач.

В данной работе дана постановка задачи о резонансных колебаниях и диссипативном разогреве толстой прямоугольной плиты при ее нагружении гармоническим во времени поверхностным давлением с частотой, близкой к резонансной. Для описания неупругого механического поведения используется концепция комплексных характеристик, развитая в работе [1]. Считается, что торцы плиты шарнирно оперты. Это позволяет методом разделения переменных свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, для решения которой предлагается использовать эффективный численный метод дискретной ортогонализации [6], позволяющий получить числовые результаты с наперед заданной точностью. Предполагается, что характеристики вязкоупругого материала не зависят от температуры. Тогда задача распадается на несколько отдельных задач: 1) задачу о вынужденных резонансных колебаниях вязкоупругой толстой прямоугольной

плиты; 2) задачу расчета диссипативной функции; 3) задачу расчета температурного поля с известным источником тепла.

Для исследования вынужденных колебаний вязкоупругой прямоугольной толстой плиты используем уравнения, представленные в работе [7]. В этих уравнениях необходимо добавить силы инерции. Процедура разделения переменных подробно изложена в [7]. Выбирая в качестве разрешающих функций набор переменных $\tilde{\sigma}'_{zz}, \tilde{\sigma}''_{zz}, \tilde{\sigma}'_{xz}, \tilde{\sigma}''_{xz}, \tilde{\sigma}'_{yz}, \tilde{\sigma}''_{yz}, \tilde{U}'_x, \tilde{U}''_x, \tilde{U}'_y, \tilde{U}''_y, \tilde{U}'_z, \tilde{U}''_z$, для плиты из изотропного вязкоупругого материала можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерной действительной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{\sigma}'_{zz}}{d\bar{z}} = \lambda_m \tilde{\sigma}'_{xz} + \mu_n \tilde{\sigma}'_{yz} - \frac{\rho\omega^2 h^2}{G'} \tilde{U}'_z; \\ \frac{d\tilde{\sigma}''_{zz}}{d\bar{z}} = \lambda_m \tilde{\sigma}''_{xz} + \mu_n \tilde{\sigma}''_{yz} - \frac{\rho\omega^2 h^2}{G'} \tilde{U}''_z; \\ \frac{d\tilde{\sigma}'_{xz}}{d\bar{z}} = \left(\frac{2}{1-\nu} \lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) \left(\tilde{U}'_x - \frac{G''}{G'} \tilde{U}''_x \right) + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_m \mu_n \right) \left(\tilde{U}'_y - \frac{G''}{G'} \tilde{U}''_y \right) - \\ - \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_m \tilde{\sigma}'_z - \frac{\rho\omega^2 h^2}{G'} \tilde{U}'_x; \\ \frac{d\tilde{\sigma}''_{xz}}{d\bar{z}} = \left(\frac{2}{1-\nu} \lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) \left(\tilde{U}''_x + \frac{G''}{G'} \tilde{U}'_x \right) + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_m \mu_n \right) \left(\tilde{U}''_y + \frac{G''}{G'} \tilde{U}'_y \right) - \\ - \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_m \tilde{\sigma}''_z - \frac{\rho\omega^2 h^2}{G'} \tilde{U}''_x; \\ \frac{d\tilde{\sigma}'_{yz}}{d\bar{z}} = \left(\frac{2}{1-\nu} \lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) \left(\tilde{U}'_y - \frac{G''}{G'} \tilde{U}''_y \right) + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_m \mu_n \right) \left(\tilde{U}'_x - \frac{G''}{G'} \tilde{U}''_x \right) - \\ - \frac{\nu}{1-\nu} \mu_n \tilde{\sigma}'_z - \frac{\rho\omega^2 h^2}{G'} \tilde{U}'_y; \\ \frac{d\tilde{\sigma}''_{yz}}{d\bar{z}} = \left(\frac{2}{1-\nu} \lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) \left(\tilde{U}''_y + \frac{G''}{G'} \tilde{U}'_y \right) + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda_m \mu_n \right) \left(\tilde{U}''_x + \frac{G''}{G'} \tilde{U}'_x \right) - \\ - \frac{\nu}{1-\nu} \mu_n \tilde{\sigma}''_z - \frac{\rho\omega^2 h^2}{G'} \tilde{U}''_y; \\ \frac{d\tilde{U}'_x}{d\bar{z}} = \left(\tilde{\sigma}'_{xz} + \frac{G''}{G'} \tilde{\sigma}''_{xz} \right) \frac{1}{1 + (G''/G')^2} - \lambda_m \tilde{U}'_z; \\ \frac{d\tilde{U}''_x}{d\bar{z}} = \left(\tilde{\sigma}''_{xz} - \frac{G''}{G'} \tilde{\sigma}'_{xz} \right) \frac{1}{1 + (G''/G')^2} - \lambda_m \tilde{U}''_z; \\ \frac{d\tilde{U}'_y}{d\bar{z}} = \left(\tilde{\sigma}'_{yz} + \frac{G''}{G'} \tilde{\sigma}''_{yz} \right) \frac{1}{1 + (G''/G')^2} - \mu_n \tilde{U}'_z; \\ \frac{d\tilde{U}''_y}{d\bar{z}} = \left(\tilde{\sigma}''_{yz} - \frac{G''}{G'} \tilde{\sigma}'_{yz} \right) \frac{1}{1 + (G''/G')^2} - \mu_n \tilde{U}''_z; \\ \frac{d\tilde{U}'_z}{d\bar{z}} = \left(\tilde{\sigma}'_{zz} + \frac{G''}{G'} \tilde{\sigma}''_{zz} \right) \frac{1}{1 + (G''/G')^2} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_m \tilde{U}'_x + \mu_n \tilde{U}'_y); \\ \frac{d\tilde{U}''_z}{d\bar{z}} = \left(\tilde{\sigma}''_{zz} + \frac{G''}{G'} \tilde{\sigma}'_{zz} \right) \frac{1}{1 + (G''/G')^2} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_m \tilde{U}''_x + \mu_n \tilde{U}''_y). \end{array} \right. \quad (1)$$

Для вязкоупругого материала порядок разрешающей системы удваивается по сравнению с упругим материалом.

Здесь $()'$, $()''$ — действительные и мнимые составляющие соответствующих величин. Коэффициент Пуассона считается действительным.

Система (1) решается при следующих граничных условиях:

$$\tilde{\sigma}_{zx} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zy} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = -\tilde{P}_0 \quad (\varsigma = 1), \quad \tilde{P}_0 = \frac{P_0}{G}; \quad (2)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zy} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = 0 \quad (\varsigma = 0). \quad (3)$$

Если панель является многослойной, для каждого из слоев записываются уравнения типа (1), к которым, кроме условий (2), (3), добавляются обычные условия сопряжения на поверхностях раздела слоев.

Для расчета температуры диссипативного разогрева воспользуемся тем фактом, что при резонансных колебаниях в соответствующих рядах Фурье необходимо оставить только один член, отвечающий той или иной форме колебаний. Тогда диссипативная функция для этой формы принимает следующий вид:

$$D = \frac{\omega}{2} (\sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij}). \quad (4)$$

При этом уравнение энергии для изотропного материала запишется так:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} + \frac{c^2}{\lambda} D = 0. \quad (5)$$

Считается, что торцы плиты теплоизолированы, а на поверхностях $\bar{z} = 0$, $\bar{z} = 1$ имеют место условия конвективного теплообмена:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} + \frac{\alpha c}{\lambda} (\theta - \theta_c) &= 0 \quad (\bar{x} = 1), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} - \frac{\alpha c}{\lambda} (\theta - \theta_c) &= 0 \quad (\bar{x} = 0). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В окрестности резонанса диссипативная функция приобретает вид:

$$D = \frac{\omega}{2} [D_0(\bar{z}) + D_1(\bar{z}) \cos(2\mu_k c \bar{y}) + D_2(\bar{z}) \cos(2\lambda_n c \bar{x}) + D_3(\bar{z}) \cos(2\mu_k c \bar{y}) \cos(2\lambda_n c \bar{x})].$$

Тогда температура представляется в виде

$$\theta = [\theta_0(\bar{z}) + \theta_1(\bar{z}) \cos(2\mu_k c \bar{y}) + \theta_2(\bar{z}) \cos(2\lambda_n c \bar{x}) + \theta_3(\bar{z}) \cos(2\mu_k c \bar{y}) \cos(2\lambda_n c \bar{x})]. \quad (7)$$

После разделения переменных уравнение энергии дает:

$$\frac{d^2 \theta_0}{d\bar{z}^2} + \frac{\omega c^2}{2\lambda T_0} D_0(\bar{z}) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \theta_1}{d\bar{z}^2} - (2\mu_k c)^2 \theta_1 + \frac{\omega c^2}{2\lambda T_0} D_1(\bar{z}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{d\bar{z}^2} - (2\lambda_n c)^2 \theta_2 + \frac{\omega c^2}{2\lambda T_0} D_2(\bar{z}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta_3}{d\bar{z}^2} - (2\mu_k c)^2\theta_3 - (2\lambda_n c)^2\theta_3 + \frac{\omega c^2}{2\lambda T_0} D_3(\bar{z}) = 0. \quad (11)$$

Введя обозначения $d\theta_i/d\bar{z} = q_i$, запишем уравнения энергии и граничные условия

$$\frac{dq_i}{d\bar{z}} + \frac{\omega c^2}{2\lambda T_0} D_0(\bar{z}) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (12)$$

$$q_i + \frac{\alpha c}{\lambda}(\theta_i - \theta_c) = 0 \quad (\bar{z} = 1), \quad q_i - \frac{\alpha c}{\lambda}(\theta_i - \theta_c) = 0 \quad (\bar{z} = 0); \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (13)$$

Таким образом, для не зависящих от температуры свойств материала задача распалась на решение краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений о механических колебаниях прямоугольной плиты (2), (3) и решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений теплопроводности (12)–(13).

Получить аналитическое решение представленных краевых задач не представляется возможным. Для их решения предлагается использовать метод дискретной ортогонализации [6], дающий практически точные результаты.

В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях прямоугольной плиты из полиэтилена, механические свойства которой представлены в работе [8], а коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,18$ Вт/м² °С. Плита имеет следующие размеры: $a = 0,4$ м, $b = 0,11$ м, $h = 0,02$ м. На поверхностях плиты имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры $T = 20$ °С и коэффициентом теплообмена $\alpha = 25$ Вт/м² °С.

Для оценки влияния сдвиговых деформаций рассмотрим задачу о колебаниях пластины с использованием уточненной теории, представленной в [9]. Для изотропной пластины собственные частоты определяются по формуле

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \frac{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{1 + \frac{h^* L^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{h}}, \quad (14)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad h^* = \frac{1}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{L^2}.$$

Для расчета собственной частоты с использованием пространственной постановки задачи применялось решение задачи на вынужденные колебания. На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика, рассчитанная на основе метода дискретной ортогонализации. Она дает такое значение частоты собственных колебаний: $\omega_r = 8800(1/s)$.

Считая $G = G' + iG''$ и $G''/G' \ll 1$, из формулы (14) для действительного коэффициента Пуассона ν получим

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^0 (1 + i\eta), \quad (15)$$

где

$$\omega_{mn}^0 = \sqrt{\frac{2(1+\nu)G'}{\rho R^2} \left[\frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2 R^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}{1 + \frac{h^* L^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{h}} + \frac{\lambda_n^4}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right]}, \quad (16)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{G''}{G'}.$$

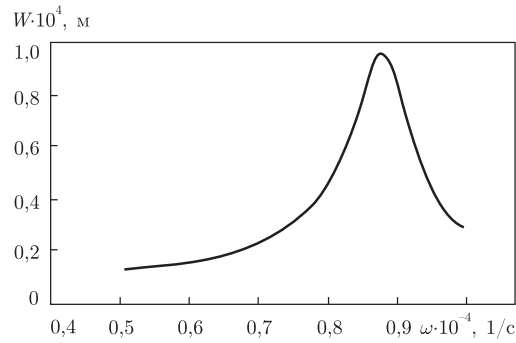


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика

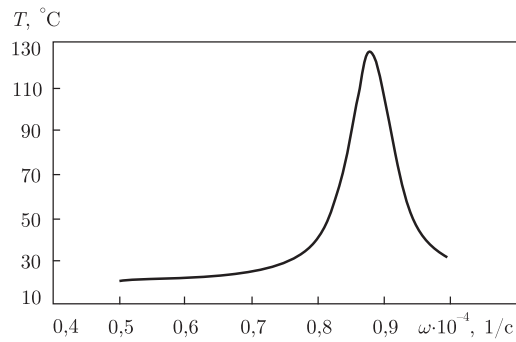


Рис. 2. Температурно-частотная характеристика

Подчеркнутый член учитывает влияние сдвиговых деформаций. Из (16) следует, что коэффициент демпфирования η определяется тангенсом угла потерь G''/G' и не зависит от номера моды колебаний, геометрических и механических параметров оболочки.

Температурно-частотная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 2.

1. Карнаузов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Изд-во ЖГТУ, 2005. – 428 с.
2. Карнаузов В. Г., Сенченко И. К. Обобщенные модели термомеханического поведения материалов с учетом взаимодействия механических и тепловых полей // Усп. механики: В 6-ти т. / Под ред. А. Н. Гузя. Т. 1. – Киев: А. С. К., 2005. – С. 45–68.
3. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // Там же. – С. 197–130.
4. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Там же. – Т. 2. – Киев: А. С. К., 2006. – С. 185–217.
5. Karnaukhov V. G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // J. of thermal stresses. – 2005. – **28**, No 6–7. – P. 783–815.
6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Киев: Вища шк., 1985. – 190 с.
8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
9. Свойства полимеров и нелинейная акустика. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 2. Ч. Б. – Москва: Мир, 1969. – 420 с.

Николаевский государственный университет
им. В. А. Сухомлинского

Поступило в редакцию 24.11.2009

Forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick-walled viscoelastic cylindrical plate

The formulation of a three-dimensional problem on forced resonance vibrations and the dissipative heating of a viscoelastic thick rectangular plate with simply supported edges is given. The nonelastic material behavior is described by a conception of complex characteristics. It is supposed that the mechanical and thermophysical material properties do not depend on the temperature. The problem is solved by the Fourier method and is reduced to boundary-value problems for the systems of the ordinary differential equations. These systems are solved by a method of discrete orthogonalization. The comparison of the results of calculations by the three-dimensional and classical plate theories is given.