УДК 519.85

И. А. Чуб, М. В. Новожилова

Конечный метод поиска глобального минимума задачи размещения прямоугольных объектов

(Представлено академиком НАН Украины И. В. Сергиенко)

Проведено дослідження оптимізаційної задачі розміщення прямокутних об'єктів у смузі, виділено нові властивості математичної моделі задачі та запропоновано модифікацію точного методу розв'язання задачі, заснованого на методі гілок та меж, що дозволяє поліпшити теоретичну та емпіричну оцінки обчислювальної складності алгоритму.

Постановка задачи. Многие практические оптимизационные задачи управления ресурсами, размещения и упаковки [1–3], размещения источников физических полей сводятся к задаче размещения конечного набора прямоугольных геометрических объектов в прямоугольной области размещения. Данная задача представляет теоретический и практический интерес, о чем свидетельствует растущее число публикаций [4, 5]. По своей постановке она относится к классу многомерных многоэкстремальных задач дискретной оптимизации и является NP-полной.

Для рассматриваемой задачи размещения разработаны методы определения глобального минимума функции цели задачи [3, 6], использующие схему метода ветвей и границ и методы поиска локального минимума функции цели задачи, основанные на применении метода последовательно-одиночного размещения [1], метода вектора спада [7], поиска с запретами, метода отжига и их комбинаций [8].

Ниже выделены новые свойства математической модели задачи, на основании чего построена эффективная модификация точного метода решения задачи и улучшена оценка вычислительной сложности алгоритма решения.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу геометрического проектирования [1]. Пусть есть конечный набор $R = \{R_i\}$, $i = \overline{1, N}$, прямоугольников, заданных в арифметическом эвклидовом пространстве E^2, и полубесконечная полоса $R_0 = \{(x, y) \in E^2 \mid x \in [0, Z), y \in [0, W], W = \text{const}, Z = \text{var}\}$. Над множеством $R = \{R_i\}$, $i = \overline{1, N}$, допустимы только преобразования трансляции. Для каждого объекта R_i известны его метрические характеристики (a_i, b_i). Положение R_i в R_0 задается вектором параметров размещения $u_i = (x_i, y_i)$, который определяет начало его собственной системы координат $X_iO_iY_i$, совмещенное с левой нижней вершиной R_i.

Задача. Разместить N объектов без взаимных наложений в полосе R_0, так, чтобы длина занятой части полосы Z была минимальной.

Математическая модель задачи размещения имеет вид:

найти

$$u^* = \arg\min_{u \in D \subset E^{2N+1}} Z\,, \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N, Z) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_N, y_N, Z)$, $D = D^I \bigcap D^{II}$ — множество допустимых решений задачи.

Подобласть D^I, сформированная условиями размещения набора объектов R в R_0, описывается системой $F_0(u) \leqslant 0$ линейных неравенств вида

$$F_0(u) := \{f_{0i}^h(u_i)\}, \qquad h = 1, \ldots, 4; \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

где $f_{0i}^1(u_i) = x_i - Z + a_i$, $f_{0i}^2(u_i) = y_i - W + b_i$, $f_{0i}^3(u_i) = -x_i$, $f_{0i}^4(u_i) = -y_i$.

Подобласть D^{II}, определяемая условиями взаимного попарного непересечения объектов R_i и R_j, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $i \neq j$, задается системой $F(u)$ наборов $F_{ij}(u_i, u_j) \leqslant 0$ линейных неравенств вида

$$F_{ij}(u_i, u_j) \leqslant 0 := \langle f_{ij}^k(u_i, u_j) \leqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, 4; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N, \qquad i \neq j, \tag{3}$$

где

$$f_{ij}^1(u_i, u_j) = x_j - x_i + a_j, \qquad f_{ij}^2(u_i, u_j) = x_i - x_j + a_i, \tag{4}$$

$$f_{ij}^3(u_i, u_j) = y_j - y_i + b_j, \qquad f_{ij}^4(u_i, u_j) = y_i - y_j + b_i. \tag{5}$$

Количество M ограничений задачи (1)–(3) составляет $2N(2 + (N - 1)/2)$. Далее будем использовать обозначение вектора u для соответствующей ему точки в пространстве E^{2N+1}.

Известны [1, 3] такие свойства задачи (1)–(3).

Свойство 1. Многогранная область D является несвязным замкнутым и при $N > 1$ невыпуклым точечным множеством с кусочно-линейной границей. Компоненты связности области допустимых решений D невыпуклые, в общем случае многосвязные множества.

Свойство 2. Глобальный минимум Z^* функции цели достигается в вершине u^* области допустимых решений D, которая задается системой $(2N+1)$ линейных уравнений $\Im^*(u) = 0$, т. е. набором $\Im^*(u)$ активных [9] в точке u^* ограничений систем (2), (3).

Свойство 3. Область D может быть представлена в виде

$$D = \bigcup_{q=1}^{Q} D_q, \tag{6}$$

где $D_q \subset E^{2N+1}$ — многогранное выпуклое множество с кусочно-постоянной границей; $Q = 4^T$, $T = N(N - 1)/2$.

При этом область D_q описывается системой $F_0(u) \leqslant 0$ неравенств вида (2) и неравенств вида (4) — по одному из каждого набора неравенств вида (3) для каждой пары объектов.

Свойство 4. Покрытие (6) не является разбиением, поэтому для некоторых точек u области D имеет место такое соотношение:

$$u \in D_{Q_1} = \bigcap_{q=1}^{Q_1} D_q, \qquad Q_1 < Q. \tag{7}$$

Свойство 5. В силу выделенных особенностей функции цели и области допустимых решений решение задачи (1)–(3) может быть сведено к решению 4^T задач линейного программирования вида

$$u^* = \arg\min_{u \in D_q \subset D} Z, \tag{8}$$

$$D_q\colon \begin{cases} F_0(u) \leqslant 0, \\ f_{ij}^k(u_i, u_j) \leqslant 0, \quad k \in \{1, \ldots, 4\}, \quad i, j \in \{1, \ldots, N\}, \quad i \neq j. \end{cases} \tag{9}$$

Свойства 1, 2 (и 5) обусловили применение методов дискретной оптимизации для определения экстремума функции цели (8) следующих модификаций.

В [6] предложено дерево решений A^1 для формирования и перебора подмножеств D_q, т.е. систем неравенств вида (9). Уровни дерева A^1 упорядочены таким образом:

$$P = (p_1, p_2, p_h, \ldots, p_T) = (\{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{1,N\}, \{2,3\}, \ldots, \{2,N\}, \{3,4\}, \ldots, \{N-1,N\}),$$

где в фигурных скобках указаны номера объектов размещения, условия непересечения которых рассматриваются на уровне $h = 1, 2, \ldots, T$ дерева A^1, отвечающем порядковому номеру компоненты p_h. Корень дерева A_0^1 соответствует системе $F_0(u) \leqslant 0$ из (2).

В [3] предложено дерево решений A^2 для задачи (1), (2), с помощью которого осуществляется формирование и перебор всевозможных систем $\Im(u) = 0$ линейных уравнений — множества активных ограничений, в результате чего определяется система $\Im^*(u) = 0$. Дерево решений A^2 имеет $2N$ уровней — по числу параметров размещения объектов. На каждом уровне дерева решений к системе уравнений, сформированной на вершине дерева решений более высокого уровня, добавляется уравнение, содержащее независимую переменную задачи (1)–(3) с ненулевым коэффициентом. Последний уровень дерева A^2 содержит $2N^{2N}$ вершин, соответствующих системам $\Im_{\text{fin}}(u) = 0$, состоящим из $2N$ уравнений. При этом $Z = \max\limits_{i=1,2\ldots,N}(x_i + a_i)$.

Отметим, что дерево решений A^1 в силу свойства 3 содержит значительное число вершин, на которых формируются подобласти, имеющие одну и ту же оптимальную вершину u^*, т.е. система $\Im^*(u) = 0$ переопределена. Аналогично, дерево решений A^2 содержит множество вершин, определяющих системы уравнений $\Im(u) = 0$, решения которых (точки области D) совпадают. Кроме того, на вершинах дерева решений A^1 формируются системы неравенств, определяющие внутренние подобласти $D_q \subset \operatorname{int} D$ области допустимых решений D. При этом как вершины дерева A^1, так и вершины дерева A^2 могут порождать несовместные системы неравенств (уравнений).

Рассмотрим следующие дополнительные особенности математической модели (1)–(3) и области допустимых решений D.

1. Благодаря невыпуклости области D системы линейных уравнений $\Im^*(u) = 0$ могут описывать вершины области D, граничные точки области D, внутренние точки области D, даже если это вершины некоторой подобласти D_q. Кроме того, система $\Im(u) = 0$ может задавать точки $u^{\text{out}} \notin D$ и вообще быть несовместной. Более того, на промежуточных уровнях дерева A^2 система $\Im(u) = 0$ может определять линейные многообразия размерности больше 0 — прямые, плоскости, гиперплоскости, т.е. ребра и грани области D. Обозначим $V^D = \{u_1^V, u_2^V, \ldots, u_{N_v}^V\}$ — множество вершин области D, $O^D = \{u_1^{\text{out}}, u_2^{\text{out}}, \ldots, u_{N_O}^{\text{out}}\}$ — множество точек вне области D, $I^D = \{u_1^{\text{int}}, u_2^{\text{int}}, \ldots, u_{N_I}^{\text{int}}\}$ — множество внутренних точек области D, описываемых системами $\Im(u) = 0$, $|I^D| = N_I$, $|V^D| = N_V$, $|O^D| = N_O$. При этом для дальнейшего рассмотрения представляют интерес только граничные точки области D, а среди них — множество V^D.

Утверждение 1. *На системе $\Im^*(u) = 0$, которая задает оптимальное решение u^*, имеет место биекция Ψ вида*

$$x_i \overset{\Psi}{\leftrightarrow} \Im_k^* = 0, \qquad \Im_k^* \ni \{-x_i + x_l + a_l = 0; -x_i = 0\}, \tag{10}$$

$$y_i \overset{\Psi}{\leftrightarrow} \Im_k^* = 0, \qquad \Im_k^* \ni \{-y_i + y_l + b_l = 0; -y_i = 0\}, \tag{11}$$

$$Z \overset{\Psi}{\leftrightarrow} \Im_k^* = 0, \qquad \Im_k^* = -Z + x_l + a_l, \tag{12}$$

$$k \in \{1, 2, \ldots, 2N+1\}, \qquad l \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Выполнение условий утверждения 1 означает, что каждой компоненте — независимой переменной задачи (1)–(3) — оптимального решения u^* можно поставить в соответствие уравнение системы $\Im^*(u) = 0$, которое содержит эту переменную со знаком "$-$".

Доказательство первой части утверждения 1 проведем от противного. Пусть формула (9) неверна. Тогда существует ненулевой шаг α в любом направлении p, удовлетворяющий данное ограничение, т. е. оставляющий точку $(u_i + \alpha p)$ в области D. Так как функция цели $Z = \max\limits_{i=1,2\ldots,N}(x_i + a_i)$, это допустимое перемещение может привести к уменьшению значения Z, т. е. такая система $\Im^*(u) = 0$ не определяет в общем случае оптимальную точку, что противоречит условию утверждения.

Доказательство второй части утверждения 1 (формула (10)) опирается на тот факт, что движение вдоль удерживающих направлений вида $y_l - y_i + b_l = 0$ или $y_i - y_l + b_i = 0$ не приведет к изменению функции цели, так как проводится в гиперплоскости, ортогональной нормали функции цели.

Третья часть утверждения 1 (формула (11)) очевидна.

Следствие 1. *Для перебора множества систем уравнений, содержащих $\Im^*(u) = 0$, достаточно на каждом i-м уровне дерева решений A^2 рассматривать вдвое меньше вершин.*

Аналогичное свойство имеет место для процесса перебора вершин $A^1_{k_h}$, $k = 1, 2, \ldots, 4$, каждого h-го уровня дерева решений A^1.

Утверждение 2. *Ограничения системы $\Im^*(u) = 0$ таковы, что если активным является η-е ограничение $f^\eta_{ij}(u_i, u_j) = 0$, $\eta \in \{1, \ldots, 4\}$ из набора* (3), *то $f^k_{ij}(u_i, u_j) \geqslant 0$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, $k \neq \eta$; $i, j = 1, 2, \ldots N$, $i \neq j$.*

Доказательство. Если при $f^\eta_{ij}(u_i, u_j) = 0$, $\eta \in \{1, \ldots, 4\}$, $\exists k \in \{1, \ldots, 4\}$, $k \neq \eta$, такой, что $f^k_{ij}(u_i, u_j) < 0$, то возможны два случая. Случай 1: вектор u определяет точку на границе области D (быть может, внутреннюю точку), но не вершину, т. е. возможен ненулевой шаг α в направлении уменьшения (если функция $f^k_{ij}(u_i, u_j)$ имеет вид (4)) или невозрастания (функция $f^k_{ij}(u_i, u_j)$ имеет вид (5)), вводящий данное ограничение в список активных вместо $f^\eta_{ij}(u_i, u_j) = 0$. Случай 2: шаг α равен 0, следовательно, вектор u определяет вырожденную вершину области D, т. е. вершину, в которой имеет место ограничение вида $f^c_{mj}(u_m, u_j) = 0$ или $f^c_{it}(u_i, u_t) = 0$, $t, m, j = 1, 2, \ldots, N$, $t \neq m \neq j$, $c \in \{1, \ldots, 4\}$. После конечного числа просмотров (всего не более $(N-1)$) разных систем уравнений либо придем к случаю 1, либо определим систему уравнений, соответствующую формулировке утверждения.

Обозначим $D^h \supset D$ область, сформированную частью ограничений вида (2)–(3), известных к уровню h, в том числе всеми ограничениями вида (2), $D^h \subset D^I$.

Очевидно, $V^{D^h} \bigcap O^D \neq \varnothing$.

Утверждение 3. *Если $u \in I^{D^h}$, то $u \in I^D$.*

Доказательство непосредственно следует из блочного вида матрицы коэффициентов набора ограничений набора (3).

Рассмотрим модификацию схемы точного метода решения задачи (1)–(3), состоящую в организации немотононного конечного процесса оптимизации по дереву решений A^2 вида

$\Im_h(u) = 0 \to \Im_{h+1}(u) = 0$, $h = 0, 1, 2, \ldots, 2N$, где система $\Im_0(u) = 0$ содержит ограничения вида $f^3_{0i}(x_i) = 0$, $f^4_{0i}(y_i) = 0$, система $\Im_{h+1}(u) = 0$ четного $2i$-го и нечетного $(2i+1)$-го уровня имеют, соответственно, вид:

$$\begin{aligned} &\Im_{h+1}(u) = \{\Im_h(u)/f^4_{0i}(y_i) \wedge f^4_{ij}(y_i, y_j)\}, \\ &\Im_{h+1}(u) = \{\Im_h(u)/f^3_{0i}(x_i) \wedge f^3_{ij}(x_i, x_j)\}, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{13}$$

Другими словами, по дереву решений из недопустимой начальной точки $u^0_{\text{out}} \notin D$, которая описывается системой уравнений $\Im_0(u) = 0$, по дереву A^2 осуществляется переход к некоторой граничной точке области $u^h \in D^h$, причем в общем случае $u^h \notin D$. При этом система $\Im_0(u) = 0$ сгенерирована в результате прохода "сверху-вниз" по самой левой ветви дерева решений.

Отметим важный факт. В соответствии с идеологией формирования дерева решений на каждом шаге алгоритма известно, какое именно ограничение становится активным, а на основе утверждения 1 всегда известно ограничение $\Im_0(u) = 0$, подлежащее замене на $(h + 1)$-м уровне дерева решений.

Добавление каждого нового ограничения: $f^4_{ij}(y_i, y_j) = 0$ или $f^3_{ij}(x_i, x_j) = 0$ из набора ограничений (3) по дереву решений A^2 означает выполнение условия касания пары (R_i, R_j) объектов размещения соответственно, т. е. пошаговое приближение к границе области D.

Для поддержки процесса решения разработан набор правил отсечения (помимо стандартных), позволяющий удовлетворить условие $u \in V^D$.

Правило 1. Пусть текущей является вершина $A^2_{k_h}$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $k \neq \mu$, $\mu = (h+1)/2$ дерева A^2, на которой построена система активных ограничений $\Im_h(u^h) = 0$, определяющая некоторый вектор u^h параметров размещения объектов.

Если $F_0(u^h) \geqslant 0$, причем величина Z имеет значение текущего рекорда, то вершина $A^2_{k_h}$ является концевой.

Правило 2 (проактивное отсечение). Пусть текущей является вершина $A^2_{k_h}$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, где $k \neq \mu$, $\mu = (h+1)/2$ нечетного уровня h дерева A^2, на которой построена система активных ограничений $\Im_h(u) = 0$. При этом $k > \mu$.

Тогда вершины $A^2_{k_{h+1}}$, $A^2_{\mu_{2k-1}}$, $A^2_{\mu_{2k}}$ дерева A^2 исключаются из рассмотрения.

Правило 3 (отсечение внутренних точек). Пусть текущей является вершина $A^2_{k_h}$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $k \neq \mu$, $\mu = h/2$, четного уровня h дерева A^2, на которой построена система активных ограничений $\Im_h(u) = 0$. Если найдется неравенство вида $f^r_{\xi\mu}(u_\xi, u_\mu) \leqslant 0$, $r \in \{1, \ldots, 4\}$, где ξ — номер вершины на предыдущем уровне, то вершина $A^2_{k_h}$ является концевой.

Результаты численных экспериментов. Данный подход был реализован на Object Pascal 6.0 в среде Delphi. Рассматривалось множество задач размещения различных наборов прямоугольников ($N \leqslant 10$) с различными метрическими характеристиками. Время решения менее 1 мин. Усредненные результаты сведены в табл. 1. При этом N_{all} — общее число просмотренных вершин дерева решений A^2; N_{UN} — количество несовместных систем (такие вершины дерева считались концевыми); N_{opt} — номер первой вершины дерева решений, соответствующей оптимальной системе уравнений $\Im^*(u) = 0$. Отметим, что приведенная статистика представляет теоретический интерес, так как, во-первых, учитывались вершины промежуточных уровней дерева A^1, а во-вторых, рассматривались задачи без учета ограничений вида $f^1_{0i}(u_i) \leqslant 0$, $f^2_{0i}(u_i) \leqslant 0$, т. е. по сути проводился полный перебор вершин дерева решений.

Таблица 1

N	N_{all}	N_I (%)	N_O	N_{UN}	N_V	N_{opt}
3	80	32 (∼38%)	19	4	16	7
4	2391	1670 (∼70%)	383	167	191	233
5	102800	83500 (∼80%)	11200	6900	1200	980
8	$7 \cdot 10^{16}$	$6,12 \cdot 10^{16}$ (∼86%)	$1,08 \cdot 10^{16}$	73950	9100	43000

Таким образом, в работе проведен анализ структуры области допустимых решений задачи размещения прямоугольников, выделены дополнительные особенности, на основе которых разработана модификация точного метода решения задачи, состоящая в осуществлении обхода дерева решений, обеспечивающего пошаговый переход из точки вне области допустимых решений области в граничную точку области (вершину) с последующим усеченным перебором вершин области. Предложенная модификация позволяет существенно сократить число просматриваемых элементов области допустимых решений задачи.

1. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. *Чуб И. А., Новожилова М. В., Иванилов А. С.* Решение задачи распределения ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками // Пробл. машиностроения. – 2010. – **4**, № 1–2. – С. 79–84.
3. *Stoyan Yu. G., Novozhilova M. V.* Non-guillotine placement or rectangles into a strip of given width // Pesquisa Operacional. – 1999. – **19**, No 2.
4. *Wascher G., Haußner H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // Europ. J. of Operational Research. – 2007. – **183**. – P. 1109–1130.
5. *Carlier J., Clautiaux F., Moukrim A.* New reduction procedures and lower bounds for the two-dimensional bin packing problem with fixed orientation // Computers & Operations Research. – 2007. – **34(8)**. – P. 2223–2250.
6. *Магас С. А.* Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов в полосе: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1984. – 20 с.
7. *Сергієнко І. В.* Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності. – Київ: Академперіодика, 2010. – 318 с.
8. *Сергиенко И. В., Шило В. П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 262 с.
9. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. – Москва: Мир, 1985. – 252 с.

Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков

Поступило в редакцию 01.04.2011

I. A. Chub, M. V. Novozhilova

A finite method of searching for the global minimum of the rectangular packing problem

We study the optimization rectangular packing problem for a strip. The new properties of a mathematical model of the problem are considered. On this base, a modification of the exact solution method based on the branch-and-bound method, which allows one to improve the theoretical and empirical estimations of the algorithm computing complexity, has been proposed.