УДК 519.214.6

О. В. Маринич

Про асимптотичну поведінку моментів випадкових рекурсивних послідовностей

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. І. Портенком)

Запропоновано новий метод дослідження асимптотичної поведінки моментів лінійних випадкових рекурсивних послідовностей, який базується на техніці ітеративних функцій. За допомогою цього методу показано, що моменти числа зіткнень та моменти часу поглинання в коалесценті Пуассона–Діріхле асимптотично зростають як степені функції $\ln^*(\cdot)$*, яка зростає повільніше за будь-яку ітерацію логарифму, та доведено слабкі закони великих чисел для вказаних функціоналів.*

Лінійною випадковою рекурсивною послідовністю називається послідовність випадкових величин $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, маргінальні розподіли якої задовольняють рівність розподілів

$$X_1 = a \geqslant 0, \qquad X_n \overset{d}{=} V_n + \sum_{r=1}^{K} A_r(n) X^{(r)}_{I^n_{(r)}}, \qquad n \geqslant 2. \tag{1}$$

У цій рівності розподілів $K \geqslant 1$ — фіксоване натуральне число, випадкові величини (індекси) $I^n_{(r)}$ набувають значень з множини $\{1, \ldots, n\}$, для кожного $r = 1, \ldots, K$ послідовність $\{X^{(r)}_k, k \in \mathbb{N}\}$ є незалежною копією $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, $V_n \geqslant 0$ — випадковий неоднорідний член, $A_r(n) > 0$ — випадкові вагові множники. Припускається, що послідовності $\{(I^n_{(1)}, \ldots, I^n_{(K)}, A_1(n), \ldots, A_K(n), V_n), n \in \mathbb{N}\}$ та $\{X^{(1)}_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\ldots$, $\{X^{(K)}_n, n \in \mathbb{N}\}$ є незалежними.

Першим кроком у дослідженні асимптотичної поведінки випадкової рекурсивної послідовності (1) є знаходження асимптотичної поведінки моментів $\mathbb{E}X^k_n$ та центральних моментів $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k$ при $n \to \infty$. Ця задача зводиться до вивчення звичайного рекурентного співвідношення вигляду

$$a_1 = \widehat{a}, \qquad a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} a_k, \qquad n \geqslant 2, \tag{2}$$

де $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ та $\{c_{nk}, n \geqslant 2, k < n\}$ є заданими числовими послідовностями.

Асимптотичний аналіз рекурсії (2) є складною аналітичною задачею, проте існують деякі загальні методи. Найпопулярнішими є: *метод сингулярного аналізу твірних функцій* [1, 2], *репертуарний метод* [3] та метод, який базується на гармонічному аналізі та теорії потенціалу [4].

Метод, описаний в даній роботі, спочатку був запропонований для розв'язку задачі про моменти числа зіткнень X_n та часу поглинання T_n у коалесценті Пуассона–Діріхле. Ця задача була поставлена на початку 2008 р. M. Möhle. Використовуючи запропонований метод, ми доведемо, що послідовності $\mathbb{E}X^k_n$ та $\mathbb{E}T^k_n$ асимптотично еквівалентні степеням функції “лог-зірочка”, яка зростає повільніше за будь-яку ітерацію логарифма. Така екзотична поведінка моментів частково пояснює, чому для розв'язку цієї задачі застосування відомих методів не дало результатів. Докладна інформація про коалесцент Пуассона–Діріхле викладена в роботі [5].

Доведення основних результатів не наводиться, їх можна знайти в [6].

У роботі використано такі позначення: $g^{\circ(0)}(x) := x$, $g^{\circ(k)}(x) := g(g^{\circ(k-1)}(x))$, $k \geqslant 1$; $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ означає $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to x_0$.

1. Ітеративні функції.

Означення 1. Нехай $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є зростаючою необмеженою неперервною функцією, яка задовольняє умову:

(A) Для деякого $x_0 > 0$ та довільного $x_1 > x_0$ існує $\varepsilon_{x_1} > 0$ таке, що $x - g(x) > \varepsilon_{x_1}$ для всіх $x \in (x_0, x_1)$.

Припустимо, що функції $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ та $k\colon [0, x_0] \to \mathbb{R}$ є неперервними на області задання. Визначимо функцію $g^*\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таким чином:

$$g^*(x) = \sum_{i=1}^{m_0(x)} h(g^{\circ(i-1)}(x)) + k(g^{\circ(m_0(x))}(x)), \tag{3}$$

де $m_0(x) := \inf\{k \geqslant 0\colon g^{\circ(k)}(x) \leqslant x_0\}$. Функція g^* називається *ітеративною функцією, породженою четвіркою* (h, g, x_0, k), та позначається $g^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$.

Зауваження 1. З означення випливає, що g^* задовольняє функціональне рівняння

$$g^*(x) = h(x) + g^*(g(x)), \qquad x > x_0, \tag{4}$$

з початковою умовою $g^*(x) = k(x)$, $x \leqslant x_0$.

П р и к л а д 1. Нехай $h(x) \equiv 1$, $g(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $k(x) \equiv 0$. Тоді $g^*(x) = 1 + g^*(\ln x)$, $x > 1$, або $g^*(x) = \ln^* x$ (*“лог-зірочка”*) — найвідоміша нетривіальна ітеративна функція.

Введемо відношення еквівалентності $\approx$ на множині ітеративних функцій за правилом

$$g_1^* \approx g_2^* \Longleftrightarrow g_1^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k_1), \qquad g_2^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k_2).$$

Це відношення породжує розбиття множини ітеративних функцій на класи еквівалентності.

Означення 2. Клас еквівалентності $\mathcal{F} := \{F = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k), k \in C[0, x_0]\}$ називається *ітеративною функцією, породженою трійкою* (h, g, x_0). Якщо це не викликатиме неоднозначності, ми називатимемо *ітеративною функцією, породженою трійкою* (h, g, x_0), довільний елемент класу.

Оскільки $|g_1^*(x) - g_2^*(x)|$ є обмеженою величиною на $\mathbb{R}^+$ для довільних функцій $g_1^*, g_2^* \in \mathcal{F}$, то всі функції з одного класу еквівалентності є асимптотично еквівалентними (якщо вони розбігаються до $+\infty$).

Означення 3. *m-раз диференційовною модифікацією* ітеративної функції g^* називається довільна ітеративна функція $\widehat{g}^*$ така, що $\widehat{g}^* \approx g^*$ та $\widehat{g}^* \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$.

З наведеного вище випливає, що за рахунок вибору $k(\cdot)$ функцію $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ можна зробити достатньо гладкою. Формальний результат наведено нижче. Для набору функцій $f_1, \ldots, f_n$ позначимо $W(f_1, \ldots, f_n)$ їх визначник Вронського.

Теорема 1. *Нехай* g, $h \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$ *та*

$$W(x^i - g^i(x),\ i = 0, \ldots, m+1)(x_0) \neq 0.$$

Тоді існує функція k вигляду $k(x) = \sum\limits_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i$ така, що ітеративна функція породжена четвіркою (h, g, x_0, k), є m-раз диференційовною на $[x_0, +\infty)$.

2. Асимптотична поведінка рекурсії (2). При дослідженні рекурсії (2), не зменшуючи загальності, можна вважати, що для довільного $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} = 1 \quad \text{та} \quad c_{nk} \geqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1 \tag{5}$$

(див., напр., [4, с. 9]). В подальшому ми називатимемо рекурсію (2), яка задовольняє (5), *рекурсією, зведеною до ймовірностей.* Якщо (5) виконується, позначимо через I_n випадкову величину з розподілом

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = c_{nk}, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Теорема 2. *Припустимо, що $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ та $\{a'_n, n \in \mathbb{N}\}$ задовольняють рекурсії, зведені до ймовірностей*

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a_k, \qquad n \geqslant N, \qquad a'_n = b'_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a'_k, \qquad n \geqslant N,$$

відповідно. Припустимо, що $b_n \geqslant 0$ для $n \geqslant N$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Тоді:

1) з $b'_n \sim b_n$, $n \to \infty$ випливає $a'_n \sim a_n$, $n \to \infty$;

2) з $b'_n = o(b_n)$, $n \to \infty$ випливає $a'_n = o(a_n)$, $n \to \infty$.

Теорема 3. *Припустимо, що послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє рекурсію (2), зведену до ймовірностей. Нехай $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — неперервна зростаюча та необмежена функція така, що $g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n)$, $n \to \infty$, та $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — неперервна функція така, що $h(n) = b_n$, $n \geqslant 2$. Якщо*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

б) $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, $n \to \infty$,

де g^* — ітеративна функція, породжена трійкою (h, g, x_0) (з підхожим x_0), то мають місце такі імплікації:

$$\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) = o(h(n)), \qquad n \to \infty \Longrightarrow \qquad a_n \sim g^*(n), \qquad n \to \infty, \tag{6}$$

$$\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n), \qquad n \to \infty, \quad \text{для деякого} \quad d < 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a_n \sim (1-d)^{-1} g^*(n), \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

Нижченаведена теорема описує асимптотичну поведінку (2) за деяких припущень на моменти індексу I_n.

Теорема 4. *Припустимо, що $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє рекурсію (2), зведену до ймовірностей. Нехай $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є двічі диференційовною, зростаючою та необмеженою функцією такою, що $g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n)$, $n \to \infty$, та $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є двічі диференційовною функцією такою, що $h(n) = b_n$, $n \geqslant 2$. Якщо виконуються умови:*

(C1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

(C2) існує неперервна функція k така, що ітеративна функція F, породжена четвіркою (h, g, x_0, k), є двічі диференційовною;

(C3) $F(\mathbb{E}I_n) - F(g(n)) = o(h(n)),\ n \to \infty$*;*

(C4) існує $M > 0$ *таке, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{D}I_n \leqslant M\mathbb{E}I_n$*;*

(C5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\geqslant \mathbb{E}I_n/2} |F''(x)| \dfrac{\operatorname{Var} I_n}{h(n)} = 0$*;*

(C6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sup\limits_{1\leqslant x\leqslant n} |F(x)|}{h(n)\operatorname{Var} I_n} = 0$*;*

(C7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F'(\mathbb{E}I_n)}{h(n)} = 0$*,*

то $a_n \sim F(n),\ n \to \infty$*.*

Зауваження 2. Функція g в умовах теорем 3, 4 визначається неоднозначно та може бути обрана так, що умова (C3) завжди виконується.

3. Коалесцент Пуассона–Діріхле. Нехай X_n — число зіткнень у звуженому коалесценті Пуассона–Діріхле з параметром $\theta > 0$, доки не залишиться єдиний блок. Послідовність X_n задовольняє випадкову лінійну рекурсію

$$X_1 = 0, \qquad X_n \stackrel{d}{=} 1 + X'_{J_n}, \qquad n \geqslant 2, \tag{8}$$

де J_n має розподіл

$$\mathbb{P}\{J_n = k\} = \frac{\theta^k}{[\theta]_n - \theta^n} s(n,k), \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{9}$$

де $\{X'_n : n \geqslant 1\}$ — незалежна копія $\{X_n : n \geqslant 1\}$, а $s(n,k)$ — абсолютні (беззнакові) числа Стірлінга першого роду.

Час поглинання T_n у коалесценті Пуассона–Діріхле задовольняє випадкову лінійну рекурсію

$$T_1 = 0, \qquad T_n \stackrel{d}{=} V_n + T'_{J_n}, \qquad n \geqslant 2, \tag{10}$$

де V_n має показниковий розподіл з параметром $1 - \theta^n/[\theta]_n$ і не залежить від $\{T'_n : n \geqslant 1\}$ — незалежної копії $\{T_n : n \geqslant 1\}$.

Моменти випадкових величин X_n або T_n мають таку асимптотичну поведінку:

Теорема 5. *При* $n \to \infty$ *для довільного* $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mathbb{E}Y_n^k}{(\ln^*_\theta(n))^k} \to 1,$$

де Y_n *— будь-яка з випадкових величин* X_n *та* T_n*, а функція* $x \mapsto \ln^*_\theta(x)$ *визначається функціональним рівнянням* $\ln^*_\theta(x) = (1 + \ln^*_\theta(\theta \ln x))1_{\{x > e^{2\theta\vee 1}\}}$*. Функція* $\ln^*_\theta(x)$ *монотонно зростає, є необмеженою та росте повільніше за будь-яку ітерацію логарифма.*

З теореми 5 та нерівності Чебишова випливає слабкий закон великих чисел.

Наслідок 1. *При* $n \to \infty$ $\dfrac{X_n}{\ln^*_\theta(n)} \xrightarrow{P} 1$ *та* $\dfrac{T_n}{\ln^*_\theta(n)} \xrightarrow{P} 1$.

Схема доведення теореми 5. З формули (9) випливає, що

$$\mathbb{E}J_n = \theta \ln n + O(1), \qquad \mathbb{D}J_n = \theta \ln n + O(1).$$

Покладемо $g(x) := \theta \ln x$, $h(x) := 1$ та $g^*(x) = \operatorname{Iter}(h, g, x_0)$ для деякого фіксованого $x_0 > \exp(2\theta \vee 1)$. Такий вибір числа x_0 гарантує виконання умови (A). Функція g^* задовольняє функціональне рівняння $g^*(x) = 1 + g^*(\theta \ln x)$, $x > x_0$. Нехай F — це двічі диференційовна модифікація функції g^* вигляду

$$F(x) = \begin{cases} 1 + F(\theta \ln x), & x > x_0, \\ \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x, & x \in [0, x_0], \end{cases}$$

для деяких α_1, α_2, α_3. З цього випливає, що для довільного $j \in \mathbb{N}$

$$F'(x) = o\left(\frac{1}{x \ln x \cdots \ln^{\circ(j)}(x)}\right) \qquad \text{та} \qquad F''(x) = o\left(\frac{1}{x^2 (\ln x)^2 \cdots (\ln^{\circ(j)}(x))^2}\right)$$

при $x \to \infty$. Застосовуючи теорему 4, отримуємо $\mathbb{E}X_n \sim g^*(n) \sim F(n)$.

За індукцією легко показати, що для $k \geqslant 2$ послідовність $\mathbb{E}X_n^k$ задовольняє рекурсію

$$\mathbb{E}X_n^k = e_n(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{J_n = k\} \mathbb{E}X_i^k, \qquad n \geqslant 2,$$

де $e_n(k) = k(g^*(n))^{k-1} + o(k(g^*(n))^{k-1})$. Тому твердження теореми для моментів порядку $k \geqslant 2$ випливає з теореми 2. Оскільки $g^*(x) \sim \ln^* x$ при $x \to \infty$, твердження теореми доведено для послідовності X_n.

Доведення теореми для послідовності $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ випливає з того факту, що послідовність $\mathbb{E}T_n^k$ задовольняє рекурсію

$$\mathbb{E}T_n^k = e'_n(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{J_n = k\} \mathbb{E}T_i^k, \qquad n \geqslant 2,$$

де $e'_n(k) = k\mathbb{E}V_n \mathbb{E}T_n^{k-1} + o(\mathbb{E}V_n \mathbb{E}T_n^{k-1})$. Можна показати, що $e'_n(k) \sim e_n(k)$, а тому $\mathbb{E}T_n^k \sim \sim \mathbb{E}X_n^k \sim (g^*(n))^k$ за теоремою 2. Теорема доведена повністю.

1. *Drmota M.* Random trees: An interplay between combinatorics and probability. – New York: Springer, 2009. – 457 p.
2. *Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic combinatorics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 824 p.
3. *Greene D. H., Knuth D. E.* Mathematics for the analysis of algorithms. – Boston: Birkhäuser, 1990. – 132 p.
4. *Rösler U.* On the analysis of stochastic divide and conquer algorithms // Algorithmica. – 2001. – **29**. – P. 238–261.
5. *Möhle M.* Asymptotic results for coalescent processes without proper frequencies and applications to the two-parameter Poisson-Dirichlet coalescent // Stoch. Process. Appl. – 2010. – **120**. – P. 2159–2173.
6. *Marynych A.* On the asymptotics of moments of linear random recurrences // Theory Stoch. Proc. – 2010. – **16(32)**. – P. 106–119.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 03.09.2010

O. V. Marynych

Asymptotic behavior of moments of random recursive sequences

We propose a new method of analyzing the asymptotics of moments of certain random recurrences which is based on the technique of iterative functions. By using the method, we show that the moments of the number of collisions and the absorption time in the Poisson–Dirichlet coalescent behave like powers of the $\ln^*(\cdot)$ *function which grows slower than any iteration of the logarithm, and thereby prove the weak laws of large numbers.*